

Phương pháp Hàm Số - Sức mạnh trong bài toán chứa tham số

Lời tựa. Tiếp tục là một chuyên đề nho nhỏ gửi tới bạn đọc. Cũng như tiêu đề của nó thì bài viết này có liên quan đến phương pháp sử dụng hàm số và đạo hàm trong một số dạng toán chứa tham số. Nó ít xuất hiện trong các đề thi của Bộ GD – ĐT nhưng đây là một trong những phương pháp hay khai thác tư duy của học sinh. Hi vọng bài viết nhỏ dưới đây giúp các bạn bổ sung thêm vào kiến thức phong phú của mình những phương pháp đa dạng.

Kiến thức cơ sở.

- Tìm m để phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm trên D .
 1. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D
 2. Dựa vào bảng biến thiên xác định tất cả giá trị của m để $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$
 3. Kết luận giá trị m cần tìm.

Lưu ý :

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên D thì giá trị m cần tìm thỏa mãn điều kiện : $\min_D f(x) \leq g(m) \leq \max_D f(x)$
- Đề bài yêu cầu tìm giá trị của tham số m để phương trình có n nghiệm phân biệt thì ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định dạng toán : “ Tìm m sao cho đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại n điểm phân biệt.
- Tìm m để bất phương trình $f(x) \geq g(m)$ hoặc $f(x) \leq g(m)$ có nghiệm trên D
 1. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D
 2. Dựa vào bảng biến thiên :
 - Bất phương trình $f(x) \geq g(m) \Leftrightarrow g(m) \leq \max_D f(x)$, biểu diễn bằng lời : là những giá trị của m sao cho tồn tại phần đồ thị nằm trên đường thẳng $y = g(m)$
 - Bất phương trình $f(x) \leq g(m) \Leftrightarrow g(m) \geq \min_D f(x)$, biểu diễn bằng lời : là những giá trị của m sao cho tồn tại phần đồ thị nằm dưới đường thẳng $y = g(m)$
- Tìm m để bất phương trình $f(x) \geq g(m)$ hoặc $f(x) \leq g(m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$
 1. Bất phương trình $f(x) \geq g(m)$ luôn đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \min_D f(x) \geq g(m)$
 2. Bất phương trình $f(x) \leq g(m)$ luôn đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \max_D f(x) \leq g(m)$

Và từ những điều trên , người ta còn sử dụng vào các bài toán hệ phương trình , hệ bất phương trình vì các bài toán này luôn quy về dạng phương trình , bất phương trình chứa tham số kể trên.

Dưới đây chúng ta sẽ đi sâu vào 10 ví dụ nhỏ. Để người đọc có thể hiểu rõ phương pháp cũng như mục đích của bài viết này. Cuối bài viết sẽ có 5 bài tập vận dụng nho nhỏ.

Bài toán 1. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt :

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 16\sqrt{x(x-1)}\right) = 1$$

Lời giải. Điều kiện $x > 1$, với phép toán liên hợp phương trình đã cho được viết lại thành :

$$m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 16\sqrt[4]{x(x-1)} = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow m\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x-1}} - 16\sqrt[4]{x(x-1)}$$

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x}$ và đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x}{x-1}} \geq 0$ thì ta có : $m = 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}} - 16\sqrt[4]{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow t^2 + \frac{16}{t} = 1 - m$ (*)

Vì $x > 1 \Rightarrow t = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x-1}} > 1$ và với mỗi giá trị của t tương ứng có đúng một nghiệm x . Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm thuộc $(1; +\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$ với $t \in (1; +\infty)$, có $f'(t) = 2t - \frac{16}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t^3 = 8 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên.

t	1	2	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	17	12	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta có giá trị cần tìm của m thỏa mãn : $12 < 1 - m < 17 \Leftrightarrow -16 < m < -11$.

Bài toán 2. Tìm m để bất phương trình : $\sqrt{\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}} - m - \sqrt{3+2x-x^2} \leq 2$ có nghiệm thực.

Lời giải. Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\sqrt{\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}} - m \leq \sqrt{3+2x-x^2} + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \geq m \\ \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - m \leq (\sqrt{3+2x-x^2} + 2)^2 \end{cases} (*)$$

Điều kiện $-1 \leq x \leq 3$ ta đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \geq 0$, khi đó $4 \leq t^2 = 4 + 2\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{3-x} \leq 8 \Leftrightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}]$

Khi đó hệ bất phương trình (*) trở thành : $\begin{cases} t \geq m \\ t - \frac{t^4}{4} \leq m \end{cases}$. Xét hàm số $f(t) = t - \frac{t^4}{4} \quad \forall t \in [2; 2\sqrt{2}]$

Do đó suy ra $\min_{[2; 2\sqrt{2}]} f(t) = f(2\sqrt{2}) = -16 + 2\sqrt{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi : $\begin{cases} m \leq \max_{[2; 2\sqrt{2}]} t \\ m \geq \min_{[2; 2\sqrt{2}]} f(t) \end{cases} \Leftrightarrow -16 + 2\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

Bài toán 3. Tìm m để bất phương trình $x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \geq m$ đúng với mọi $x > 0$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}$ với $x \in (0; +\infty)$, ta có :

$$f'(x) = 1 - \frac{11}{2x^2} - \frac{14}{x^2\sqrt{x^2+7}} = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 11)\sqrt{x^2+7} = 28 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \geq 11 \\ (2x^2 - 11)^2(x^2 + 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Bảng biến thiên.

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{15}{2}$	$+\infty$

Từ đó suy ra $\min_{(0;+\infty)} f(x) = \frac{15}{2}$. Bất phương trình ban đầu đúng với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi $m \leq \min_{(0;+\infty)} f(x) = \frac{15}{2}$.

Bài toán 4. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thực phân biệt : $10x^2 + 8x + 4 = m(2x+1)\sqrt{x^2+1}$

Lời giải. Với $x \in \mathbb{R}$ phương trình đã cho được viết lại thành :

$$2(2x+1)^2 + 2(\sqrt{x^2+1})^2 = m(2x+1)\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} + 2 = m \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (*)$$

Đặt $t = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ khi đó phương trình (*) trở thành : $2t + \frac{2}{t} = m$ (vì $t = 0$ không là nghiệm của phương trình)

Trước hết xét hàm số $t = f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, có $f'(x) = \frac{2-x}{(\sqrt{x^2+1})^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ suy ra $t \in (-2; \sqrt{5}]$

Xét hàm số $F(t) = 2t + \frac{2}{t}$ với $t \in (-2; 0) \cup (0; \sqrt{5}]$, có $F'(t) = 2 - \frac{2}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên.

x	-2	-1	0	1	$\sqrt{5}$	
$F'(x)$	+	0	-	-	0	+
$F(x)$	-5	-4	$+\infty$	4	$\frac{12\sqrt{5}}{5}$	

Dựa vào bảng biến thiên , ta có $m \in (-5; -4) \cup \left(4; \frac{12}{\sqrt{5}}\right)$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 5. Tìm m để bất phương trình $(x - 6^{1-x}) \left[(m-1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m+1 \right] \geq 0$ đúng $\forall x \in [0;1]$

Lời giải. Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình nên bài toán sẽ đưa về dạng xét $x \in [0;1)$.

Xét hàm số $f(x) = x - 6^{1-x}$ với $x \in [0;1)$, có $f'(x) = 1 + 6^{1-x} \cdot \ln 6 > 0 \quad \forall x \in [0;1)$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên

$[0;1]$, do đó $f(x) \leq f(1) = 0$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành : $(m-1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m+1 \leq 0 \quad (*)$

Với $x \in [0;1)$ đặt $t = 6^x \in [1;6)$ nên bất phương trình (*) trở thành : $(m-1)t - \frac{2}{t} + 2m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t}$

Xét hàm số $h(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t}$ với mọi $t \in [1;6)$, ta có : $h'(t) = \frac{3t^2 - 4t - 4}{(t^2 + 2t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [1;6) \\ 3t^2 - 4t - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên.

t	1	2	6
$h'(t)$	-	0	+
$h(t)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

Do đó $m \leq \min_{[1;6)} h(t) = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 6. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 8x + 3y^2 = 8m \\ \sqrt[3]{x+1} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $y \leq 9$.

Lời giải. Điều kiện $y \geq 0$, ta đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x+1} \\ b = \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^3 - 1 \\ y = b^2 \end{cases}$, với $0 \leq y \leq 9 \Leftrightarrow b \in [0; 3]$ khi đó hệ phương trình đã

cho trở thành :

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 8a^3 - 8 + 3b^4 = 8m \end{cases} \Leftrightarrow 8(4-b)^3 - 8 + 3b^4 = 8m \Leftrightarrow 8m = 3b^4 - 8b^3 + 96b^2 - 384b + 504$$

Bài toán trở thành. Tìm m để phương trình $8m = 3b^4 - 8b^3 + 96b^2 - 384b + 504$ có nghiệm $b \in [0; 3]$

Xét hàm số $f(b) = 3b^4 - 8b^3 + 96b^2 - 384b + 504$. Ta có

$$f'(b) = 12b^3 - 24b^2 + 192b - 384 = 12(b-2)(b^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

Bảng biến thiên.

b	0	2	3
$f'(b)$	-	0	+
$f(b)$	504	104	243

Dựa vào bảng biến thiên, hệ phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn $y \leq 9$ khi và chỉ khi $13 \leq m \leq \frac{243}{8}$.

Bài toán 7. Chứng minh rằng với mọi $a < 0$, hệ phương trình sau có hai nghiệm :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 + 2 = 3x + 9y \\ x^2 + \ln(1-x^2) - 3\ln(4y - y^2 - 3) + a = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện : $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 < y < 3 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < y - 2 < 1 \end{cases}$, phương trình một được viết lại thành :

$$x^3 - y^3 + 6y^2 + 2 = 3x + 9y \Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 6y^2 + 9y - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = (y - 2)^3 - 3(y - 2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ với $t \in (-1; 1)$, có $f'(t) = 3t^2 - 3 < 0 \quad \forall t \in (-1; 1)$ do đó $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$ mà $f(x) = f(y - 2) \Rightarrow x = y - 2$ thế xuống phương trình hai ta có : $a = 2\ln(1 - x^2) - x^2$

Đặt $u = x^2 \in [0; 1]$ khi đó $a = 2\ln(1 - u) - u$. Xét hàm số $f(u) = 2\ln(1 - u) - u$ với $u \in [0; 1]$ có :

$$f'(u) = \frac{-2}{1-u} - 1 = \frac{u-3}{1-u} < 0 \quad \forall u \in [0; 1]$$

Bảng biến thiên.

x	0	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	0	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $a = f(u) < f(0) = 0$ thì phương trình $a = 2\ln(1 - x^2) - x^2$ có nghiệm duy nhất $x^2 > 0$ do đó có hai giá trị của x, y tương ứng. Hay nói cách khác với $a < 0$ thì hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt. Điều phải chứng minh.

Bài toán 8. Tìm m để hệ bất phương trình : $\begin{cases} 14^{2x+\sqrt{x+1}} - 14^{2+\sqrt{x+1}} + 2014x \leq 2014 \\ x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Xét bất phương trình một ta có :

✓ Nếu $x > 1 \Rightarrow \begin{cases} 2014(1-x) < 0 \\ 14^{2+\sqrt{x+1}}(14^{2x-2} - 1) > 0 \end{cases}$ nên bất phương trình vô nghiệm.

✓ Nếu $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 2014(1-x) \geq 0 \\ 14^{2+\sqrt{x+1}}(14^{2x-2} - 1) \leq 0 \end{cases}$ luôn đúng nên nghiệm của bất phương trình một là $-1 \leq x \leq 1$.

Bài toán trở thành. Tìm m để bất phương trình hai có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$.

Với $-1 \leq x \leq 1$ nên phương trình hai được viết lại thành : $m \leq \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$ với $x \in [-1; 1]$, có $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3}$

Bảng biến thiên.

x	-1	$2 - \sqrt{3}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-2	$2 - 2\sqrt{3}$	-2

Từ bảng biến thiên ta có bất phương trình $m \leq f(x)$ có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$ khi và chỉ khi $-2 \leq m \leq 2 - 2\sqrt{3}$.

Bài toán 9. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x^2 + x + 1} + \sqrt{3y^2 - y + 1} = m \\ \sqrt{3x^2 - x + 1} + \sqrt{3y^2 + y + 1} = m \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Với $x, y \in \mathbb{R}$ ta có : $\sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 - x + 1} = \sqrt{3y^2 + y + 1} - \sqrt{3y^2 - y + 1}$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{3t^2 + t + 1} - \sqrt{3t^2 - t + 1}$ ta suy ra :

$$f'(t) = \frac{3\left(t + \frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\left(t + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}}} - \frac{3\left(t - \frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}}} = g\left(t + \frac{1}{6}\right) - g\left(t - \frac{1}{6}\right)$$

Với $g(u) = \frac{3\sqrt{12u}}{\sqrt{36u^2 + 11}}$ là hàm số đồng biến với mọi $u \in \mathbb{R}$ do đó $g\left(t + \frac{1}{6}\right) - g\left(t - \frac{1}{6}\right) = f'(t) > 0$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà $f(x) = f(y)$ suy ra $x = y$ thế vào phương trình một của hệ phương trình ta có :

$$F(x) = \sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 - x + 1} = m$$

Xét hàm số $F(x) = \sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 - x + 1}$, có $F'(x) = \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2 + x + 1}} + \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2 - x + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		0	
$F(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên dễ dàng suy ra được $m \geq 2$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 10. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases} x^2 - 6x - 2 = y - 5\sqrt{x + y + 2} \\ 4x^2 + 2\sqrt{4 - x^2} - 5\sqrt{2 - (x + y)} + \left(\frac{1}{2}\right)^m = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện : $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq x + y \leq 2 \end{cases}$ khi đó ta viết phương trình một lại thành :

$$x^2 - 5x = x + y - 2 - 5\sqrt{x + y + 2} \Leftrightarrow (x - \sqrt{x + y + 2})(x + \sqrt{x + y + 2} - 5) = 0$$

➤ Với $x + \sqrt{x + y + 2} - 5 = 0$ (•), ta có $\begin{cases} x \leq 2 \\ x + y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + \sqrt{x + y + 2} \leq 4 \Rightarrow x + \sqrt{x + y + 2} - 5 \leq -1 < 0$

Suy ra phương trình (•) vô nghiệm thực.

➤ Với $x = \sqrt{x + y + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 = x + y \end{cases}$ thế xuống phương trình hai chúng ta có : $\left(\frac{1}{2}\right)^m = 3\sqrt{4 - x^2} - 4x^2$ (*)

Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{4-x^2} - 4x^2$ với $x \in [0; 2]$, có $f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{4-x^2}} - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên.

x	0	2
$f'(x)$	0	—
$f(x)$	6	→ -16

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $-16 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \leq 6 \Leftrightarrow m \geq -\log_2 6$.

Vậy với $m \geq -\log_2 6$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Bài tập vận dụng :

Bài 1. Tìm tham số thực m sao cho bất phương trình $6\sqrt{3(\sqrt{x+5} + \sqrt{2-x})} - m - 2\sqrt{-x^2 - 3x + 10} \geq 7$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-5; 2]$.

Bài 2. Tìm m để phương trình $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$ có nghiệm thực.

Bài 3. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 8} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 4m - m^3$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 4. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm :
$$\begin{cases} 3^x - 4 \geq 5^{\frac{x}{2}} \\ 1 + \log_2(m-x) \geq \log_2(x^4 + 1) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài 5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm :
$$\begin{cases} 2\sqrt{xy-y} + x + y = 5 \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{1-y} = m \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

“ Học như con thuyền ngược nước , không tiến ắt phải lùi “

Facebook : <https://www.facebook.com/starfc.manunited>

Thị Trần Cồn – Hải Hậu – Nam Định – 14/08/2014