

MỤC LỤC

	Trang
A- PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ	
1- Phương pháp bình phương hai vế	2
2- Phương pháp nhân lượng liên hợp	7
3- Phương pháp đặt ẩn phụ	14
4- Phương pháp hàm số đơn điệu	19
B- BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ	23

1- PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG HAI VẾ

- **Mục đích:** Khử dấu căn thức, đưa phương trình đã cho về phương trình đa thức.
- **Phương pháp chung:** chuyển số hạng chứa căn về một vế, các số hạng khác sang vế còn lại, sau đó bình phương hai vế. Chú ý phép bình phương hai vế chỉ là phép biến đổi hệ quả, do đó sau khi giải ra nghiệm thì phải thử lại.

- **Các phương trình cơ bản:**

$$\diamond \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\diamond \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \quad (\text{hoặc } f(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\diamond \sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^3(x)$$

$$\diamond \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

- **Một số ví dụ:**

Ví dụ 1: (Đề thi thử Đại học trường THPT Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An – năm 2011)

$$\text{Giải phương trình } 4x^2 - 8x + \sqrt{2x+3} = 1. \quad (1)$$

Giải: Điều kiện: $x \geq -\frac{3}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = -4x^2 + 8x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 8x + 1 \geq 0 & (2) \\ 2x+3 = (-4x^2 + 8x + 1)^2 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow 2x+3 = 16x^4 + 64x^2 + 1 - 64x^3 - 8x^2 + 16x \Leftrightarrow 8x^4 - 32x^3 + 28x^2 + 7x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 10x + 1)(2x^2 - 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{4} \text{ hoặc } x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

[dùng máy tính CASIO hoặc VINACAL để phân tích thành nhân tử]

$$\text{Đối chiếu với (2), ta được nghiệm là } x = \frac{5 - \sqrt{21}}{4}; x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}.$$

Ví dụ 2: (Đề thi thử Đại học ĐH Hồng Đức năm 2012)

$$\text{Giải phương trình } \left(x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{x^2 + 3x + \frac{1}{4}} = 2\sqrt{3}x \quad (1)$$

Giải: Bình phương hai vế của (1), ta được:

$$(1) \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{4}\right) = 12x^2 \Rightarrow 16x^4 + 32x^3 - 232x^2 + 8x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (4x^2 + 20x + 1)(4x^2 - 12x + 1) = 0 \quad [\text{dùng máy tính CASIO hoặc VINACAL để phân tích}]$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm 2\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}. \text{ Thử lại, ta được nghiệm là } x = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}; x = \frac{-5 \pm 2\sqrt{6}}{2}.$$

Ví dụ 3:

$$\text{Giải phương trình } (2x-5)\sqrt{2x+3} = \left(\frac{2}{3}x+1\right)\sqrt{\frac{2}{3}x-1} \quad (1)$$

Giải:

Bình phương hai vế của (1), ta được:

$$(1) \Rightarrow (x-3)(2x+3)(26x-57) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{57}{26}.$$

Thử lại, ta được nghiệm là $x = 3$; $x = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 4:

$$\text{Giải phương trình } (x-3)\sqrt{x+1} + x\sqrt{4-x} = 2x-3 \quad (1)$$

Phân tích: Khi gặp một phương trình có hai căn thức bậc nhất $\sqrt{ax+b}$ và $\sqrt{cx+d}$ thì ta đặt một trong hai căn thức đó bằng t .

Giải:

Điều kiện : $-1 \leq x \leq 4$.

Đặt $t = \sqrt{x+1}$ với $t \geq 0$, suy ra $x = t^2 - 1$, phương trình (1) trở thành :

$$(t^2-4)t + (t^2-1)\sqrt{5-t^2} = 2t^2-5 \Rightarrow (t^2-1)\sqrt{5-t^2} = -t^3 + 2t^2 + 4t - 5$$

$$\Rightarrow 2t^6 - 4t^5 - 11t^4 + 26t^3 + 7t^2 - 40t + 20 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+2)(t-1)^2(2t^2-5) = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \vee t = 1 \vee t = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad (t \geq 0)$$

- $2 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa điều kiện)
- $1 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa điều kiện)
- $\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 3; x = 0; x = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 5:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{x^2+4x+3} + \sqrt{x^2+x} = \sqrt{3x^2+4x+1} \quad (1)$$

Giải:

Bình phương hai vế của (1), ta được:

$$(1) \Rightarrow 2\sqrt{x^2+4x+3}\sqrt{x^2+x} = x^2-x-2 \Rightarrow 3x^4+22x^3+31x^2+8x-4=0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2(3x^2+16x-4)=0 \Rightarrow x = -1 \vee x = \frac{-8 \pm 2\sqrt{19}}{3}$$

Thử lại, ta được nghiệm là $x = -1; x = \frac{-8-2\sqrt{19}}{3}$.

Ví dụ 6:

$$\boxed{\text{Giải phương trình } \sqrt{x^2 + 9x - 1} + x\sqrt{11 - 3x} = 2x + 3 \quad (1)}$$

Phân tích: Phương trình có chứa hai dấu căn, do đó phải mất hai lần bình phương mới khử hết dấu căn. Để giảm số lần bình phương ta có thể đặt $t = \sqrt{11 - 3x}$ để làm mất đi một dấu căn.

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + 9x - 1 \geq 0 \\ 11 - 3x \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{11 - 3x}$ với $t \geq 0$, suy ra $x = \frac{11 - t^2}{3}$, phương trình (1) trở thành:

$$\frac{1}{3}\sqrt{t^4 - 49t^2 + 409} + \frac{11 - t^2}{3} \cdot t = 2 \cdot \frac{11 - t^2}{3} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^4 - 49t^2 + 409} = t^3 - 2t^2 - 11t + 31$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 2t^2 - 11t + 31 \geq 0 \quad (**) \\ t^6 - 4t^5 - 19t^4 + 106t^3 + 46t^2 - 682t + 552 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (t - 1)(t - 3)(t^4 - 22t^2 + 18t + 184) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \quad (\text{thỏa } (**))$$

$$(\text{vì } t^4 - 22t^2 + 18t + 184 = \underbrace{(t^2 - 11)^2}_{\geq 0} + \underbrace{18t + 63}_{> 0} > 0)$$

- $\sqrt{11 - 3x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$ (thỏa (*))
- $\sqrt{11 - 3x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ (thỏa (*))

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là $x = \frac{10}{3}$ và $x = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 7:

$$\boxed{\text{Giải phương trình } 2\sqrt[3]{2x - 1} = x^3 + 1 \quad (1)}$$

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 8(2x - 1) = (x^3 + 1)^3 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1)(x^6 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 9) = 0$$

[dùng máy tính CASIO hoặc VINACAL để phân tích thành nhân tử]

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x^6 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 9 = 0 \quad (2)$$

Ta có $x^6 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 9 = (x^3 + 1)^2 + 2x^4 + (4x^2 + 2x + 8) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 8:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{2-x} + 2 - \sqrt[3]{2x^2 + 6x + 3} = 0 \quad (1)$$

Phân tích: Phương trình có chứa hai dấu căn, ta có thể đặt $t = \sqrt{2-x}$ để làm mất đi một dấu căn.

Giải:

Điều kiện: $x \leq 2$

Đặt $t = \sqrt{2-x}$ với $t \geq 0$. Ta có $x = 2 - t^2$ nên (1) trở thành:

$$t + 2 = \sqrt[3]{2t^4 - 14t^2 + 23} \Leftrightarrow (t+2)^3 = 2t^4 - 14t^2 + 23 \Leftrightarrow (t^2 + t - 1)(2t^2 - 3t - 15) = 0$$

[dùng máy tính CASIO hoặc VINACAL để phân tích thành nhân tử]

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } t = \frac{3 \pm \sqrt{129}}{4}$$

Đổi chiếu điều kiện $t \geq 0$, ta được $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ và $t = \frac{3 + \sqrt{129}}{4}$.

$$\bullet \sqrt{2-x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet \sqrt{2-x} = \frac{3 + \sqrt{129}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-53 - 3\sqrt{129}}{8}$$

Giải các phương trình sau đây :

- $x^2 - 6x = 2\sqrt{2x+3}$
- $2(x^2 - 3x - 1) - 7\sqrt{x^3+1} = 0$
- $2(x^2 - x + 6) = 5\sqrt{x^3+8}$
- $\sqrt{1+\frac{2}{x}} = -2x - 4 + \frac{3}{x}$
- $(6x^2 + 12x - 6)\sqrt{2x-1} = x^3 + 22x^2 - 11x$
- $\frac{17x+1}{\sqrt{3-2x^2}+2-x} = 2x-3$
- $(2\sqrt{2x-1}+x+1)^2 = 9x^2 + 22x - 15$
- $2(5x-3)\sqrt{x+1} + 5(x+1)\sqrt{3-x} = 3(5x+1)$
- $4x^2 + 3(x^2 - x)\sqrt{x+1} = 2(x^3 + 1)$
- $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+1} = 2x^2 - x - 3$
- $\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$
- $2x + \frac{x-1}{x} = \sqrt{1-\frac{1}{x}} + 3\sqrt{x-\frac{1}{x}}$
- $4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0$
- $x(1+\sqrt{2x+1}) + 2 = \sqrt{x+1}(x+\sqrt{2x+1})$
- $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\sqrt{x^2+x+3}$
- $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2$
- $4x^2 + (2x-5)\sqrt{4x+2} + 17 = 4x + (2x+3)\sqrt{6-4x}$
- $2(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 10x^2 + 3x - 6$
- $3x^2 + 6x - 3 = \sqrt{\frac{x+7}{3}}$
- $4(2x^2+1) + 3(x^2-2x)\sqrt{2x-1} = 2(x^3+5x)$
- $\sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{x^2-x} = 2$
- $(4x^2+x-2)\sqrt{x+4} = 4-3x-8x^2$
- $(x+2)\sqrt{x^2-2x+4} = (x-1)\sqrt{x^2+4x+7}$
- $4(x^2+x+2)\sqrt{x^2+x+1} + 6x^3 + 3x^2 + 12x + 7 = 0$
- $7\sqrt{3x-7} + (4x-7)\sqrt{7-x} = 32$
- $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4}$
- $x+1 = (2x+1)\sqrt{\sqrt{x+1}+2}$
- $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$
- $\sqrt[4]{2-x^4} = x^2 - 3x + 3$
- $\sqrt{x} + \sqrt{x^2-4x+1} = x+1$
- $(4x+2)\sqrt{x+1} - (4x-2)\sqrt{x-1} = 9$
- $(x+2)\sqrt{x+1} - (4x+5)\sqrt{2x+3} = -6x-23$
- $x + \sqrt{x+\frac{1}{2}} + \sqrt{x+\frac{1}{4}} = 2$

2- PHƯƠNG PHÁP NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP

- **Mục đích:** Đưa phương trình đã cho về phương trình tích (có thừa số chung).
- **Phương pháp:** Sử dụng các biểu thức liên hợp

Biểu thức	Biểu thức liên hợp	Tích
$A + B$	$A - B$	$A^2 - B^2$
$A - B$	$A + B$	$A^2 - B^2$
$A + B$	$A^2 - AB + B^2$	$A^3 + B^3$
$A - B$	$A^2 + AB + B^2$	$A^3 - B^3$

2.1- Nhân lượng liên hợp bằng cách nhóm các số hạng

- **Phương pháp:** Quan sát các số hạng có trong phương trình để tìm mối liên hệ giữa chúng, sau đó nhóm lại rồi nhân lượng liên hợp để làm xuất hiện nhân tử chung.

- **Một số ví dụ:**

Ví dụ 1:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}. \quad (1)$$

Phân tích: Quan sát các biểu thức dưới dấu căn, ta thấy $10x+1 - (9x+4) = x-3 = 3x-5 - (2x-2)$.

Như vậy ta sẽ nhóm $\sqrt{10x+1}$ với $\sqrt{9x+4}$, $\sqrt{3x-5}$ với $\sqrt{2x-2}$. Sau đó nhân lượng liên hợp để xuất hiện nhân tử chung là $x-3$.

Giải:

Điều kiện: $x \geq \frac{5}{3}$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{10x+1} - \sqrt{9x+4}) + (\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x+4}} + \frac{x-3}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } \frac{1}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x+4}} + \frac{1}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}} = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì vế trái lớn hơn 0.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 3$.

Ví dụ 2:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{2x^2+16x+18} + \sqrt{x^2-1} = 2x+4. \quad (1)$$

Phân tích: Quan sát các biểu thức dưới dấu căn, ta thấy $(2x+4)^2 - (2x^2+16x+18) = 2(x^2-1)$.

Như vậy ta sẽ nhóm $\sqrt{2x^2+16x+18}$ với $2x+4$. Sau đó nhân lượng liên hợp để xuất hiện nhân tử chung là $\sqrt{x^2-1}$.

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^2+16x+18 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2x+4 - \sqrt{2x^2+16x+18}) = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow 2(x^2-1) = \sqrt{x^2-1} (2x+4 + \sqrt{2x^2+16x+18})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1} = 0 \\ 2\sqrt{x^2-1} = 2x+4 + \sqrt{2x^2+16x+18} \end{cases} \quad (2)$$

- $\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (thỏa mãn điều kiện)
 - Từ (1) và (2), ta được $2\sqrt{2x^2 + 16x + 18} = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow 7x^2 + 64x + 73 = 0$ (vô nghiệm)
- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$.

Ví dụ 3:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{2x+4} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}} + 2\sqrt{2-x}. \quad (1)$$

Phân tích: Quan sát các biểu thức dưới dấu căn, ta thấy $2x+4-4(2-x)=6x-4$.

Như vậy ta sẽ nhóm $\sqrt{2x+4}$ với $2\sqrt{2-x}$. Sau đó nhân lượng liên hợp để xuất hiện nhân tử chung là $6x-4$.

Giải:

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ hoặc } \sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+4} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow 12 - 2x + 4\sqrt{(2x+4)(2-x)} = x^2 + 4 \Leftrightarrow 4\sqrt{(2x+4)(2-x)} = x^2 + 2x - 8$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{(2x+4)(2-x)} = (x-2)(x+4) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} \underbrace{\left[4\sqrt{2x+4} + (x+4)\sqrt{2-x} \right]}_{>0} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{3}{2}$ và $x = 2$.

2.2- Nhân lượng liên hợp bằng cách thêm bớt hằng số

- **Phương pháp chung:** đoán nghiệm x_o của phương trình, sau đó thêm bớt hằng số rồi nhân lượng liên hiệp để xuất hiện nhân tử $x - x_o$.
- **Cách đoán nghiệm:**
 - ❖ Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay.
 - hoặc
 - ❖ Chọn số x_o sao cho $\sqrt{f(x_o)}$ là số nguyên, nghĩa là $f(x_o)$ là số chính phương.

• **Một số ví dụ:**

Ví dụ 1: (Đề thi Đại học khối B – năm 2010)

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0. \quad (1)$$

Phân tích:

- **Đoán nghiệm:** Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta được nghiệm là $x_o = 5$. Cũng có thể đoán nghiệm là số x_o sao cho $3x_o + 1$ và $6 - x_o$ là những số chính phương. Dễ thấy $x_o = 5$.
- **Tìm số cần thêm bớt:** Ta có $\sqrt{3x_o + 1} = \sqrt{16} = 4$ nên -4 là hằng số cần thêm vào cho $\sqrt{3x+1}$ và $-\sqrt{6-x_o} = -\sqrt{1} = -1$ nên 1 là hằng số cần thêm vào cho $-\sqrt{6-x}$.

Giải:

Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4) + (1-\sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ta có vế trái của (2) lớn hơn 0 nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 5$.

Nhận xét: Phương pháp nhân lượng liên hiệp đưa phương trình đã cho về phương trình sau:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \quad \text{trong đó phương trình (2) thường là vô nghiệm.}$$

Ví dụ 2:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}. \quad (1)$$

Phân tích:

- *Đoán nghiệm:* Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta được nghiệm là $x_0 = 2$. Cũng có thể đoán nghiệm là số x_0 sao cho x_0^2+12 và x_0^2+5 là những số chính phương. Dễ thấy $x_0 = 2$.
- *Tìm số cần thêm bớt:* Ta có $\sqrt{x_0^2+12} = \sqrt{16} = 4$ nên -4 là hằng số cần thêm vào cho $\sqrt{x^2+12}$, và $\sqrt{x_0^2+5} = \sqrt{9} = 3$ nên -3 là hằng số cần thêm vào cho $\sqrt{x^2+5}$.

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+12}-4) = 3x-6 + (\sqrt{x^2+5}-3) \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4} = 3(x-2) + \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - 3 - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Vì $\sqrt{x^2+12} > \sqrt{x^2+5}$ nên từ phương trình (1) ta suy ra $5 < 3x \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$ nên $x+2 > \frac{5}{3}+2 > 0$, do đó

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} < \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - 3 - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} < 0 \text{ nên phương trình (2) vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 2$.

Ví dụ 3:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt[3]{3x+2} + x\sqrt{3x-2} = 2\sqrt{2x^2+1}. \quad (1)$$

Phân tích:

- *Đoán nghiệm:* Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta được nghiệm là $x_0 = 2$. Cũng có thể đoán nghiệm là số x_0 sao cho $3x_0-2$ và $2x_0^2+1$ là những số chính phương. Dễ thấy $x_0 = 2$.

- *Tìm số cần thêm bớt:* Ta có $\sqrt[3]{3x_0+2} = \sqrt[3]{8} = 2$ nên -2 là hằng số cần thêm vào cho $\sqrt[3]{3x+2}$, $\sqrt{3x_0-2} = \sqrt{4} = 2$ nên -2 là hằng số cần thêm vào cho $\sqrt{3x-2}$.

• **Giải:**

Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x+2}-2)+2+x(\sqrt{3x-2}-2)+2x=2\sqrt{2x^2+1} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x+2}-2)+x(\sqrt{3x-2}-2)=2(\sqrt{2x^2+1}-x-1) \\ &\Leftrightarrow \frac{3x-6}{\sqrt[3]{3x+2}+2}+\frac{x(3x-6)}{\sqrt{3x-2}+2}=\frac{2x(x-2)}{\sqrt{2x^2+1}+x+1} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{3}{\sqrt[3]{3x+2}+2}+\frac{3x}{\sqrt{3x-2}+2}-\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}+x+1}=0 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Ta có
$$\frac{3x}{\sqrt{3x-2}+2}-\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}+x+1}=\frac{x(3\sqrt{2x^2+1}-2\sqrt{3x-2}+3x-1)}{(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x^2+1}+x+1)}=A$$

Vì $x \geq \frac{2}{3}$ nên $3x-1 > 0$ và $3\sqrt{2x^2+1}-2\sqrt{3x-2}=\frac{18x^2-12x+17}{3\sqrt{2x^2+1}+2\sqrt{3x-2}} > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$

Suy ra $A > 0$ nên phương trình (2) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 2$.

Nhận xét: Các phương trình vô tỷ mà chứa cả căn bậc hai và căn bậc 3 thì thông thường là giải bằng phương pháp nhân lượng liên hợp.

Ví dụ 4:

Giải phương trình $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+\frac{x^2}{2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+2 \quad (1)$

Phân tích:

- *Đoán nghiệm:* Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta được nghiệm là $x_1 \approx 1,732050808$ lưu vào biến nhớ A, $x_2 \approx -1,732050808$ lưu vào biến nhớ B. Sau đó ta tính $A+B=0$ và $AB=-3$. Do đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2-0.x-3=0 \Leftrightarrow x^2-3=0$. Vậy $x=\pm\sqrt{3}$ chính là hai nghiệm của phương trình.

- *Tìm số cần thêm bớt:* Ta có $\sqrt{\frac{x_1^2+x_1+1}{x_1+4}}=1$ nên -1 là hằng số cần thêm vào cho $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}$ và

$$\frac{1}{\sqrt{x_1^2+1}}=\frac{1}{2} \text{ nên } -\frac{1}{2} \text{ là hằng số cần thêm vào cho } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Giải:

Điều kiện: $x > -4$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} - 1 \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3}{\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + 1 \right)(x+4)} + \frac{x^2-3}{2} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+2)} = 0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\pm\sqrt{3}$.

2.3- Nhân lượng liên hợp bằng cách thêm bớt ẩn số

- Phương pháp nhân lượng liên hợp bằng cách thêm bớt *ẩn số* cũng giống phương pháp nhân lượng liên hợp bằng cách thêm bớt *hằng số*.

- *Một số ví dụ:*

Ví dụ 1:

Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$ (1)

Phân tích:

- *Đoán nghiệm:* Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta được hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$.
Do đó $x=0; x=1$ là nghiệm của phương trình $x^2 - x = 0$. Vậy $x^2 - x$ chính là thừa số chung cần tìm.
- *Tìm biểu thức chứa ẩn số cần thêm bớt:*
 - ❖ Ta cần tìm a, b sao cho phương trình $\sqrt{3x+1} - (ax+b) = 0$ (*) nhận $x=0$ và $x=1$ làm nghiệm.
Thay $x=0$ vào (*) ta được $b=1$; thay $x=1$ vào (*) ta được $2-a-b=0 \Rightarrow a=2-b=1$. Vậy $-x-1$ là biểu thức chứa ẩn cần thêm vào cho $\sqrt{3x+1}$.
 - ❖ Tương tự, $-x-2$ là biểu thức chứa ẩn cần thêm vào cho $\sqrt{5x+4}$.

Giải: Điều kiện: $x \geq -\frac{4}{5}$

$$(1) \Leftrightarrow [\sqrt{3x+1} - (x+1)] + [\sqrt{5x+4} - (x+2)] = 3(x^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1}+x+1} + \frac{-x^2+x}{\sqrt{5x+4}+x+2} = 3(x^2-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x+1}+x+1} + \frac{1}{\sqrt{5x+4}+x+2} + 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$
- Phương trình (2) vô nghiệm vì vế trái lớn hơn 0.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0; x=1$.

Ví dụ 2:

Giải phương trình $\sqrt{5x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x-1} = 3x+3$ (1)

Cách 1: (thêm bớt hằng số)

Phân tích:

- *Đoán nghiệm:* Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta được nghiệm là $x_0 = 2$.

Giải:

Điều kiện: $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x^2+2x+1}-5\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)=3x-6 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x-2)(5x+12)}{\sqrt{5x^2+2x+1}+5}+\frac{(x-2)(2x+4)}{\sqrt{2x^2+1}+3}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=3(x-2) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{5x+12}{\sqrt{5x^2+2x+1}+5}+\frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+1}+3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=3 \end{cases} \quad (2)
 \end{aligned}$$

- Ta sẽ chứng minh phương trình (2) vô nghiệm.

$$\begin{aligned}
 \frac{5x+12}{\sqrt{5x^2+2x+1}+5} &> 2 \Leftrightarrow 5x^2+12x > 0 \text{ (đúng với mọi } x \geq 1) \\
 \frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+1}+3} &> 1 \Leftrightarrow x^2+2x > 0 \text{ (đúng với mọi } x \geq 1)
 \end{aligned}$$

Do đó vế trái của phương trình (2) lớn hơn 3 nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 2$.

Cách 2: (thêm bớt ẩn số)

Phân tích:

- *Đoán nghiệm:* Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta được nghiệm là $x_0 = 2$.
- *Tìm biểu thức chứa ẩn số cần thêm bớt:* $\sqrt{x_0-1} = 1$ nên -1 là hằng số cần thêm vào cho $\sqrt{x-1}$. Lúc này vế phải còn lại $3x+2$. Ta cần tách $3x+2 = (ax+b) + (cx+d)$. Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+c=3 \\ b+d=2 \\ 2a+b=5 \left(= \sqrt{5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1} \right) \\ 2c+d=3 \left(= \sqrt{2 \cdot 2^2 + 1} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

Vậy $-2x-1$ là biểu thức chứa ẩn cần thêm vào cho $\sqrt{5x^2+2x+1}$ và $-x-1$ là biểu thức chứa ẩn cần thêm vào cho $\sqrt{2x^2+1}$.

Giải:

Điều kiện: $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x^2+2x+1}-(2x+1)\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-(x+1)\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x-2)x}{\sqrt{5x^2+2x+1}+2x+1}+\frac{(x-2)x}{\sqrt{2x^2+1}+x+1}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=0 \\
 &\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } \frac{x}{\sqrt{5x^2+2x+1}+2x+1}+\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}+x+1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì vế trái lớn hơn 0 với mọi $x \geq 1$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 2$.

Giải các phương trình sau đây :

- $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$
- $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$
- $\frac{6x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}} = 3 + \sqrt{x-x^2}$
- $x + \sqrt{x^2 - 3x + 9} = \sqrt{x^2 + 2x + 10} + 1$
- $\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 2}$
- $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} + 2x^2 + 7x + 2 = 0$
- $\sqrt{25x^2 + 3} + 3\sqrt{10x-1} = 5$
- $x^2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x+6} + x^3 - 3x^2 - 2 = 0$
- $(x-3)\sqrt{1+x} + x\sqrt{4-x} = 2x-3$
- $\frac{2-x}{4} = \sqrt{2x-3} - \sqrt[3]{x-1}$
- $\sqrt[3]{4x-9}\sqrt{2x-1} + 4x^2 - 27 = 0$
- $3-x = \frac{2x^2-9x+17}{\sqrt{2x^2-6x+16} + \sqrt{3x-1}}$
- $\sqrt{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3x}} + \sqrt{\frac{x}{3} + \frac{1}{3x}} = \sqrt{3x-2} + 1$
- $(x^2 + 3x)\left(1 + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \sqrt{4x+12} + \sqrt{4x+28}$
- $\sqrt{\frac{x+1}{2}} + \sqrt{\frac{x+2}{3}} + \sqrt{\frac{x+3}{4}} = 3x$
- $4x^2 - 10x - 61 + (2x+3)\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = 0$
- $\sqrt{2x^2 - x - 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{x-1} + x^2 - 4x - 3 = 0$
- $(1+x)\sqrt{x^2 - x + 1} + (1-x)\sqrt{x^2 + x + 1} = 2$
- $(x^2 + 3x)\left(1 + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \sqrt{4x+12} + \sqrt{4x+28}$
- $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$
- $\sqrt{x^3 + x^2 - 1} + \sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 3$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{3} - x^3} + \sqrt{x - \frac{2}{9}} = 1$
- $\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{23x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + 3x^2 + 11$
- $\sqrt[3]{x-3} - \sqrt{4-x} - x^2 + x + 35 = 0$
- $1 + \sqrt[4]{6-x} = \sqrt[3]{3+x}$
- $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{2x-1} = x-4$
- $x^3 + 22x^2 - 11x = (6x^2 + 12x - 6)\sqrt{2x-1}$
- $\sqrt{x^2 + 9x - 1} + x\sqrt{11-3x} = 2x+3$
- $\sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x+9} + 2x^2 + 30x + 97 = 0$
- $\sqrt{x^2 + 2x + 92} = x^2 + 2x + \sqrt{x-1} + 1$
- $\frac{3 + \sqrt[3]{7x-6}}{7-x} = \frac{3+x}{4 + \sqrt{7-3x}}$
- $x + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+25} + 1 = 2\sqrt{x+16}$
- $x^3 + 12x + 7\sqrt{x+2} + 7\sqrt{8-x} = 6x^2 + 9$
- $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-5} = 2x^2 - 5x$

3- PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

3.1 Đặt một ẩn phụ đưa về phương trình

• **Phương pháp:**

- ❖ đặt ẩn phụ, nêu điều kiện của ẩn phụ (nếu có)
- ❖ đưa phương trình đã cho về phương trình theo ẩn phụ
- ❖ giải phương trình theo ẩn phụ và đối chiếu với điều kiện của ẩn phụ (nếu có)
- ❖ tìm nghiệm của phương trình ban đầu ứng với nghiệm ẩn phụ vừa tìm được

• **Một số ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 2\sqrt{2x^2+5x+3} + 3x - 16. \quad (1)$$

Giải:

Điều kiện: $x \geq -1$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3}$ với điều kiện $t > 0$. Ta có $t^2 = 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2+5x+3}$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2\sqrt{2x^2+5x+3} = 21 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 7 \\ x^2 - 146x + 429 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 7 \\ x = 143 \vee x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 3$.

Ví dụ 2:

$$\text{Giải phương trình } (x-4)(x+1) + 4(x-4)\sqrt{\frac{x+1}{x-4}} + 3 = 0. \quad (1)$$

Giải:

Điều kiện: $x \leq -1$ hoặc $x \geq 4$

Đặt $t = \sqrt{(x-4)(x+1)}$ với điều kiện $t \geq 0$.

- Nếu $x > 4$ thì $(x-4)\sqrt{\frac{x+1}{x-4}} = \sqrt{(x-4)(x+1)} = t$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 + 4t + 3 = 0$ (vô nghiệm)

- Nếu $x \leq -1$ thì $(x-4)\sqrt{\frac{x+1}{x-4}} = -\sqrt{(x-4)(x+1)} = -t$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 3$ (vô nghiệm)

- $\sqrt{(x-4)(x+1)} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$.

Đối chiếu với điều kiện $x \leq -1$ ta được nghiệm là $x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$.

- $\sqrt{(x-4)(x+1)} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{61}}{2}$.

Đối chiếu với điều kiện $x \leq -1$ ta được nghiệm là $x = \frac{3 - \sqrt{61}}{2}$.

Ví dụ 3:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{2(x^2 - x + 1)} = 1 + \sqrt{x} - x. \quad (1)$$

Giải:

Điều kiện: $x \geq 0$

- Xét $x = 0$, lúc đó (1) vô nghiệm.

- Xét $x \neq 0$, chia 2 vế của (1) cho $\sqrt{x}$, ta được: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 - \sqrt{x}$.

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ thì $x + \frac{1}{x} = t^2 + 2$, (1) trở thành: $\sqrt{2t^2 + 2} = t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

- $\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình (1) có một nghiệm là $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét: Bài này ta đã sử dụng thao tác chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}$. Đây là một thao tác mà ta phải lưu ý khi giải phương trình vô tỷ.

3.2 Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình

• **Phương pháp:**

- ❖ đặt hai ẩn phụ, nêu điều kiện của hai ẩn phụ (nếu có)
- ❖ đưa phương trình đã cho về phương trình theo hai ẩn phụ
- ❖ giải phương trình theo hai ẩn phụ và đối chiếu với điều kiện của hai ẩn phụ (nếu có)
- ❖ tìm nghiệm của phương trình ban đầu ứng với nghiệm hai ẩn phụ vừa tìm được

• **Ví dụ minh họa:**

$$\text{Giải phương trình } x^2 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 3 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}. \quad (1)$$

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Đặt $a = \sqrt{x^2 + x + 1}$; $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$ với điều kiện $a > 0$; $b > 0$. Phương trình (1) trở thành:

$$b^2 + 2a = ab + 4 \Leftrightarrow (b - 2)(b - a + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = a - 2 \end{cases}$$

- $\sqrt{x^2 - x + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

- $\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x^2 + x + 1} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} + 2 = \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x + 1} = x - 2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

3.3 Đặt hai ẩn phụ đưa về hệ phương trình

• **Phương pháp:**

- ❖ đặt hai ẩn phụ, nêu điều kiện của hai ẩn phụ (nếu có)
- ❖ tìm hệ thức liên hệ giữa hai ẩn phụ và hệ thức này độc lập đối với ẩn x .
- ❖ đưa phương trình đã cho về hệ phương trình theo hai ẩn phụ
- ❖ giải hệ phương trình theo hai ẩn phụ và đối chiếu với điều kiện của hai ẩn phụ (nếu có)
- ❖ tìm nghiệm của phương trình ban đầu ứng với nghiệm hai ẩn phụ vừa tìm được

• **Một số ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1: (Đề thi Đại học khối A năm 2009)

$$\text{Giải phương trình } 2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0. \quad (1)$$

Giải:

Điều kiện: $x \leq \frac{6}{5}$

Đặt $a = \sqrt[3]{3x-2}$ và $b = \sqrt{6-5x}$ ($b \geq 0$). Ta có $a^3 = 3x-2$; $b^2 = 6-5x$ nên $5a^3 + 3b^2 = 8$.

Phương trình (1) trở thành $2a + 3b - 8 = 0$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2a + 3b - 8 = 0 \\ 5a^3 + 3b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

- $\sqrt{6-5x} = 4 \Leftrightarrow x = -2$ (thỏa điều kiện). Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = -2$.

Ví dụ 2:

$$\text{Giải phương trình } 2(1+x)\sqrt{1+2x} = \sqrt{1+x} + \sqrt{(1+2x)^3}. \quad (1)$$

Giải:

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$

Đặt $a = \sqrt{1+x}$; $b = \sqrt{1+2x}$ với điều kiện $a \geq 0$; $b \geq 0$. Ta có $a^2 = 1+x$ và $b^2 = 1+2x$ nên $2a^2 - b^2 = 1$.

Phương trình (1) trở thành: $2a^2b = a + b^3$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2a^2 - b^2 = 1 \\ 2a^2b = a + b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - b^2 = 1 \quad (*) \\ a = 2a^2b - b^3 \quad (**) \end{cases}$$

Lấy (*) nhân cho (**) vế theo vế, ta được phương trình:

$$2a^3 - ab^2 = 2a^2b - b^3 \Leftrightarrow (a-b)(2a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b^2 = 2a^2 \end{cases}$$

- $a = b \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{1+2x} \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa điều kiện)
- $b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow 1+2x = 2(1+x) \Leftrightarrow 1 = 2$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 0$.

Ví dụ 3:

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 + 5x + 7} = 3. \quad (1)$$

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đặt $a = \sqrt{4x^2 + 5x + 1}; b = \sqrt{4x^2 + 5x + 7}$ ($a > 0; b > 0$)

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 3 \\ a^2 - b^2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$

$$\bullet \sqrt{4x^2 + 5x + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 16x^2 + 20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{8}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{8}$ và $x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{8}$.

Giải các phương trình sau đây :

- $x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9$
- $18x^2 - 18x + 5 = 3\sqrt[3]{9x^2 - 9x + 2}$
- $\frac{6x - 5\sqrt{1+x}}{2 + 3\sqrt{1+x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0$
- $\frac{6}{x+3} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{1+x} - 2}}$
- $x + \sqrt{x^2 - 3x + 9} = \sqrt{x^2 + 2x + 10} + 1$
- $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$
- $\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{4-x^2} = 2x^2 + 2x - 2$
- $x = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+x}}$
- $2\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} + 3\sqrt[3]{-x + \sqrt{x^2 + 1}} = 5$
- $\frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{2x^3 - 10} = x$
- $\frac{9-2x}{\sqrt{4-x}} + \frac{4x+3}{\sqrt{4x+1}} = \frac{15}{2}$
- $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$
- $\frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}} = \sqrt{x}$
- $\sqrt{x+1} + \frac{4(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{3(\sqrt{x-2} + 1)^2} = 3$
- $1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{5}{6x}$
- $3x + \frac{1}{\sqrt{2x-7}} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 2(\sqrt[4]{2x-7} + \sqrt[4]{x-3} + 5)$
- $\sqrt{1 + \sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{2x - x^2}} = 2(1-x)^4(2x^2 - 4x + 1)$
- $(4x-1)\sqrt{3-2x} + (7-4x)\sqrt{2x-1} = 2\sqrt{-4x^2 + 8x - 3} + 4$
- $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x(1-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2(1-x)}$
- $3\sqrt{x+2} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$
- $(2x+1)(1 + \sqrt{2x+1}) + 1 = 3\sqrt{2x+1}\sqrt[3]{(x+1)^2}$
- $3\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = (x+4)\sqrt{1-x^2}$
- $\frac{x^2}{3 + \sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{12 - 4\sqrt{9-x^2}} = 1$
- $\frac{4x-1}{\sqrt{4x-3}} + \frac{11-2x}{\sqrt{5-x}} = \frac{15}{2}$
- $x\sqrt{1+x} + (x+2)\sqrt{1-x} = x+1 + \sqrt{1-x^2}$
- $(2x+3)\sqrt{2+x} + (2x+1)\sqrt{2-x} = 5x+4 + \sqrt{4-x^2}$
- $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x^2} = \frac{7}{2}$
- $(2-x)\sqrt{1-x} + (4x-2)\sqrt{1+x} = 3x\sqrt{x}$
- $\sqrt[3]{(4x+1)^2} + \sqrt{x+1}\sqrt[3]{4x+1} = (x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{4x+1})$
- $\sqrt[3]{3x+5} = \sqrt[3]{15x+12} - \sqrt[3]{2x-1}$
- $\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$
- $\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 3x$
- $\frac{4x^2 - 2x - 3}{2x + \sqrt{2x+3}} = \frac{20 + 2x - 11\sqrt{2x+3}}{2x}$
- $\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + 2 = 0$

4- PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ ĐƠN ĐIỀU

4.1 Phương trình $f(x) = 0$ với $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên D

- **Phương pháp:** Nếu $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên D thì phương trình $f(x) = 0$ nếu có nghiệm thì có một nghiệm duy nhất trên D .
- **Ví dụ minh họa:**

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} - 1 = 0. \quad (1)$$

Phân tích:

- Dùng chức năng TABLE của máy tính cầm tay, ta tính khoảng 10 giá trị của hàm số

$f(x) = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} - 1$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì được kết quả sau:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x) \approx$	2,5	5,5	8,2	10,8	13,3	15,8	18,2	20,5	22,9	25,2

Dựa vào bảng giá trị, ta dự đoán rằng hàm số $f(x)$ đồng biến.

- Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta tính được một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

Giải:

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} - 1$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Mặt khác $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ nên $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

4.2 Phương trình $f(u) = f(v)$ với $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên D

- **Phương pháp:** Nếu $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên D thì $\forall u, v \in D, f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$
- **Một số ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1:

$$\text{Giải phương trình } 2x^3 - 3x + 1 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = x^2 + 2 + \sqrt[3]{x^2 + 2}. \quad (1)$$

Phân tích: Quan sát hai vế của phương trình, ta thấy phương trình (1) có dạng:

$$f(2x^3 - 3x + 1) = f(x^2 + 2) \text{ với } f(t) = t + \sqrt[3]{t}$$

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt[3]{t}$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(t) = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} > 0, \forall t \neq 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty; 0]$ và $[0; +\infty)$. Mặt khác $\forall t_1 < 0 < t_2, f(t_1) < 0 < f(t_2)$ nên suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow f(2x^3 - 3x + 1) = f(x^2 + 2) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x + 1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2: (Đề thi Cao đẳng năm 2012)

$$\text{Giải phương trình } 4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0. \quad (1)$$

Nhận xét: Phương trình (1) có thể giải theo phương pháp *bình phương hai vế*. Ở đây ta sẽ giải (1) theo phương pháp hàm số.

Phân tích: Quan sát hai vế của phương trình, ta thấy phương trình (1) chưa có dạng $f(u) = f(v)$.

Ta thử đặt $a = \sqrt{2x+1}$, suy ra $x+1 = \frac{a^2+1}{2}$, do đó $(x+1)\sqrt{2x+1} = \frac{a^2+1}{2} \cdot a = \frac{a^3+a}{2}$.

Đề ý rằng $4x^3 + x = \frac{8x^3 + 2x}{2} = \frac{(2x)^3 + 2x}{2}$. Như vậy, đến đây ta đã tìm được hàm $f(t) = t^3 + t$.

Giải:

Tập xác định: $D = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$(1) \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = (\sqrt{2x+1})^3 + \sqrt{2x+1}$$

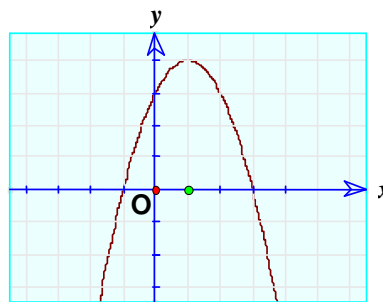
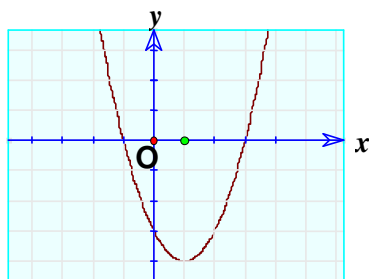
Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{2x+1}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

4.3 Phương trình $f(x) = 0$ với $f(x)$ là hàm lồi (hoặc lõm) trên D

- **Phương pháp:** Nếu đồ thị hàm số $f(x)$ lồi (hoặc lõm) trên D thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm trên D .
- **Ý nghĩa hình học:**



Nếu hàm số $f(x)$ lồi (hoặc lõm) trên D thì đồ thị của nó cắt trục hoành nhiều nhất là tại hai điểm.

• **Tính chất:**

- + Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $(a;b)$ và $f''(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ thì đồ thị của $f(x)$ lõm trên $(a;b)$.
- + Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $(a;b)$ và $f''(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ thì đồ thị của $f(x)$ lồi trên $(a;b)$.

- **Chú ý:** Sách giáo khoa hiện nay không học khái niệm hàm lồi, lõm nên khi giải bài tập thì ta phải dựa vào bảng biến thiên. Ví dụ dưới đây sẽ làm rõ hơn điều này.

• Ví dụ:

$$\text{Giải phương trình } x^2 - 2x + 7 + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+\sqrt{1+8x}}. \quad (1)$$

Phân tích: Dùng chức năng tính đạo hàm của máy tính cầm tay, ta tính $f''(x)$ của hàm số

$f(x) = x^2 - 2x + 7 + \sqrt{x+3} - 2\sqrt{1+8x} - \sqrt{1+\sqrt{1+8x}}$ tại 10 giá trị trên $\left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$ thì được kết quả sau:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f''(x) \approx$	41	3,4	2,5	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1

Dựa vào bảng giá trị, ta dự đoán rằng $f''(x) > 0, \forall x > -\frac{1}{8}$ nên hàm số $f(x)$ lõm trên $\left(-\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

• Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta tính được hai nghiệm là $x=1$ và $x=3$.

Giải:

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{8}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 7 + \sqrt{x+3} - 2\sqrt{1+8x} - \sqrt{1+\sqrt{1+8x}} = 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 7 + \sqrt{x+3} - 2\sqrt{1+8x} - \sqrt{1+\sqrt{1+8x}}$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

$$f'(x) = 2x - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x+3}} - \frac{8}{\sqrt{1+8x}} - \frac{2}{\sqrt{1+8x}\sqrt{1+\sqrt{1+8x}}}.$$

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{(x+3)^3}} + \frac{32}{\sqrt{(1+8x)^3}} + \frac{4}{(1+8x)\sqrt{(1+\sqrt{1+8x})^3}} + \frac{8}{\sqrt{(1+8x)^3}\sqrt{1+\sqrt{1+8x}}}$$

Vì $x+3 \geq -\frac{1}{8}+3 = \frac{23}{8} \Rightarrow 2 - \frac{1}{4\sqrt{(x+3)^3}} > 0$ nên $f''(x) > 0, \forall x > -\frac{1}{8}$.

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{1}{8}; +\infty\right)$. Mặt khác $f'(1) \cdot f'(2) < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất trên $\left(-\frac{1}{8}; +\infty\right)$, gọi nghiệm này là x_0 .

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{8}$	x_0	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Dựa vào bảng biến thiên, ta có đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành nhiều nhất là tại hai điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 0$ có tối đa là hai nghiệm.

Lại có $f(1) = f(3) = 0$ nên $x=1$ và $x=3$ chính là hai nghiệm của phương trình (1).

Giải các phương trình sau đây :

- $\sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} = 6$
- $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2\sqrt[3]{5x - x^3} \cdot x^2$
- $\sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x} = 5 - 4x$
- $\sqrt[3]{6x+5} = x^3 - 5x - 5$
- $2\sqrt[3]{2x-1} = 27x^3 - 27x^2 + 13x - 2$
- $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$
- $\sqrt{x^2+15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2+8}$
- $x^3 + 5x^2 + 3x + 2 = \sqrt[3]{x^2+10x+8}$
- $x = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+x}}$
- $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2+x+4} = \sqrt{x^2+x+5} + x$
- $(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}) = 4$
- $3x(2+\sqrt{9x^2+3}) + (4x+2)(1+\sqrt{1+x+x^2}) = 0$
- $\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} + 14 = \sqrt{(4+x)^3} + \sqrt{(4-x)^3}$
- $\sqrt{5+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{(5+x)(1-x)} = \frac{x}{2} + \sqrt{x+6}$
- $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{(2x-1)^2}{2}$
- $\sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$
- $(4x-1)[\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}] = 4x+8$
- $\sqrt{5x^3-1} + \sqrt[3]{2x-1} + x - 4 = 0$
- $\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-2x+3}$
- $\frac{x^3}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{x} - x$
- $\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x} + \sqrt{16-x^2} = 4$
- $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x^2+1} = \sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{x+1}$
- $\sqrt{x^2+15} + 2 = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2+8}$
- $\frac{x+3}{x^3+x} = (x+2)\sqrt{x+2}$
- $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} = 2\sqrt{3} + \sqrt{4-x}$

Trước hết, ta chứng minh định lý sau:

- **Định lý:** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(x_1; x_2)$ và phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trên khoảng $(x_1; x_2)$ thì $f(x)$ không đổi dấu trên khoảng $(x_1; x_2)$.
- **Chứng minh:** Giả sử $f(x)$ đổi dấu trên khoảng $(x_1; x_2)$, nghĩa là tồn tại $a; b \in (x_1; x_2)$ sao cho $a < b$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (a; b) \subset (x_1; x_2)$. Điều này trái giả thiết.

Vậy $f(x)$ không đổi dấu trên khoảng $(x_1; x_2)$.

Áp dụng định lý trên ta có thể đưa bài toán giải bất phương trình về bài toán giải phương trình.

- **Phương pháp:** Để giải bất phương trình vô tỷ $f(x) > 0, f(x) \geq 0, f(x) < 0, f(x) \leq 0$ ta làm như sau:

- ❖ Tìm tập xác định D của $f(x)$
- ❖ Giải phương trình $f(x) = 0$
- ❖ Lập bảng xét dấu của $f(x)$ trên D
- ❖ Dựa vào bảng xét dấu của $f(x)$ để suy ra tập nghiệm của bất phương trình.

- **Một số ví dụ:**

Ví dụ 1: (Đề thi Đại học khối D năm 2002)

Giải bất phương trình $(x^2 - 3x) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$ (*)

Giải:

Tập xác định: $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$

Xét hàm số $f(x) = (x^2 - 3x) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$ trên D .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Bảng xét dấu của $f(x)$ trên D :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có: (*) $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x \geq 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (*) là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

Ví dụ 2: (Đề thi Đại học khối B năm 2012)

Giải bất phương trình $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$ (*)

Giải:

Tập xác định: $D = [0; 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}; +\infty)$

Xét hàm số $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} - 3\sqrt{x}$ trên D .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} - 3\sqrt{x} = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$), ta có $x = t^2$. Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{t^4 - 4t^2 + 1} = -t^2 + 3t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -t^2 + 3t - 1 \geq 0 \\ 6t^3 - 15t^2 + 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{1}{2}.$$

- $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)
- $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Bảng xét dấu của $f(x)$ trên D :

x	0	$\frac{1}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	4	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-		-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có: (*) $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \vee x \geq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (*) là $S = [0; \frac{1}{4}] \cup [4; +\infty)$.

Ví dụ 3:

Giải bất phương trình $\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$ (*)

Giải:

Tập xác định: $D = (-1; 1)$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 - \frac{1}{1-x^2}$ trên D .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 - \frac{1}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow 3x\sqrt{1-x^2} - (1-x^2) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x\sqrt{1-x^2} = 2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2(1-x^2) = (2-x^2)^2 & (1) \\ x(2-x^2) > 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ đối chiếu với (2) ta được nghiệm là } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ và } x = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ trên khoảng $(-1;1)$, ta có:

		1	2		
x	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	1	
f(x)	-	0	+	0	-

$$(*) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right)$.

TÓM KẾT

Trên đây là một số phương pháp giải phương trình hay dùng trong các kỳ thi đại học và cao đẳng. Ngoài các phương pháp trên thì còn một số phương pháp khác như: lượng giác hóa, đánh giá hai vế, vectơ, hình học, v.v... Nhưng các phương pháp này chưa thấy xuất hiện trong các đề thi đại học của bộ Giáo dục và Đào tạo.

Bài toán giải phương trình là một bài toán khó, đòi hỏi phải có nhiều kỹ năng và kinh nghiệm. Do đó, ta cần nắm vững các phương pháp giải phương trình. Bên cạnh đó phải thường xuyên làm bài tập để rèn luyện kỹ năng và tư duy linh hoạt.

Khi gặp một tình huống khó khăn thì nên đặt câu hỏi: "Có những phương pháp, kỹ thuật nào khi giải phương trình? Ta đã sử dụng hết các phương pháp, kỹ thuật đó chưa?"

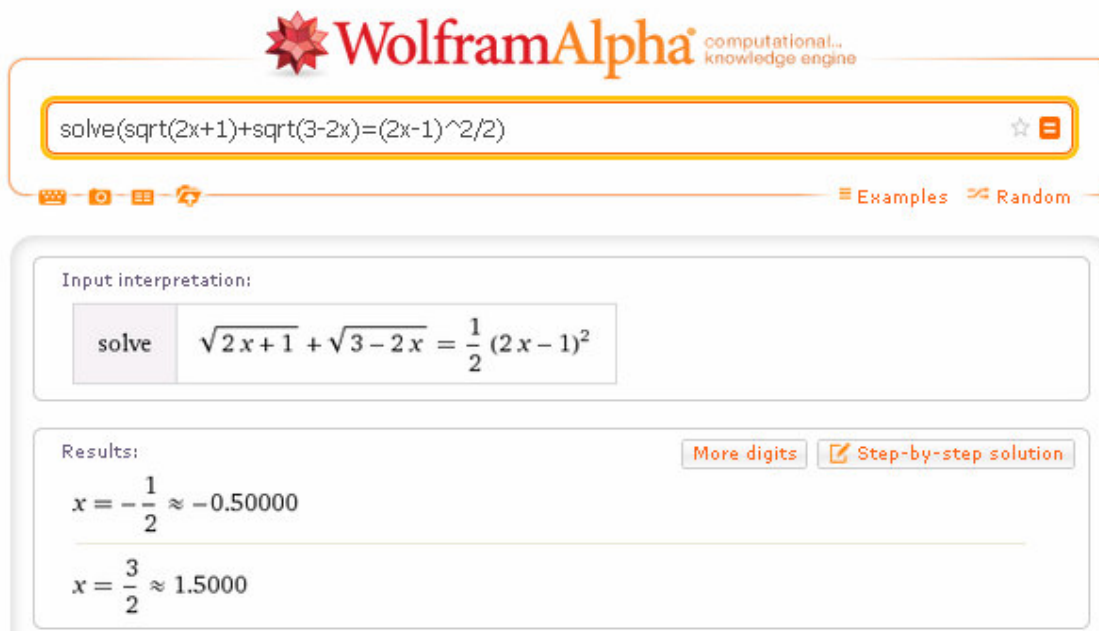
Nếu muốn tìm nghiệm của các phương trình trong phần BÀI TẬP thì ta có thể truy cập vào trang:

<http://www.wolframalpha.com/>

sau đó thực hiện câu lệnh theo cú pháp sau:

solve(f(x) = 0)

với $f(x) = 0$ là phương trình cần giải, rồi nhấn phím Enter (xem hình ảnh minh họa bên dưới).



WolframAlpha computational knowledge engine

solve(sqrt(2x+1)+sqrt(3-2x)=(2x-1)^2/2)

Input interpretation:

solve $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{1}{2}(2x-1)^2$

Results:

$x = -\frac{1}{2} \approx -0.50000$

$x = \frac{3}{2} \approx 1.5000$

More digits Step-by-step solution

Cuối cùng, mong rằng tài liệu này sẽ giúp ích một phần nào đó cho việc học tập của bạn đọc.