BA PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

TS. Phạm Thị Bạch Ngọc
Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

I. Sử dụng tính chất tiếp tuyến của hàm số

Ý tưởng chính của phương pháp là sử dụng công thức phương trình tiếp tuyến của một đồ thị hàm số để tìm một biểu thức trung gian trong các đánh giá bất đẳng thức.

Tính chất. *Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên K. Khi đó tiếp tuyến tại một điểm $x_0 \in K$ có phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ thường nằm trên (hoặc nằm dưới) đồ thị hàm số f trên K, nên ta có*

$f(x) \le f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ *(hoặc $f(x) \ge f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$) với mọi $x \in K$.*

Từ tính chất này, ta thấy với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le f'(x_0)(x_1 + x_2 + ... + x_n - nx_0) + nf(x_0)$$

hoặc $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \ge f'(x_0)(x_1 + x_2 + ... + x_n - nx_0) + nf(x_0)$.

Như vậy, nếu một bất đẳng thức có dạng ''tổng hàm'' như ở vế trái của bất đẳng thức trên, và có giả thiết $x_1 + x_2 + ... + x_n = nx_0$ với đẳng thức xảy ra khi tất cả các biến x_i đều bằng nhau và bằng x_0, thì ta có thể hi vọng chứng minh nó bằng phương pháp tiếp tuyến**.**

✪Ví dụ 1. (FRANCE – 2007)

Cho a, b, c, d là các số thực dương sao cho $a + b + c + d = 1$.

Chứng minh rằng $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \ge (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $a, b, c, d \in (0;1)$. Đặt $f(x) = 6x^3 - x^2$, với $x \in (0;1)$

Khi đó bất đẳng thức trở thành $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \ge \frac{1}{8}$.

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Vì vậy ta tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm $M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{32}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến đó là $y = f'\left(\frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{32} = \frac{5x - 1}{8}$.

Bằng cách phác thảo đồ thị hàm số ta nhận thấy tiếp tuyến tại M nằm dưới đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong khoản (0 ; 1) nên định hướng chứng minh BĐT

$$f(x) \ge \frac{5x - 1}{8},\ x \in (0;1) \Leftrightarrow 6x^3 - x^2 \ge \frac{5x - 1}{8} \Leftrightarrow 48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (4x - 1)^2 (3x + 1) \ge 0, \forall x \in (0;1)$$

Do đó $f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+f\left(d\right)\ge\dfrac{5a+5b+5c+5d-4}{8}=\dfrac{1}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$.(đpcm)

✪Ví dụ 2. (USA – 2003) *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{\left(2a+b+c\right)^2}{2a^2+\left(b+c\right)^2}+\frac{\left(2b+c+a\right)^2}{2b^2+\left(c+a\right)^2}+\frac{\left(2c+a+b\right)^2}{2c^2+\left(a+b\right)^2}\le 8.$$

Lời giải

BĐT có tính thuần nhất. Không mất tổng quát, ta có thể giả sử rằng $a+b+c=1$. Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{\left(a+1\right)^2}{2a^2+\left(1-a\right)^2}+\frac{\left(b+1\right)^2}{2b^2+\left(1-b\right)^2}+\frac{\left(c+1\right)^2}{2c^2+\left(1-c\right)^2}\le 8.\text{ với } a,b,c\in\left(0;1\right).$$

Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)^2}{2x^2+\left(1-x\right)^2}=\dfrac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}$, với $x\in\left(0;1\right)$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)\le 8$

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ tại điểm $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{16}{3}\right)$ là $y=f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{16}{3}=\dfrac{12x+4}{3}$.

Bằng trực quan hình học ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm dưới tiếp tuyến. trong khoảng (0 ; 1). Gợi ý ta chứng minh BĐT $f\left(x\right)\le\dfrac{12x+4}{3},\forall x\in\left(0;1\right)$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}\le\frac{12x+4}{3}\Leftrightarrow 36x^3-15x^2-2x+1\ge 0\Leftrightarrow\left(3x-1\right)^2\left(4x+1\right)\ge 0,\ \forall x\in(0;1).$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên là đúng.

Suy ra $f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)\le\dfrac{12\left(a+b+c\right)+12}{3}=8$ (đpcm).

✪Ví dụ 3. (NHẬT BẢN – 1997)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh có tính thuần nhất, không mất tổng quát, giả sử $a+b+c=3$.Khi đó $a,b,c\in\left(0;3\right)$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{\left(3-2a\right)^2}{\left(3-a\right)^2+a^2}+\frac{\left(3-2b\right)^2}{\left(3-b\right)^2+b^2}+\frac{\left(3-2c\right)^2}{\left(3-c\right)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2a^2-6a+9}+\frac{1}{2b^2-6b+9}+\frac{1}{2c^2-6c+9}\le\frac{3}{5}$$

Hay $f(a)+f(b)+f(c)\le\dfrac{3}{5}$ với $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x^2-6x+9}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $x=1$ của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-6x+9}$

là $y=f'(1)(x-1)+f(1)=\dfrac{2}{25}(x-1)+\dfrac{1}{5}=\dfrac{2x+3}{25}$.

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{2x^2-6x+9}\le\dfrac{2x+3}{25},\forall x\in(0;3)$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^3+x^3+1-3x^2\right)\ge 0,\forall x\in(0;3)$$

Theo BĐT AM – GM thì $x^3+x^3+1\ge 3x^2$ nên bất đẳng thức trên đúng.

Do đó suy ra $f(a)+f(b)+f(c)\le\dfrac{(2a+3)+(2b+3)+(2c+3)}{25}=\dfrac{3}{5}$.

✪**Ví dụ 4.** *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Vì *a, b, c* là ba cạnh của một tam giác nên $a,b,c\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\right)\le 9\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le 9$$

Với $f(x)=\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5x-1}{x-x^2},x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. Vì vậy ta tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm $M\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ là $y=18x-3$.

Ta sẽ chứng minh

$$f(x)=\frac{5x-1}{x-x^2}\le 18x-3,\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow(3x-1)^2(2x-1)\le 0,\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right).$$

Bất đẳng thức này đúng với $\forall x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Do đó $f(a)+f(b)+f(c)\le 18(a+b+c)-9=9$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$, do đó dấu bằng xảy ra của bất đẳng thức ban đầu là $a=b=c$.

II. Sử dụng tính thuần nhất

Một bất đẳng thức (đẳng thức hay biểu thức) được gọi là có tính thuần nhất đối với các biến $a_1,a_2,...,a_n$ nếu khi thay a_1 bởi ka_1, a_2 bởi ka_2, ..., a_n bởi ka_n thì bất đẳng thức (đẳng thức hay biểu thức) đó không thay đổi, với *k* là số thực tùy ý, khác 0.

Một bất đẳng thức (hay một biểu thức) có tính thuần nhất đối với các biến $a_1, a_2, ..., a_n$, khi giải có thể đặt biến phụ để làm giảm biến trong bất đẳng thức (hay một biểu thức) đó nhằm đơn giản hóa bài toán.

✪ Ví dụ 5. (Đề thi Đại học khối A năm 2009)

Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z *thoả mãn* $x(x+y+z)=3yz$, *ta có* $(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(x+z)(y+z)\le 5(y+z)^3$.

Nhận xét. Ta có

$x(x+y+z)=3yz \Leftrightarrow x^2+xy+xz=3yz \Leftrightarrow (y+z)^2=(x+y)^2+(x+z)^2-(x+y)(x+z)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\left(\frac{x+y}{y+z}\right)^3+\left(\frac{x+z}{y+z}\right)^3+3\left(\frac{x+y}{y+z}\right)\left(\frac{x+z}{y+z}\right)\le 5.$

Đặt $a=\frac{x+y}{y+z}, b=\frac{x+z}{y+z}$,

Bài toán trở thành**:** *Cho các số thực dương* a,b,c *thoả mãn* $a^2+b^2-ab=1$. *Chứng minh rằng* $a^3+b^3+3ab\le 5$.

Lời giải. Ta có $a^2+b^2=1+ab \Rightarrow a^2+b^2\le 1+\frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow a^2+b^2\le 2.$

Mặt khác $4ab\le (a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\le 4 \Rightarrow a+b\le 2, ab\le 1$.

Khi đó $a^3+b^3+3ab=(a+b)(a^2+b^2-ab)+3ab=a+b+3ab\le 5$. (đpcm)

✪ Ví dụ 6. (Đề thi Đại học khối A năm 2013)

Cho các số thực dương a,b,c *thỏa mãn điều kiện* $(a+c)(b+c)=4c^2$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

Nhận xét. Ta có $(a+c)(b+c)=4c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)=4$.

Biểu thức $P=\frac{32.\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3}+\frac{32.\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3}-\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2}$.

Đặt $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$.

Bài toán trở thành: *Cho các số thực dương* x, y, z *thoả mãn* $xy+x+y=3$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}$.

Lời giải. Ta có

$$P=\left(\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{32y^3}{(x+3)^3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{x^2+y^2}\;-2\ge 6\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)-2-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=4-3xy-\sqrt{x^2y^2-8xy+9}.$$

Đặt $t=xy$, từ giả thiết suy ra $t^2+2t-3\le 0\Rightarrow t\in(0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=4-3t-\sqrt{t^2-8t+9}$ trong khoảng (0 ; 1] có

$$f'(t)=-3+\frac{4-t}{\sqrt{t^2-8t+9}}=\frac{4-t-3\sqrt{t^2-8t+9}}{\sqrt{t^2-8t+9}}$$

$=\dfrac{-2(t-16)^2+447}{\sqrt{t^2-8t+9}\left(4-t+3\sqrt{t^2-8t+9}\right)}<0,\forall t\in(0;1]\Rightarrow f(t)\ge f(1)=1-\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $1-\sqrt{2}$, đạt khi $a=b=c$.

✪ **Ví dụ 7.** *Cho các số thực $a,b,c\in[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{a^2+4ac+c^2}{a^2+c^2}+\dfrac{b^2+2bc-15c^2}{bc-4c^2}-a^2+3a$.*

Nhận xét. $P=\dfrac{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+4.\dfrac{a}{c}+1}{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+1}+\dfrac{\left(\dfrac{b}{c}\right)^2+2.\dfrac{b}{c}-15}{\dfrac{b}{c}-4}-\;a^2+3a$.

Đặt $x=\dfrac{a}{c}, y=\dfrac{b}{c}, z=a$ thì $x, y\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ và $z\in[1;2]$.

Bài toán trở thành: *Cho các số thực dương $x, y\in\left[\dfrac{1}{2};2\right], z\in[1;2]$. Chứng minh rằng $P=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}+\dfrac{y^2+2y-15}{y-4}-z^2+3z$.*

Lời giải.

Khảo sát ba hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}, x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$; $g(y)=\dfrac{y^2+2y-15}{y-4}, y\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ và $h(z)=-z^2+3z, z\in[1;2]$. Suy ra $\text{Max}P=\dfrac{37}{4}\Leftrightarrow x=1;\ y=1;\ z=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=b=c=\dfrac{3}{2}$.

$\text{Min}P=\dfrac{81}{10}\Leftrightarrow\ x=y=2, z=1\Rightarrow a=b=2, c=1$.

✪ **Ví dụ 8.** *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\ge 1.$$

Nhận xét. Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{\frac{a^2}{bc}}{\frac{a^2}{bc}+1+\frac{b^2}{ca}}+\frac{\frac{b^2}{ca}}{\frac{b^2}{ca}+1+\frac{c^2}{ab}}+\frac{\frac{c^2}{ab}}{\frac{c^2}{ab}+1+\frac{a^2}{bc}}\geq 1.$$

Đặt $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$,

Bài toán trở thành**:** *Cho các số thực dương* x, y, z. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x^2}{x^2+xz+yz}+\frac{y^2}{y^2+yz+zx}+\frac{z^2}{z^2+zy+xy}\geq 1.$$

Áp dụng BĐT

$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\geq(a+b+c)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Ta có

$$\frac{x^2}{x^2+xz+yz}+\frac{y^2}{y^2+yz+zx}+\frac{z^2}{z^2+zy+xy}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+xz+yz+y^2+yz+zx+z^2+zy+xy}=1.$$

Điều phải chứng minh.

Chú ý. Khi gặp các biểu thức có dạng $P=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, trong đó $f(x,y)$, $g(x,y)$ là các biểu thức đẳng cấp thì ta có thể đặt $x=ty\ (y\neq 0)$ hay $t=\frac{x}{y}$ để đưa *P* về hàm một biến *t*.

✪**Ví dụ 9.** Cho x, y thỏa mãn $x, y>0; xy\leq y-1$.Tìm GTLN của biểu thức

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}$$ **(Đề thi ĐH khối D năm 2013)**

Lời giải. Do $x, y>0; xy\leq y-1 \Rightarrow 0<\frac{x}{y}\leq\frac{y-1}{y^2}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$, suy ra $0<t\leq\frac{1}{4}$. Ta có $P=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}\ \ (0<t\leq\frac{1}{4})$; $f'(t)=\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}-\frac{1}{2(t+1)^2}$

Với $0<t\leq\frac{1}{4}$ thì

$$t^2-t+3=t(t-1)+3<3; t+1>1\Rightarrow\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}>\frac{7-3t}{6\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{2(t+1)^2}>-\frac{1}{2}.$$

Suy ra $f'(t) > \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} > 0$, tức là hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Do đó $P = f(t) \le f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$. Khi $x = \frac{1}{2}, y = 2$ thì $P = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$.

Vậy GTLN của *P* là $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$.

III. Phương pháp tham số hoá

Khi gặp các hàm số nhiều biến ta đi khảo sát hàm số theo một biến, các biến còn lại xem như là tham số.

Việc chứng minh bất đẳng thức với biến số trong một đoạn nào đó, ta quy về chứng minh một bất đẳng thức đơn giản hơn ứng với biến số nhận tại một vài giá trị cụ thể (thường là các điểm nút của đoạn đó).

Nhận xét 1. Cho $f(x)=mx+n$. Khi đó ta có

1) $\min\{f(a), f(b)\} \le f(x) \le \max\{f(a), f(b)\}$ với mọi $x \in [a;b]$.

2) Nếu $f(a) \ge 0; f(b) \ge 0$ thì $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [a;b]$.

3) Nếu $f(a) \le 0; f(b) \le 0$ thì $f(x) \le 0$ với mọi $x \in [a;b]$.

Nhận xét 2. Cho $f(x)=mx^2+nx+p\ (m \ne 0)$. Khi đó $f(x)$ nhận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại $x = a$ hoặc $x = b$ hoặc $x = -\frac{n}{2m}$.

Nhận xét 3.

1) Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $[a ; b]$ (tức là $f''(x) < 0$ trên $[a ; b]$) thì $f(x) \ge \min\{f(a); f(b)\}$ với mọi $x \in [a;b]$..

2) Nếu $f(x)$ là hàm lõm trên $[a ; b]$ (tức là $f''(x) > 0$ trên $[a ; b]$) thì $f(x) \le \max\{f(a); f(b)\}$ với mọi $x \in [a;b]$.

✪**Ví dụ 10**. *Cho x, y, z, t thuộc* [0 ; 1]. *Chứng minh rằng*

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1-t) + x + y + z + t \ge 1.$$

Lời giải. Biến đổi BĐT cần chứng minh thành

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1-t) + x + y + z + t - 1 \ge 0.$$

Coi vế trái là đa thức dạng $f(x) = mx + n$. Theo Nhận xét 1 thì $f(x) \ge \min\{f(0); f(1)\}$ với mọi $x \in [0;1]$.

Ta có $f(1) = y+z+t \ge 0$; $f(0) = (1-y)(1-z)(1-t) + y + z + t - 1$.

Xét hàm $g(y) := f(0)$ thì $g(y) \ge \min\{g(0) ; g(1)\}$ với mọi $y \in [0 ; 1]$.

Ta có $g(1) = z + t \ge 0$; $g(0) = (1-y)(1-z)(1-t) + z + t - 1 = zt \ge 0$. Do đó $g(y) \ge 0$ với mọi $y \in [0 ; 1]$. Từ đó suy ra $f\,x) \ge 0$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $x = 1$; $y = z = 0$.

✪ **Ví dụ 11**. *Cho ba số dương x, y, z thoả mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng*

$$xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$x(y + z) + yz - 2xyz - \frac{7}{27} \le 0.$$

Từ y + z = 1 − x suy ra

$$yz(1 - 2x) + x(1 - x) - \frac{7}{27} \le 0.$$

Nhận thấy $0 \le yz \le \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}$. Đặt yz = t, xét hàm số

$f(t) = t(1-2x) + x(1-x) - \frac{7}{27}$ trên đoạn $\left[0; \frac{(1-x)^2}{4}\right]$. Theo nhận xét 1 thì

$$f(t) \le \max\left\{f(0); f\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right)\right\}$$

mà $f(0) = x(1-x) - \frac{7}{27} \le 0$ với mọi x thuộc [0 ; 1]. Từ đó suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

✪ **Ví dụ 12**. *Cho các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng* $4(x^3+y^3+z^3)+15xyz \ge 1$.

Lời giải. Ta có

$$4(x^3+y^3+z^3)+15xyz-1 = 4\left((x+y)^3 - 3xy(x+y)\right)+4z^3+15xyz-1$$

$$= 4\left((1-z)^3 - 3xy(1-z)\right)+4z^3+15xyz-1$$

$$= xy(27z-12)+4z^3+4(1-z)^3-1.$$

.

Từ giả thiết suy ra $0 \le xy \le \frac{x^2+y^2}{2} \le \frac{1-z^2}{4}$. Đặt xy = t, xét

$f(t) = t(27z-12)+4z^3+4(1-z)^3-1.$ với $t \in \left[0; \frac{(1-z)^2}{4}\right]$. Ta có

$f(0) = 3(2z-1)^2 \ge 0$;

$f\left(\frac{(1-z)^2}{4}\right) = \frac{(1-z)^2}{4}(27z-12)+3-12z+12z^2 = \frac{3z}{4}(3z-1)^2 \ge 0.$ Vậy $f(t) \ge 0$ với

$t \in \left[0; \frac{(1-z)^2}{4}\right]$. Suy ra BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

✪ **Ví dụ 13.** *Cho các số a, b, c không âm. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \le \max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2; (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2; (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}.$$

Lời giải. Do vai trò *a, b, c* như nhau, không giảm tổng quát giả sử $a \le b \le c$. Ta cần chứng minh

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \le \left(\sqrt{a} - \sqrt{c}\right)^2$$

Đặt $f(x) = \frac{a+x+c}{3} - \sqrt[3]{acx} - \left(\sqrt{a} - \sqrt{c}\right)^2$. Khi đó $f''(x) = \frac{2}{9} \cdot \frac{a^2c^2}{\sqrt[3]{x^5a^5c^5}} > 0.$ nên

$f(x)$ lõm trên $[a\ ;\ c]$. Theo tính chất 3 thì $f(x) \le \max\{f(a)\ ;\ f(c)\}$.

$$f(a) = -\frac{a}{3} - \frac{2c}{3} - \sqrt[3]{a^2c} + 2\sqrt{ac} = -\frac{1}{3}\left(a + c + c + \sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{a^2c}\right) + 2\sqrt{ac}$$
$$\le -2\sqrt{ac} + 2\sqrt{ac} = 0.$$

Vì vậy $f(a) \le 0$. Tương tự $f(c) \le 0$. Do đó $f(x) \le 0$ với mọi x thuộc $[a\ ;\ c]$.

Suy ra đpcm,

✪ **Ví dụ 14**. *Cho các số a, b, c thuộc* [0 ; 1]. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1.$$

Lời giải. Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó

VT $\le \frac{a+b+c}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c) - 1$ với mọi thuộc [0 ; 1].

Đặt $f(x) = \frac{x+b+c}{b+c+1} + (1-x)(1-b)(1-c) - 1$ thì $f(1) = 0$

$$f(0) = \frac{b+c}{b+c+1} + (1-b)(1-c) - 1 = \frac{bc(b+c) - (b^2+c^2) - bc}{b+c+1}$$
$$\le \frac{(b^2+c^2)\left(\frac{b+c}{2} - 1\right) - bc}{b+c+1} < 0.$$

Theo Tính chất 1 thì VT ≤ 0. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

✪ **Ví dụ 15.** *Cho x, y, z, t thuộc* [0 ; 1]. *Chứng minh rằng*

$$x^2y + y^2z + z^2t + t^2x - \left(xy^2 + yz^2 + zt^2 + tx^2\right) \le \frac{8}{27}.$$

Lời giải. Giả sử $y = \max\{x, y, z, t\}$. Đặt vế trái là $f(x)$. Ta có

$$f(x) = (y-t)x^2 + (t^2 - y^2)x + y^2z + z^2t - yt^2 - zt^2$$

có $f''(x) = 2(y - t) \ge 0$ nên $f(x)$ là hàm lõm trên [0 ; 1].

Vậy $f(x) \le \max\{f(0), f(1)\}$. Lại có

$f(0) = z(y - t)(y + t - z) \ge 0$;

mặt khác $f(0) \le \left(\frac{2y}{3}\right)^3 \le \frac{8}{27}$ (do $0 \le y \le 1$)

$f(1) = (1-z)t^2 + (z^2-1)t + y + y^2z - y^2 - yz^2$

Đặt $f(1) = g(t)$ có $g''(t) = 2(1-z) \geq 0$ (do $0 \leq z \leq 1$) nên

$g(t) \leq \max\{g(0)\,;\,g(1)\}$. Ta có

$g(0) = y + y^2z - y^2 - yz^2 = y(1-z)(1+z-y)$.

Do $1+z-y > 0$, $1-z > 0$ nên $g(0) \leq \left(\frac{y+1-z+1+z-y}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

$g(1) = (1-z) + (z^2-1) + y + y^2z - y^2 - yz^2 = (y-z)(1-z)(1-y) \leq \left(\frac{2-2z}{3}\right)^3 \leq \frac{8}{27}.$

Vì vậy $g(t) \leq \frac{8}{27}$, nên $f(x) \leq \frac{8}{27}$ (đpcm).

BÀI TẬP

1. Cho bốn số thực không âm a,b,c,d thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng $\frac{a}{5+3a^2}+\frac{b}{5+3b^2}+\frac{c}{5+3c^2}+\frac{d}{5+3d^2} \leq \frac{1}{2}$.

2. Cho a,b,c là các số dương và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2} \leq 5.$$ **(Trung Quốc- 2006)**

3. Cho $a,b,c \geq -\frac{3}{4}$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$.

4. Cho $a,b,c,d > 0$ và $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a}{a+2}\right)^3+\left(\frac{b}{b+2}\right)^3+\left(\frac{c}{c+2}\right)^3+\left(\frac{d}{d+2}\right)^3 \geq \frac{4}{27}.$$

5. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2} \leq \frac{1}{3}.$$

6. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq \frac{2}{3}.$$

7. Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$. **(Đề thi Đại học khối A năm 2011).**

8. : Cho x, y thỏa mãn: $x^2+y^2=1$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{x^2 + 6xy}{1 + 2xy + 2y^2}$$ **(Đề thi ĐH khối B -2008)**

9. Cho 3 số x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$. Tìm GTNN của biểu thức.

$$P = x^2 + y^2 + z^2$$

(Đề thi chọn đội tuyển dự thi IMO của Inđônêxia -2009)

10. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Tìm GTNN của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ **(Đề thi ĐH khối B -2011).**

11. Cho *a, b, c* là các số dương thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$7(ab + bc + ca) \le 2 + 9abc.$$

12. Cho *a, b, c, d , e* thuộc $[p\ ;\ q]$ với $q > p > 0$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \le 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

13. Cho các số *x, y, z* dương và thoả mãn diều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

a) $9xyz + 1 \ge 4(xy + yz + zx)$

b) $5(x^2 + y^2 + z^2) \le 6(x^3 + y^3 + z^3) + 1$.

14. Cho *n* số thuộc $[0\ ;\ 1]$ với $n \ge 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{S-a_1+1} + \frac{a_2}{S-a_2+1} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n+1} + (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \le 1$$

với $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.