

ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ VÀO GIẢI TOÁN THPT*Giáo viên : Nguyễn Minh Tiến***KIẾN THỨC CƠ BẢN****I. Tính đơn điệu của hàm số****1. Định nghĩa**

- ✓ Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trong khoảng $(a; b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trong khoảng $(a; b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng $(a; b)$, ta nói hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a; b)$.

2. Điều kiện để hàm số đơn điệu trên một khoảng

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$

- ✓ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trong khoảng $(a; b)$
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trong khoảng $(a; b)$
- ✓ Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$
- ✓ Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$

II. Các tính chất và định lý**1. Định lý**

Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu và liên tục trên khoảng D thì ta có với mọi $x, y \in D : f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

2. Các bổ đề và tính chất

- ✓ Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu và liên tục trên khoảng D thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc D
- ✓ Nếu hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và đơn điệu ngược chiều trên khoảng D thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng D
- ✓ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$ thì với mọi $x, y \in (a; b)$ ta có $f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y$ ($x > y$)

ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀO GIẢI TOÁN

1. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình và bất phương trình

Một số dạng phương trình biến đổi thường gặp

✓ Dạng 1 : $x^3 - b = a \cdot \sqrt[3]{ax + b}$ với $a > 0$

Phương trình $\Leftrightarrow x^3 + ax = (ax + b) + a \cdot \sqrt[3]{ax + b}$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + at$

✓ Dạng 2 : $ax^3 + bx^2 + cx + d = m \cdot \sqrt[3]{ex + f}$

Phương trình $\Leftrightarrow m(px + u)^3 + n(px + u) = m(ex + f) + n\sqrt[3]{ex + f}$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = mt^3 + nt$

✓ Dạng 3 : $ax^2 + bx + c = \alpha\sqrt{ex + d}$

Phương trình $\Leftrightarrow m(px + u)^2 + n(px + u) = m(ex + d) + n\sqrt{ex + d}$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = mt^2 + nt$ với $t \geq 0$

Ví dụ 1 : Giải phương trình

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (3x + 2)\sqrt{3x + 1}$$

(HSG - Quảng Bình - 2010)

Lời giải : Điều kiện xác định : $x \geq -\frac{1}{3}$

Ta có pt $\Leftrightarrow (x + 1)^3 + (x + 1) = [(3x + 1) + 1]\sqrt{3x + 1}$

$\Leftrightarrow (x + 1)^3 + (x + 1) = (\sqrt{3x + 1})^3 + \sqrt{3x + 1}$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t$ với $t \geq 0$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với mọi $t \geq 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$

Mà phương trình có dạng $f(x + 1) = f(\sqrt{3x + 1}) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta có phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0; x = 1$

Ví dụ 2 : Giải phương trình

$$(2x + 1) \left(2 + \sqrt{4x^2 + 4x + 4} \right) + 3x \left(2 + \sqrt{9x^2 + 3} \right) = 0$$

Lời giải :

Ta có pt $\Leftrightarrow (2x + 1) \left(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3} \right) = (-3x) \left(2 + \sqrt{(-3x)^2 + 3} \right) (*)$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t \left(2 + \sqrt{t^2 + 3} \right)$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = 2 + \sqrt{t^2 + 3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Phương trình có dạng $f(2x + 1) = f(-3x) \Leftrightarrow 2x + 1 = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{5}$

Ví dụ 3 : Giải phương trình

$$8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x - 5}$$

Nhận xét : Ta đưa hai vế của phương trình về dạng $f[g(x)] = f[h(x)]$ trong đó $f(t)$ là hàm đặc trưng có dạng $f(t) = mt^3 + nt$. Ta cần đồng nhất sao cho biểu thức vế phải của phương trình có dạng $m(\sqrt[3]{3x - 5})^3 + n(\sqrt[3]{3x - 5})$ và so với vế phải ta có thể chọn luôn $n = 1$

Công việc còn lại là tìm các hệ số sao cho $m(px + u)^3 + (px + u) = m(\sqrt[3]{3x - 5})^3 + (\sqrt[3]{3x - 5})$

Dễ thấy $(2x)^3 = 8$ nên ta có $mp^3 = 8$ vì m, p thường là các số nguyên nên ta có thể chọn $m = 1; p = 2$ hoặc $m = 8; p = 1$

Nếu $m = 1; p = 2$ thì $f(t) = t^3 + t$ do đó phương trình cần viết về dạng

$$m(px + u)^3 + (px + u) = m(\sqrt[3]{3x - 5})^3 + (\sqrt[3]{3x - 5})$$

$$\Leftrightarrow (2x + u)^3 + (2x + u) = (\sqrt[3]{3x - 5})^3 + \sqrt[3]{3x - 5}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12ux^2 + (6u^2 - 1)x + u^3 + u + 5 = \sqrt[3]{3x - 5}$$

Đồng nhất hai vế ta được $u = -3$. Kết quả ra chẵn nên chúng ta không cần xét trường hợp còn lại

Lời giải tham khảo :

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (2x - 3)^3 + (2x - 3) = (\sqrt[3]{3x - 5})^3 + (\sqrt[3]{3x - 5})$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t$ trên tập $\mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Nên ta có phương trình trở thành $f(2x - 3) = f(\sqrt[3]{3x - 5}) \Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt[3]{3x - 5}$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$$

Ví dụ 4 : Giải phương trình

$$x^3 - 6x^2 + 12x + 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

(Đề đề nghị Olympic 30/4/2009)

Ý tưởng : Cũng giống như ví dụ trên chúng ta đưa phương trình về dạng

$$m(px + u)^3 + n(px + u) = m(-x^3 + 9x^2 - 19x + 11) + n(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11})$$

$$\Leftrightarrow (mp^3 + m)x^3 + (3mup^2 - 9m)x^2 + (3mpu^2 + p + 19m)x + mu^3 + u - 11m = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

Đồng nhất hai vế theo phương trình ta được
$$\begin{cases} mp^3 + m = 1 \\ 3mp^2u - 9m = -6 \\ 3mpu^2 + p + 19m = 12 \\ mu^3 + u - 11m = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ m = \frac{1}{2} \\ u = -1 \end{cases}$$

Lời giải tham khảo :

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^3 + (x-1) = \frac{1}{2}(-x^3 + 9x^2 - 19x + 11) + \left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right)$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = \frac{1}{2}t^3 + t$ trên tập $\mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1 > 0$ với mọi t suy ra hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Phương trình có dạng $f(x-1) = f\left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right)$

$\Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \Leftrightarrow x = 1; x = 2; x = 3$

Kết luận phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 1; x = 2; x = 3$

Ví dụ 5 : Giải phương trình

$$\sqrt{3x^3 + 3x^2 + 6x + 16} = 2\sqrt{3} + \sqrt{4-x}$$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện xác định : $x \in [-2; 4]$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{3}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2; 4]$

Hàm số liên tục và có $f'(x) = \frac{3(x^2 + x^2 + 1)}{\sqrt{3x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0$ với mọi $x \in (-2; 4)$

Nên hàm số đồng biến trên $(-2; 4) \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 2\sqrt{3}$ có nghiệm duy nhất trên $(-2; 4)$

Mà $f(1) = 2\sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

Ví dụ 6 : Giải bất phương trình

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} \leq 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$$

Lời giải tham khảo : Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$

Khi đó bpt $\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3) \leq 4$

✓ Với $(\sqrt{2x-1} - 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ bpt luôn đúng

✓ Với $x > 5$

Xét hàm số $f(x) = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3)$ liên tục trên khoảng $(5; +\infty)$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)(\sqrt{2x-1} - 3) + \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}} > 0$ với mọi $x > 5$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(5; +\infty)$ và ta có $f(2) = 4$

$\Rightarrow \text{bpt} \Leftrightarrow f(x) \leq f(7) \Leftrightarrow x \leq 7$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; 7\right]$

Ví dụ 7 : Giải bất phương trình

$$3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6$$

Lời giải tham khảo : Điều kiện $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$

$$\text{bpt} \Leftrightarrow 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} \leq 2x + 6 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) (*)$$

Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$ liên tục trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{3-2x}} - \frac{5}{(\sqrt{2x-1})^3} < 0 \text{ với mọi } x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến trên } \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

Xét hàm $g(x) = 2x + 6$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ là hàm đồng biến và $f(1) = g(1) = 8$

✓ Nếu $x \geq 1$ ta có $f(x) < f(1) = 8 = g(1) < g(x)$ bpt luôn đúng

✓ Nếu $x < 1$ ta có $f(x) > f(1) = 8 = g(1) > g(x)$ bpt vô nghiệm

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[1; \frac{3}{2}\right]$

Ví dụ 8 : Giải bất phương trình

$$8x^3 + 2x < (x+2)\sqrt{x+1}$$

Lời giải tham khảo : Điều kiện $x \geq -1$

$$\text{bpt} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x < (\sqrt{x+1})^3 + (\sqrt{x+1})$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t$ với $t \geq 0$

Ta có $f(t)$ liên tục và $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với mọi $t \geq 0$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến với $t \geq 0$

$$\text{bpt có dạng } f(2x) < f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \leq x < \frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-1; \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$

2. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải hệ phương trình

Ví dụ 1 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(Khối A - 2012)

Phân tích và định hướng : Ở phương trình (1) ta thấy bậc của x và y cùng là bậc 3 nên khả năng sử dụng đồng biến và nghịch biến là rất cao. Do hai vế đều có cùng hạng tử bậc hai nên ta cần tìm những số thỏa mãn $m(px + u)^3 + n(px + u) = m(ky + d)^3 + n(ky + d)$ (1').

Ta có các hệ số của x^3 và y^3 trong (1') thỏa mãn $\begin{cases} mp^3 \sim 1 \\ nk^3 \sim 1 \end{cases} \Rightarrow$ có thể chọn $m = 1, p = 1, k = 1$ lúc đó

$$(1') \Leftrightarrow (x + u)^3 + n(x + u) = (y + d)^3 + n(y + d) \quad (2')$$

ta lại có các hệ số của x^2 và y^2 trong khai triển (2') thỏa mãn $\begin{cases} 3u = -3 \\ 3d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \\ d = 1 \end{cases}$. Lúc đó

$$(2') \Leftrightarrow (x - 1)^3 + n(x - 1) = (y + 1)^3 + n(y + 1) \quad (3')$$

Chọn các hệ số của x trong (3') ta được $n = -12$

$$\text{Do đó } (3') \Leftrightarrow (x - 1)^3 - 12(x - 1) = (y + 1)^3 - 12(y + 1) \quad (4')$$

Lưu ý từ phương trình (2) ta được

$$(2) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq y + \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y + 1 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Lời giải tham khảo :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^3 - 12(x - 1) = (y + 1)^3 - 12(y + 1) \quad (1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ có dạng } f(x - 1) = f(y + 1) \quad (3)$$

$$\text{Từ (2)} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq y + \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y + 1 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 - 12t$ trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$$\text{Ta có } f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4)} \Rightarrow f(x - 1) = f(y + 1) \Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow x = y + 2 \quad (5)$$

Thay (5) vào (2) ta được $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$ và với $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

Kết luận hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \right\}$

Ví dụ 2 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 & (1) \\ (x-1)^4 = y & (2) \end{cases}$$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x \geq 1; y \geq 0$

Thay (2) vào (1) ta được $\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8 - x^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - 2x + 9 \quad (3)$

Nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (3)

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ trên $[1; +\infty)$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

Xét hàm số $g(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 9$ trên đoạn $[1; +\infty)$

Ta có $g'(x) = -3x^2 + 2x - 2 < 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$

Do đó $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3)

Thay $x = 2$ vào (2) ta được nghiệm duy nhất của hệ $(x; y) = (2; 1)$

Ví dụ 3 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6 & (1) \\ x^2y(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) = x + \sqrt{x^2 + 1} & (2) \end{cases}$$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x \geq 0$

Do $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ nên ta có $\Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ và từ phương trình (2) $\Rightarrow x^2y(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) > 0 \Rightarrow y > 0$

Chia hai vế của phương trình (2) cho x^2 ta được

$$(2) \Leftrightarrow 2y + 2y\sqrt{4y^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (2y) + (2y)\sqrt{(2y)^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$ với mọi $t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow 2y = \frac{1}{x}$ (*)

Thay vào (1) ta được $x^3 + x + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6$ (5)

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x + 2(x^2 + 1)\sqrt{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có

$f'(x) = 3x^2 + 1 + 4x\sqrt{x} + \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} > 0$ với mọi $x > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến (6)

Từ (5) và (6) suy ra $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (5)

Thay $x = 1$ vào (*) ta được nghiệm duy nhất của hệ phương trình là $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$

Ví dụ 4 : Giải phương trình

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases}$$

(Khối A - 2010)

Lời giải tham khảo : Điều kiện : $x \leq \frac{3}{4}; y \leq \frac{5}{2}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x = (5 - 2y + 1)\sqrt{5 - 2y}$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = (t^2 + 1)t$ trên khoảng $[0; +\infty)$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với mọi $t \in [0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trong khoảng $[0; +\infty)$

Phương trình (1) có dạng $f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y}) \Rightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}$

Thế vào phương trình (2) ta được $4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7$ (3)

Nhận thấy $x = 0$ và $x = \frac{3}{4}$ không phải là nghiệm của phương trình (3).

Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x}$ trên khoảng $\left(0; \frac{3}{4}\right)$

Ta có $f'(x) = 8x - 8x\left(\frac{5}{2} - 2x^2\right) - \frac{4}{3 - 4x} = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{3 - 4x} < 0$ với mọi $x \in \left(0; \frac{3}{4}\right) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến

Mà $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7 \Rightarrow$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$

Thay vào phương trình (1) ta suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1 : (B - 2010) Giải phương trình : $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

Đáp số : $x = 5$

Bài 2 : (Cao đẳng - 2012) Giải phương trình : $4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0$

Đáp số : $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Bài 3 : Giải phương trình : $(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11} + 3x(1+\sqrt{9x^2+2}) + 5x+3 = 0$

Đáp số : $x = -\frac{3}{5}$

Bài 4 : Giải phương trình : $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x-x^2}$

Đáp số : $x = \frac{17 \pm \sqrt{97}}{12}$

Bài 5 : Giải phương trình : $2(x-2)(\sqrt[3]{4x-4} + \sqrt{2x-2}) \geq 3x-1$

Đáp số : $x \geq 3$

Bài 6 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x} + (3y-20)\sqrt{6-y} = 0 \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \end{cases}$

Đáp số : $(x; y) = (5; 4)$

Bài 7 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 2y + 1 = 0 \\ (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \end{cases}$

Đáp số : $(x; y) = (1; 1)$

Bài 8 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases}$

Đáp số : $(x; y) = (-3; 2)$

Bài 9 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(4y^2+1) + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6 \\ x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1}) = x + \sqrt{x^2+1} \end{cases}$

Đáp số : $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$

Bài 10 : Giải hệ phương trình $\begin{cases} (\sqrt{x^2+1} - 4x^2y + x)(\sqrt{4y^2+1} + 1) = 8x^2y^3 \\ x^2y - x + 2 = 0 \end{cases}$

Đáp số : $(x; y) = \left(4; \frac{1}{8}\right)$