## GEOMETRIZE ALGEBRA (GLA)

## LỜI MỞ ĐẦU

Trong trào lưu bất đẳng thức phát triển như vũ bão hiện nay và một loạt những phương pháp ffầy giá trị của những tên tuổi nổi tiếng cũng như của các bạn say mê bất đẳng thức ra đời thif việc một phương pháp không thật sự nổi bật cho dù khá mạnh trở nên nhạt nhòa và bị lãng quên cũng chẳng có gì là khó hiểu. Với các phương pháp hiện nay thì việc giải các bài bất đẳng thức trong kì thi quốc gia, quốc tế không còn là khó khăn với một lượng lớn các bạn học sinh nữa. Tuy nhiên, lời giải đẹp và trong sáng cho một bài toán vẫn là điều mỗi chúng ta luôn vươn tới. Chẳng thể có một phương pháp nào mà lời giải mọi bài toán bằng phương pháp đó đều là đẹp nhất cả. Chính điều này tạo nên sự quyến rũ không bao giờ nhàm chán của bất đẳng thức. Là một người cũng khá yêu thích môn học đầy kì bí này, tôi cũng đúc kết cho riêng mình một phương pháp có tên là GLA, tạm dịch là “hình học hóa đại số”. Thực chất đây chỉ là ứng dụng của phương pháp $p$, $R$, $r$ trong đại số mà thôi. Trong bất đẳng thức hình học, việc qui các đại lượng như độ dài, sin, cos của tam giác về $p$, $R$, $r$ đã được khắp nơi trên thế giới nghiên cứu từ lâu nhưng mỗi người có những hiểu biết riêng và chưa có một cuốn sách nào nói thật chi tiết về nó cả. Có lẽ, do những bài bất đẳng thức lượng giác chưa bao giừo xuất hiện trong các kì thi quốc tế cả mà người ra cho rằng với những gì nghiên cứu về $p$, $R$, $r$ hiện nay là quá đủ rồi và không nghiên cứu tiếp. Và đúng là trong bất đẳng thức lượng giác thì $p$, $R$, $r$ có một sức mạnh hủy diệt đủ để giải quyết gần như tòan bộ. VIệc đem $p$, $R$, $r$ ứng dụng vào trong đại số cũng không phải là một điều mới mẻ tuy nhiên mức độ của nó vẫn còn rất “manh mún”. Phần nhiều là do trong đại số đã có quá nhiều phương pháp mạnh nên phương pháp $p$, $R$, $r$ đã bị lãng quên và không được đánh giá đúng mực. Đa số trong chúng ta tồn tại một quan niệm cố hữu rằng: “nếu đem so sánh bất đẳng thức đại số với hình học thì chẳng khác nào đem gã khổng lồ ra so với chú bé ti hon hay tay địa chủ với kẻ bần nông”. Cũng chẳng trách được họ vì xét về hình thức thì bất đẳng thức hình học chỉ là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức đại số có thêm điều kiện để thỏa mãn các tính chất hình học mà thôi. Theo quan điểm của riêng tôi thì bất đẳng thức đại số có thể ví như phạm trù cái riêng còn bất đẳng thức hình học có thể ví như phạm trù cái chung trong triết học: "Cái riêng là cái toàn bộ, phong phú hơ cái chung, cái chung là cái bộ phận, nhưng sâu sắc hơn cái riêng". Tôi mạnh dạn đi sâu vào tìm hiểu ứng dụng của $p$, $R$, $r$ trong đại số và tách riêng nó ra thành một phương pháp có tên GLA trước hết là vì nhận thấy trong những dạng toán nhất định nó cho lời giải rất đẹp; sau thì là vì muốn góp phần nào công sức tìm lại tiếng nói cho bất đẳng thức hình học. Tôi muốn chứng minh phần nào quan điểm nêu trên của mình. Có thể là tôi quá ngông cuồng nhưng nếu qua bài viết tôi không chứng tỏ được gì thì đó là do khả năng hạn chế của tôi chứ chưa thể phủ định quan điểm của tôi được.

Trong quá trình viết phần lý thuyết sẽ được sắp đặt không tuân theo qui tắc thông thường. Phân đầu bài viết tôi cố xây dựng những kiến thức thật cơ bản và được áp dụng để có thể giải bài tập mà không cần dùng đến phần "lý thuyết tổng quan" cuối bài viết. Tại các kì thi học sinh giỏi thì ngoài những bất đẳng thức kinh điển được áp dụng trực tiếp còn lại tất cả những gì áp dụng đều phải chứng minh. Do đó làm sao để các bạn hiểu được lý thuyết để giải bài tập chứ không phải là dùng lý thuyết một cách máy móc.

Những bài tập trong phần viết này không quá khó, nếu bạn đọc nào muốn tìm hiểu những cái cao hơn xin liên hệ với tôi qua địa chỉ ở cuối bài viết. Đồng thời xin chân thành cảm ơn những ý kiến đóng góp từ bạn đọc.

Bùi Việt Anh

## A. CỞ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP

Xin nói trước là tôi sẽ trình bày bài viết của mình không giống như sự trình bày những phương pháp khác của họ đó là đầu tiên xây dựng lý thuyết rồi đi vào giải quyết các bài tập và xem thử sức mạnh của phương pháp. Ở đây tôi chỉ đi sơ lược những gì cần thiết để giải các bài toán đối xứng 3 biến đã. Sau khi trình bày tương đối hoàn chỉnh với 3 biến ta mới bắt đầu đi tìm hiểu xem GLA còn có những ứng dụng nào và bộ mặt thật của nó ra sao. Việc trình bày theo cách này cũng không hoàn toàn là vô lý bởi lẽ sau khi đã giải được một loạt những bài toán 3 biến thì các bạn cũng nắm được khá chắc những kiến thức cơ sở của GLA để dễ dàng tiếp thu những lý thuyết cao xa hơn. Những gì mà tôi sẽ trình bày trong những phần từ A đến E thì với kiến thức của học sinh THCS cũng có thể hiểu gần như toàn bộ. Xóa nhòa ranh giới về tuổi tác cũng chính là điều tôi cố gắng thực hiện trong các phần từ A đến E.

Xét những bài bất đẳng thức 3 biến đối xứng với điều kiện các biến không âm: $a$, $b$, $c$

Bằng cách đặt $x=b+c, y=c+a, z=a+b$ hoặc $x=\sqrt{b+c}, y=\sqrt{c+a}, z=\sqrt{a+b}$ và nhiều cách khác nữa ta suy ra được $x, y, z$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Như vậy ta đã chuyển một bài bất đẳng thức đại số thành hình học. Trường hợp trong 3 biến $a$, $b$, $c$ có một biến bằng O thì tam giác suy biến thành đường thẳng. Ta coi đó là tam giác có $r = 0$.

Ta đã biết mọi tam giác đều được xác định bởi 3 yếu tố $p$, $R$, $r$ nên sau khi qui bài toán về $x$, $y$, $z$ ta qui về $p$, $R$, $r$. Do có khá nhiều định lý hay, bổ đề đẹp về quan hệ giữa $p$, $R$, $r$ nên trong một số bài tán nhất định thì việc chuyển bài toán gồm 3 đại lượng $a$, $b$, $c$ về $p$, $R$, $r$ là thuận lợi hơn rất nhiều.

## B. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC VÀ BỔ ĐỀ ÁP DỤNG TRONG BÀI VIẾT:

Qui ước: Khi nhìn thấy kí hiệu $a$, $b$, $c$ ta hiểu đó là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Còn $p$, $R$, $r$ lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC.

VT là kí hiệu của vế trái, VP là kí hiệu của vế phải.

a) $ab+bc+ca=p^2+4Rr+r^2$

b) $2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+16Rr+4r^2$

c) $a^2+b^2+c^2=2p^2-8Rr-2r^2$

d) $2Rr-r^2-\dfrac{p^2}{9}=-\dfrac{1}{18p}(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$

e) $4Rr-r^2-\dfrac{p^2}{4}=-\dfrac{1}{32p}(b+c-3a)(c+a-3b)(a+b-3c)$

***Chứng minh:*** Ta dễ dàng nhận thấy 3 đẳng thức cần chứng minh là tương đương với nhau nên chỉ cần chứng minh cho đẳng thức **a)** là đủ.

Ta có: $p-a=r\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}$ và $a=2R\sin A \Rightarrow \sin A=\dfrac{a}{2R};\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{p-a}$.

Mặt khác áp dụng công thức: $\sin A=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}} \Rightarrow \dfrac{a}{2R}=\dfrac{2\cdot\dfrac{r}{p-a}}{1+\dfrac{r^2}{(p-a)^2}}=\dfrac{2r(p-a)}{(p-a)^2+r^2}$

$\Rightarrow ap^2-2pa^2+a^3+ar^2=4Rr(p-a)\Rightarrow a^3-2pa^2+a\left(r^2+p^2+4Rr\right)-4Rrp=0$ (1)

Xét phương trình: $x^3-2px^2+\left(r^2+p^2+4Rr\right)x-4Rrp=0$ (*). Từ (1) ta thấy $a$, $b$, $c$ là 3 nghiệm của (*). Do đó theo định lý Viet ta có:
$ab+bc+ca=p^2+4Rr+r^2$

**d)** Hệ thức này được chứng minh lần đầu tiên bởi nhà toán học P. Nuesch vào năm 1971 trong tạp chí "Elementary Math", No 26, 1971 trang 19. Đây là một hệ thức khá phức tạp. Rất tiếc tôi chưa được đọc một cách chứng minh nào cả nên đành chứng minh tam bằng sách sau đây:

$$2Rr-r^2-\frac{p^2}{9}=-\frac{1}{18p}(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$$

$\Leftrightarrow 36Rrp-18pr^2-2p^3=-(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$ (1)

VT(1) = $9abc-18\dfrac{S^2}{p}-2p^3=9abc-18(p-a)(p-b)(p-c)-2p^3$

Đặt $p-a=x, p-b=y, p-c=z \Rightarrow x+y+z=p-a+p-b+p-c=p$;

$a=y+z$ , $b=z+x$ , $c=x+y \Rightarrow$ VP(1) = $-(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)$

VT(1) = $9(x+y)(y+z)(z+x)-18xyz-2(x+y+z)^3$. Tức là ta cần chứng minh:

$$9(x+y)(y+z)(z+x)-18xyz-2(x+y+z)^3=-(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y) \quad (2)$$

Ta có: VT(2) $=9\left[x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xy\right]-18xyz$

$$-2\left[x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3z^2(x+y)+6xyz\right]$$

$$=3\left[x^2(y+z)+x^2(y+z)+z^2(x+y)\right]-2\left(x^3+y^3+z^3\right)-12xyz \quad (3)$$

Đến đây việc chứng minh A = B đã đơn giản hơn rất nhiều. Nếu không tìm được cách chứng minh hay thì bạn đọc có thể chịu khó ngồi phân tích nhân tử. Việc làm này chỉ tốn chút công sức chứ không cần suy nghĩ nhiều vì đã có trước kết quả mà không cần nháp, xin trình bày để các bạn tham khảo:

Ta nhận thấy (3) là biểu thức đối xứng và dễ dàng thấy rằng nếu đặt (3) bằng $f(x,y,z)$ thì $2x=y+z$ là một nghiệm của $f(x,y,z)$. Do tính đối xứng và $f(x,y,z)$ có bậc bằng 3 nên $2y=z+x, 2z=x+y$ cũng là nghiệm của $f(x,y,z)$ và chỉ có 3 nghiệm đó. Dấu của $x^3, y^3, z^3$ trong $f(x,y,z)$ là dấu trừ nên có thể viết: $f(x,y,z)=-(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)$

Đây là một mẹo nhỏ trong quá trình phân tích các biểu thức có tính chất đối xứng. Còn việc đi thi có được sử dụng tính chất đó không thì các bạn hãy tham khảo thầy giáo có uy tín nhé!

**e)** Hệ thức này được chứng minh lần đầu tiên bởi nhà toán học P. Nuesch vào năm 1972 trong tạp chí "Elementary Math", No 27, 1972 (trang 16-17). Các bạn có thể chứng minh tương tự như cach chứng minh **d)**.

Đây là một đẳng thức đẹp và nhiều ứng dụng nên các bạn trước hết hãy tìm cho riêng mình một lờii giải để hiểu được bản chất của nó. Sau đây mình xin giới thiệu lời giải của mình để các bạn tham khảo.

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$$128Rrp-32pr^2-8p^3=(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)$$

$$\Leftrightarrow 32abc-32(p-a)(p-b)(p-c)-(a+b+c)^3=(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)$$

Đặt $\begin{cases} a=2x+y+z \\ b=2y+z+x \\ c=2z+x+y \end{cases}$ $(x+y>0, y+z>0, z+x>0) \Rightarrow a+b+c=4(x+y+z)$ (1)

Ta dễ dàng nhận thấy với cách đặt đó thì điều kiện $a$, $b$, $c$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác không bị vi phạm và: $\begin{cases} p-a=y+z, p-b=z+x, p-c=x+y \\ 3a-b-c=4x \\ 3b-c-a=4y \\ 3c-a-b=4z \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta cần chứng minh:

$$32(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)-32(x+y)(y+z)(z+x)-64(x+y+z)^3=64xyz$$

$$\Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)-(x+y)(y+z)(z+x)-2(x+y+z)^3=2xyz$$

Đến đây ta chứng minh $(m+n)(n+p)(p+m)+mnp=(m+n+p)(mn+np+pm)$ (*)

áp dụng với $m=y+z, n=z+x, p=x+y$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)+(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$=2(x+y+z)^3+2\left[(x+y)(y+z)(z+x)+xyz\right]$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y+z)\left[(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\right]$$
$$=2(x+y+z)^3+2(x+y+z)(xy+yz+zx)$$ (đúng)

Vậy ta đã chứng minh xong đẳng thức **e)**.

**2. Các định lý:**

**Định lý 1:** Cho tam giác ABC, D là một điểm bất kì thuộc BC. Khi đó:

$nc^2 + mb^2 = (d^2 + mn)a$ trong đó AD = *d*, BD = *m*, DC = *n*

Chứng minh:

Ta có $m^2 + d^2 - c^2 = 2md\cos\widehat{ADB}$ (1), $n^2 + d^2 - b^2 = 2nd\cos\widehat{ADC}$ (2)

Nhân cả 2 vế của (1) với *n* và cả 2 vế của (2) với *m* ta được:

$n(m^2 + d^2 - c^2) = 2mnd\cos\widehat{ADB}$ (3), $m(n^2 + d^2 - b^2) = 2mnd\cos\widehat{ADC}$ (4)

Cộng vế theo vế của (3) với (4) ta được:

$$mn(m+n) + (m+n)d^2 - nc^2 - mb^2 = 2mnd\left(\cos\widehat{ADB} + \cos\widehat{ADC}\right) \Leftrightarrow (mn + d^2)a = nc^2 + mb^2$$

**Định lý 3:** $p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Cách 1: Giả sử *a*, *b*, *c* thỏa mãn $a > b \ge c \ge 0$ là 3 nghiệm của phương trình:

$M(X) = X^3 - 2pX^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)X - 4pRr = 0$

Điều kiện để *a*, *b*, *c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác là:

$$\begin{cases} b + c > a \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > a \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow p > a \ge b \ge c > 0 \quad (1)$$

$\Leftrightarrow$ Phương trình M(*X*) = 0 có nghiệm thỏa mãn (1)

Ta có: $M'(X) = 3X^2 - 4pX + p^2 + 4Rr + r^2$

$\Delta' = (2p)^2 - 3(p^2 + 4Rr + r^2) = p^2 - 12Rr - 3r^2$; M(*X*) có 3 nghiệm $\Rightarrow$ Δ’ ≥ 0.

Hai nghiệm của M’(*X*) = 0 là: $X_1 = \dfrac{2p - \sqrt{\Delta'}}{3}; X_2 = \dfrac{2p + \sqrt{\Delta'}}{3}$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} M(0) < 0 \\ M(X_1) \geq 0 \\ M(X_2) \leq 0 \\ M(p) > 0 \end{cases}$$ Ta nhận thấy ngay M(0) < 0 và M($p$) > 0.

Còn $\begin{cases} M(X_1) \geq 0 \\ M(X_2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\sqrt{\Delta'} \geq p\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right) \\ \Delta'\sqrt{\Delta'} \geq -p\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta'\sqrt{\Delta'} \geq \left|p\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right)\right|$

$$\Leftrightarrow (\Delta')^3 \geq p^2\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right)^2 \Leftrightarrow p^4 - 2p^2\left(2R^2 + 10Rr - r^2\right) + r(4R + r)^3 \leq 0 \ (2)$$

$$\Delta_1' = \left(2R^2 + 10Rr - r^2\right)^2 - r(4R + r)^3 = 4R(R - 2r)^3 \geq 0$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \leq$$

$$p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}$$

(Cách chứng minh này

Cách 2: Cách này chưa có trong bất kì một tài liệu nào cả và mang đậm bản sắc hình học

Ta có: $p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

$\Leftrightarrow p^2 - 16Rr + 5r^2 \le (R^2 - 4Rr + 4r^2) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} + R(R-2r)$

$\Leftrightarrow 9.IG^2 \le \left[(R-2r) + \sqrt{R(R-2r)}\right]^2 \Leftrightarrow 3.IG \le R - 2r + OI$

Trong đó O, I, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trọng tâm của ΔABC. Trên đường thẳng IG ta lấy điểm H sao cho $\overrightarrow{IK} = 3\overrightarrow{IG}$. Ta sẽ dùng định lý 1 để tính đoạn OH

Theo định lý 1:

$OI^2.HG + OH^2.IG = (OG^2 + IG.GK)IK$

$\Leftrightarrow 2R(R-2r) + OK^2 = 3\left(R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} + 2\cdot\frac{p^2 - 16Rr + 5r^2}{9}\right)$ (do $GK = 2IG, IK = 3IG$ )

$\Leftrightarrow 6R(R-2r) + 3.OK^2 = 9R^2 - (2p^2 - 8Rr - 2r^2) + 2p^2 - 32Rr + 10r^2$

$\Leftrightarrow 3.OK^2 = 3(R^2 - 4Rr + 4r^2) \Leftrightarrow OK^2 = (R-2r)^2 \Leftrightarrow OK = R - 2r$

Trong tam giác OIK ta luôn có: OI + OK ≥ IK hay $(R - 2r)$ + OI ≥ 3.IG

Tức là: $p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Đẳng thức xảy ra ⇔ O nằm giữa I và K

Comment: Từ định lý 1 ta có thể tạo ra rất nhiều đoạn thẳng có độ dài đặc biệt và rất đẹp như OK trong bài này. Bạn nào có niềm say mê thì tìm tòi thử, còn trong bài viết này tôi chỉ dừng ở đây.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được:
$p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Điều này tương đương với IK + OK ≥ OI. Đẳng thức xảy ra khi K nằm giữa O và I

Bây giờ ta sẽ đi tìm điều kiện cần để:

+ O nằm giữa I và K

+ K nằm giữa O và I

* O nằm giữa I và K khi: $\sqrt{p^2 - 16Rr + 5r^2} = R - 2r + \sqrt{R(R-2r)}$

$\Rightarrow p^2 - 16Rr + 5r^2 \geq R(R-2r) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

$\geq R(R-2r) + 2(R-2r)^2 = (R-2r)(3R-4r) \Rightarrow p^2 \geq 3(R+r)^2 \Rightarrow p \geq 3\sqrt{R+r}$

Theo định lý 2 đã trình bày thì điều này xảy ra khi tam giác có 2 góc ≥ 60°, tức là tam giác cân đó có cạnh bên lớn hơn hoặc bằng cạnh đáy.

* K nằm giữa O và I khi: $\sqrt{p^2 - 16Rr + 5r^2} = \sqrt{R(R-2r)} - (R-2r)$

$\Rightarrow p^2 - 16Rr + 5r^2 \leq R(R-2r) + (R-2r)^2 \leq (R-2r)(3R-4r)$

$\Rightarrow p^2 \leq 3(R+r)^2 \Rightarrow p \leq 3\sqrt{R+r}$

Theo định lý 2 đã trình bày thì điều này xảy ra khi tam giác có 2 góc ≤ 60°, tức là tam giác cân đó có cạnh bên nhỏ hơn hoặc bằng cạnh đáy.

Định lý 5: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$

Chứng minh: Ta có nhiều cách để chứng minh định lý này nhưng trong bài viết tôi sẽ sử dụng định lý 3 làm bổ đề vì đây là một bổ đề rất mạnh và tính ứng dụng cao.

Nhận thấy $R(R-2r) \leq R(R-2r) + r^2 = (R-r)^2$. Do đó:
$p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)(R-r) \Leftrightarrow p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R^2 - 3Rr + 2r^2)$

$\Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \Leftrightarrow 2p^2 \leq 8R^2 + 8Rr + 6r^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 8Rr + 2r^2 \leq 8R^2 + 8Rr + 6r^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$

Lại có $a^2+b^2+c^2+16Rr+4r^2=2(ab+bc+bc)$

$\Rightarrow 8R^2+16Rr+8r^2\geq 2(ab+bc+bc)\Rightarrow 4(R+r)^2\geq ab+bc+ca$

Định lý 4: $p^2\geq 2R^2+8Rr+3r^2$ trong mọi tam giác nhọn

Các bất đẳng thức tương đương: $a^2+b^2+c^2\geq 4(R+r)^2$

$ab+bc+ca\geq 2R^2+12Rr+4r^2$

Những bất đẳng thức này đã gặp nhiều trong các sách nên xin được không đưa ra chứng minh.

Định lý 2: Nếu tam giác ABC có: Hai góc ≥ 60° thì $p\geq\sqrt{3}(R+r)$

Hai góc ≤ 60° thì $p\leq\sqrt{3}(R+r)$

Một góc bằng 60° thì $p=\sqrt{3}(R+r)$

Chứng minh: Ta có: $\dfrac{p-\sqrt{3}(R+r)}{2R}=\dfrac{a+b+c}{4R}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{r}{R}\right)$

$=\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(B-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(C-\dfrac{\pi}{3}\right)$ (1)

Đặt $x=A-\dfrac{\pi}{3},y=B-\dfrac{\pi}{3},z=C=\dfrac{\pi}{3}$ ta có $x+y+z=0$

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $x\geq y\geq z$

$(1)=\sin x+\sin y+\sin z=\sin x+\sin y-\sin(x+y)=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}-2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$=2\sin\dfrac{x+y}{2}\left(\cos\dfrac{x-y}{2}-\cos\dfrac{x+y}{2}\right)=4\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}$

Do $x+y+z=0$ và $x\geq y\geq z$ nên $x+y\geq 0$ và $x \geq 0$, $x < \pi$, $x + y < \pi$

suy ra $4\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\geq 0$

$-$ Nếu $y \geq 0 \Leftrightarrow B\geq\dfrac{\pi}{3}$ thì $\sin\dfrac{y}{2}\geq 0$ do đó $\dfrac{p-\sqrt{3}(R+r)}{2R}=4\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\geq 0$

Tức là $p \ge \sqrt{3}(R+r)$ khi ΔABC có 2 góc ≥ $\frac{\pi}{3}$

– Nếu $y \le 0$ thì $\sin\frac{y}{2} \le 0$, do đó: $\frac{p-\sqrt{3}(R+r)}{2R} = 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} \le 0$

Tức là $p \le \sqrt{3}(R+r)$ khi ΔABC có 2 góc ≤ $\frac{\pi}{3}$

– Nếu $y = 0$ thì $p = \sqrt{3}(R+r)$ do $\sin\frac{y}{2} = 0$

Định lý 6: $p^2 \ge 16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R}$ (*)

CM: Ta luôn có: $IG \ge IO - OG \Leftrightarrow IG \ge \sqrt{R(R-2r)} - \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2+b^2+c^2)}$

$\Leftrightarrow 3.IG \ge 3\sqrt{R(R-2r)} - \sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)} \Leftrightarrow 3.IG \ge \frac{a^2+b^2+c^2-18Rr}{3\sqrt{R(R-2r)}+\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}}$ (1)

Do $9.IG^2 = p^2 - 16Rr + 5r^2$ nên $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2 \ge 24Rr - 12r^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow 3.IG \ge \frac{6Rr-12r^2}{3\sqrt{R(R-2r)}+\sqrt{9R^2-24R+12r^2}} = \frac{6Rr-12r^2}{6\sqrt{R(R-2r)}} = r\sqrt{\frac{R-2r}{R}}$

$\Rightarrow 9.IG^2 \ge \frac{r^2(R-2r)}{R^2}$. Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra ⇔ ΔABC đều

Comment: Định lý 6 chỉ chặt hơn BĐT quen thuộc $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ chút xíu nhưng nó đặc biệt quan trọng khi "đương đầu" với những BĐT chặt. Như các bạn đã biết BĐT $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ là một BĐT tương đối chặt những vẫn chưa đủ độ mạnh để khuất phục những bài "cứng đầu". Tuy nhiên chỉ cần làm chặt hơn một chút xíu:

(**) $p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$ thì lại giải quyết những bài toán đó 1 cách khá "ngon lành". Định lý 6 có tầm quan trọng không kém so với (**). Thực ra vẫn có thể làm chặt hơn nữa BĐT (*) thành:
$p^2 \ge 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{RR-2r}$ (***) có điều hình thức của (***) quá cồng kềnh nên rất khó áp dụng.

Tóm lại ta có BĐT kẹp:

$$16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}\le p^2\le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

**Định lý 7:** Cho tam giác ABC thỏa mãn $a\ge b\ge c$ và $a+b\ge 3c$. CMR: $\frac{r}{R}\le\frac{4}{9}$

Chứng minh: Ta có: $\frac{r}{R}=\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}$

Đặt $f(c)=\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{(a+b)c^2-2c^3+(a+b)(a-b)^2}{2abc^2}\ge\frac{(a+b-2c)c^2}{2abc^2}\ge 0$$

Do đó $f(c)$ đồng biến theo $c$. Thay $c=\frac{a+b}{3}$ vào $f(c)$ ta được:

$$f(c)\le f\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{4(2b-a)(2a-b)}{9ab}=\frac{4}{9}-\frac{2(a-b)^2}{9ab}\le\frac{4}{9}$$

Vậy $\frac{r}{R}\le\frac{4}{9}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{3}{2}c$

## C. Xây dựng các đẳng thức

Đây chính là phần "xương sống" của phương pháp này. Chỉ cần nắm vững các đẳng thức trong phần này thì nhiều bài tập mặc dù rất khó trong các phần sau cũng trở nên đơn giản.

• Xét $a, b, c > 0$

Như đã nói ở phần A, sau khi đặt:

$x = b + c, y = c + a, z = a + b$ thì $x, y, z$ trả thành độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Ta sẽ chuyển một số đại lượng trong đại số về hình học thông qua $p, R, r$ lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác XYZ

1. Tính $a^2 + b^2 + c^2$ và $ab + bc + ca$

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2\left(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca\right)$ (1)

$xy + yz + zx = (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

• $4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = (x + y + z)^2 - 2\left[2(xy + yz + zx) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right]$

$\Leftrightarrow 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 4p^2 - 2\left(16Rr + 4r^2\right) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2$

• $4(ab + bc + ca) = 2(xy + yz + zx) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

$4(ab + bc + ca) = 16Rr + 4r^2 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 4Rr + r^2$

• $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \dfrac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} = \dfrac{p^2}{4Rr + r^2} - 2$

2. Tính $\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Ta có: $\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)}{8xyz}$

$= \dfrac{(p - x)(p - y)(p - z)}{xyz} = \dfrac{pr^2}{4Rrp} = \dfrac{r}{4R}$

3. Tính $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$

$$=\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}-3=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}-3$$

$$=\frac{p\left(4Rr+r^2\right)}{(p-x)(p-y)(p-z)}-3=\frac{p\left(4Rr+r^2\right)}{pr^2}-3=\frac{4R+r}{r}-3=\frac{2(2R-r)}{r}$$

4. $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+bc+ca)\right]+3abc$

$$=p\left(p^2-8Rr-2r^2-4Rr-r^2\right)+3pr^2=p\left(p^2-12Rr\right)$$

5. $a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2(ab+bc+ca)^2+4abc(a+b+c)$

$$=\left(p^2-8Rr-2r^2\right)^2-2\left(4Rr+r^2\right)^2+4p^2r^2$$

$$=p^4-4\left(4Rr+r^2\right)p^2+4\left(4Rr+r^2\right)^2-2\left(4Rr+r^2\right)^2+4p^2r^2=p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2$$

6. $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{p}{\sqrt[3]{pr^2}}=\sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$

7. Gọi S là diện tích của tam giác XYZ có độ dài 3 cạnh là $x,y,z$

Ta có: $16S^2=(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

$$=\left[(x+y)^2-z^2\right]\left[z^2-(x-y)^2\right]=(x+y)^2z^2-z^4-\left(x^2-y^2\right)^2+z^2(x-y)^2$$

$$=\left(x^2+y^2+2xy\right)z^2-z^4-x^4-y^4+2x^2y^2+z^2x^2-2xyz^2+z^2y^2$$

$$=2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)-\left(x^4+y^4+z^4\right)$$

Trong một số bài toán trường hợp $x^2\geq y^2+z^2$ ($x$ là max của $\{x,y,z\}$) ta nhận ngay thấy bài toán đúng. Do đó chỉ cần xét thêm trường hợp $x^2<y^2+z^2$ là bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Đặt $m=x^2,n=y^2,p=z^2$ thì ta lại có $m,n,p$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Nếu gọi $R_1,r_1$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác MNP có đọ dài 3 cạnh là $m,n,p$ thì:

$$16S^2=2(mn+np+pm)-\left(m^2+n^2+p^2\right)=16R_1r_1+4r_1^2\Rightarrow 4S^2=4R_1r_1+r_1^2$$

Vậy nhiều bài toán 3 biến qua 2 lần đặt ẩn thì ta qui được về bài toán 2 biến. Do các bài toán ta đang nghien cứu là bất đẳng thức đối xứng nên sau khi chuẩn hóa các bài toán chỉ còn 1 biến. Mà bài toán 1 biến thương giải được một cách dễ dàng.

8. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3 \;=p\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$

$$=\frac{p(xy+yz+zx)}{xyz}-3=\frac{p\left(p^2+4Rr+r^2\right)}{4Rrp}-3=\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rr}-3=\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}$$

9. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{4Rr+r^2}{pr^2}=\frac{4R+r}{pr}$

10. $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{p}{pr^2}=\frac{1}{r^2}$

11. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2}$

$$=\frac{r^2(4R+r)^2-2p^2r^2}{p^2r^2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2r^2}$$

12. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\;=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp}$

13. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^2y^2z^2}=\frac{(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)}{x^2y^2z^2}$

$$=\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2}{16R^2r^2p^2}=\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2r^2p^2}-\frac{1}{Rr}$$

14. $(a+b)(b+c)(c+a)=xyz=4Rrp$

$$abc=(p-x)(p-y)(p-z)=\frac{S^2}{p}=pr^2$$

15. $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc}$

$$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{abc}=\frac{r^2(4R+r)^2-2p^2r^2}{pr^2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p}$$

16. $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=(ab+bc+ca)^3-3abc(a+b)(b+c)(c+a)$

$=r^3(4R+r)^3-12p^2r^3R$

17. $\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2}$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)+(b^2+c^2)(b^2+a^2)+(c^2+a^2)(c^2+b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{(p^2-8Rr-2r^2)^2+(4Rr+r^2)^2-2p^2r^2}{(p^2-8Rr-2r^2)\left[(4Rr+r^2)^2-2p^2r^2\right]-p^2r^4}=\frac{p^4-8(2R+r)rp^2+5r^2(4R+r)^2}{4r^2(4R^2+6Rr+r^2)p^2-2p^4r^2-2r^3(4R+r)^3}$$

18. $(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b)=a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3a^2b^2c^2+abc(a^3+b^3+c^3)$

$=r^3(4R+r)^3-12R^2r^3p+3p^2r^4+p^2r^2(p^2-12Rr)$

$=r^2\left[r(4R+r)^3+3p^2r^2+p^4-24Rrp^2\right]$

Phần xây dựng những công thức cơ bản xin được dừng lại ở đây. Trong quá trình làm bài tập nếu cần những công thức khác thì bạn đọc cũng có thể dễ dàng tự xây dựng. Do mọi đa thức đối xứng đều qui được về tổng và tích của 3 đại lượng $a+b+c, ab+bc+ca, abc$ nên đều qui được về $p, R, r$ .

## D. MỘT SỐ BÀI TOÁN SƯU TẦM

Phần này gồm những bài toán rất nổi tiếng và đã có nhiều cách giải. Tuy nhiên trong bài viết này ta sẽ dùng phương pháp GLA để giải.

Bài 1. (Iran 1996)

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\ge\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$

***Giải***

Áp dụng công thức 1 và 13 trong phần C ta cần phải chứng minh:

$$\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2r^2p^2}-\frac{1}{Rr}\ge\frac{9}{4\left(4Rr+r^2\right)}\Leftrightarrow\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2rp^2}-\frac{1}{R}\ge\frac{9}{4(4R+r)}$$

Xét $A=\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2rp^2}$. Ta sẽ chứng minh A đồng biến theo $p$.

C1: Tính đạo hàm

C2: $A=\frac{p^2+\frac{(4Rr+r^2)^2}{p^2}+2\left(4Rr+r^2\right)}{16R^2r}\ge\frac{\frac{8}{9}p^2+\frac{2\left(4Rr+r^2\right)}{3}+2\left(4Rr+r^2\right)}{16R^2r}$

Đến đây ta nhận ngay thấy A đồng biến theo $p$.

Mà $p^2-16Rr+5r^2=9.IG^2\ge 0\Rightarrow p^2\ge 16Rr-5r^2$. Do đó

$$A\ge\frac{(16Rr-5r^2+4Rr+r^2)^2}{16R^2r\left(16Rr-5r^2\right)}=\frac{\left(20Rr-4r^2\right)^2}{16R^2r^2(16R-5r)}=\frac{(5R-r)^2}{R^2(16R-5r)}=\frac{25R^2-10Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}$$

Công việc còn lại của ta chỉ còn là đi chứng minh:

$$\frac{25R^2-10Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}-\frac{1}{R}\ge\frac{9}{4(4R+r)}\Leftrightarrow\frac{9R^2-5Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}\ge\frac{9}{4(4R+r)}$$

$$\Leftrightarrow 4(4R+r)\left(9R^2-5Rr+r^2\right)\ge 9\left(16R^3-5R^2r\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(36R^3+9R^2r-20R^2r-5Rr^2+4Rr^2+r^3\right)\ge 9\left(16R^3-5R^2r\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(36R^3-11R^2r-Rr^2+r^3\right)-9\left(16R^3-5R^2r\right)\ge 0\Leftrightarrow r(R-2r)^2\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r=0 \\ R=2r \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b, c=0 \ (\text{và các hoán vị}) \\ a=b=c \end{array}\right.$

Comment: Lời giải bài toán trên cũng như lời giải của các bài toán tiếp theo sau đây sẽ được trình bày một cách rất tỉ mỉ để các bạn tiện theo dõi. Tuy nhiên, như đã thấy, lời giải trên rất sáng sủa và gọn gàng. Bạn nào yêu thích bất đẳng thức hình chắc sẽ cảm nhận được ngay vẻ đẹp của lời giải còn bạn nào chưa quan tâm thực sự đến bất đẳng thức hình vì cho rằng nó không còn ở đẳng sau và biết đâu sau khi đọc bài viết này các bạn sẽ thay đổi cái nhìn về bất đẳng thức hình.

Bài 2. Cho $a$, $b$, $c \geq 0$ và $ab+bc+ca=1$. CMR: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$

***Giải***

Áp dụng đẳng thức 1 và 12 phần C ta có bài toán sau:

Cho $x, y, z > 0$ và $4Rr + r^2 = 1$. CMR: $\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow p^2 - 10Rrp + 1 \geq 0$ (1)

Xét phương trình: $f(x) = x^2 - 10Rrx + 1 = 0$; $\Delta' = 25R^2r^2 - 1$

$\Rightarrow x_1 = 5Rr - \sqrt{25R^2r^2-1}$; $x_2 = 5Rr + \sqrt{25R^2r^2-1}$

Để chứng minh (1) ta chỉ phải chứng minh $p \geq x_2 = 5Rr + \sqrt{25R^2r^2-1}$

Ta có:

$$\sqrt{25R^2r^2-1} = \sqrt{25R^2r^2-(4Rr+r^2)^2} = r\sqrt{9R^2-8Rr-r^2} \leq r\sqrt{(3R-r)^2} = r(3R-r)$$

$$\Rightarrow 5Rr + \sqrt{25R^2r^2-1} \leq 5Rr + r(3R-r) = 2-3r^2$$

Lại có $p^2 - 16Rr + 5r^2 = 9.IG^2 \geq 0 \Rightarrow p \geq \sqrt{16Rr-5r^2} = \sqrt{4-9r^2}$

Mà $\sqrt{4-9r^2} \geq 2-3r^2 \Leftrightarrow 4-9r^2 \geq (2-3r^2)^2 \Leftrightarrow 4-9r^2 \geq 4-12r^2+9r^4$

$\Leftrightarrow r^2(1-3r^2) \geq 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 0 \\ p^2 = 16Rr - 5r^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, y=z=1$

Vậy $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1, c=0$ và các hoán vị.

Mở rộng: Cho $a$, $b$, $c \ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ và $b+c\ge a\ge b\ge c$

CMR: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{a+b+c+abc}$

Giải: Trước tiên ta nhận thấy bài toán này chặt hơn bài toán ban đầu bởi lẽ:

$1=ab+bc+ca\ge a(b+c)\ge a^2\Rightarrow a\le 1\Rightarrow(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0$

$\Leftrightarrow 1-a-b-c+ab+bc+ca-abc\ge 0\Leftrightarrow 2\ge a+b+c+abc$

Với bài toán ban đầu ta có thể chứng minh bằng nhiều cách đại số mà lời giải khá gọn gàng nhưng với bài toán mở rộng này thì lời giải bằng đại số là khá phức tạp. Ta sẽ dùng G.L.A. để chứng minh bài toán này.Ta nhận thấy với điều kiện của bài toán thì $a$, $b$, $c$ là độ dài 3 cạnh 1 tam giác (Trường hợp $b + c$ = a tam giác suy biến thành đường thẳng). Áp dụng công thức 1 phần C ta cần phải CM:

$$\frac{\sum(a+c)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{5}{a+b+c+abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}\ge\frac{5}{a+b+c+abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5-16Rr-4r^2}{(a+b+c)(1-2Rr)}\ge\frac{5}{(a+b+c)(1+2Rr)}\Leftrightarrow\left[5-\left(16Rr+4r^2\right)\right](1+2Rr)\ge 5(1-2Rr)$$

$$\Leftrightarrow 5+10Rr-(1+2Rr)\left(16Rr+4r^2\right)\ge 5-10Rr\Leftrightarrow 20Rr\ge(1+2Rr)\left(16Rr+4r^2\right)\ (1)$$

Ta nhận thấy: $(1+2Rr)\left(16Rr+4r^2\right)\le 18(1+2Rr)Rr=18Rr+2Rr.18Rr\ \le$

$\le 18Rr+2Rr(ab+bc+ca)=20Rr$. Do đó (1) được chứng minh.

Vậy $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{a+b+c+abc}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = 1$, $c = 0$.

**Bài 3.** Cho $x,y,z>0$. Tìm điều kiện để bất đẳng thức sau luôn đúng.

$$\sum\sqrt{\frac{x}{(x+y)(x+z)}}\ge\frac{4}{\sqrt{3(x+y+z)}}\left(1+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right)$$

***Giải***

Đứng trước bài toán này, các phương pháp đại số không biết nên bắt đầu từ đâu bởi đề bài xuất hiện những căn thức rất khó hịu và điều kiện để bài toán đúng theo như dự đoán thì không đơn giản. Nhưng dạng bài này chắc chắn dùng G.L.A để giải. Có điều ta thử xem độ phức tạp của bài toán đến đâu nhé.

Đặt $y+z=a, z+x=b, x+y=c$. Bài toán trở thành:

$$\sum\sqrt{\frac{p-a}{bc}} \ge \frac{4}{\sqrt{3p}}\left(1+\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right) \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\prod\sin\frac{A}{2}\right) \ (1)$$

(Trong đó $p$ là nửa chu vi của ΔABC có độ dài 3 cạnh là $a,b,c$)

Bạn đọc có thể nhận ngay ra (1) chính là 1 trong các bất đẳng thức của Jack Garfulkel. Điều kiện để bài toán trên đúng là khi tam giác ABC nhọn. Tức là $b^2+c^2>a^2$ (giả sử $a=\max\{a, b, c\}$) $\Leftrightarrow (x+y)^2+(x+z)^2>(y+z)^2$

$\Leftrightarrow x(x+y+z)>yz \Leftrightarrow x+y+z>\frac{yz}{x}$ (trong đó $x=\min\{x,y,z\}$)

Việc của ta bây giờ là đi chứng minh (1) với điều kiện ΔABC nhọn. Đây là một bài rất chặt nên chứng minh bằng G.L.A cũng không hề đơn giản.

***Giải***

Ta có: $\cos\frac{A}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right), \cos\frac{B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right), \cos\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

Đặt $A'=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}, B'=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}, C'=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

(1) $\Leftrightarrow \sum\sin A' \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\prod\cos A'\right)$ (2)

trong đó $A', B', C'$ là số đo 3 góc của 1 tam giác nhọn có $\min\{A',B',C'\} \ge \frac{\pi}{4}$

(2) $\Leftrightarrow \frac{p}{R} \ge \frac{4}{R3}\left(1+\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}\right) \Leftrightarrow p^2-\sqrt{3}Rp-4Rr-r^2 \le 0$

$$\Leftrightarrow p \le \frac{R\sqrt{3}+\sqrt{3R^2+16Rr+4r^2}}{2} \Leftrightarrow p^2 \le \frac{3R^2+8Rr+2r^2+R\sqrt{9R^2+48Rr+12r^2}}{2} \ (3)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\frac{\pi}{4} \le A' \le B' \le C' \le \frac{\pi}{2}$

TH1: $B' \le \frac{\pi}{3}$. Áp dụng định lý 2 ta có $p^2 \le 3(R+r)^2$. Do đó ta chỉ cần chứng minh: $6(R+r)^2 \le 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

$\Leftrightarrow 6R^2 + 12Rr + 6r^2 \le 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

$\Leftrightarrow 3R^2 + 4Rr + 4r^2 \le R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

Mà $R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2} \ge R\sqrt{9R^2 + 36Rr + 36r^2} = 3R(R+2r) \ge 3R^2 + 4Rr + 4r^2$

Suy ra (3) được chứng minh

TH2: $B' \ge \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2} \ge \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{24} > 0,116$

$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{1}{4\sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2}} < 2,16$. Áp dụng định lý 3 ta chỉ cần chứng minh:

$2(2R^2 + 10Rr - r^2) + 4(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \le 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

$\Leftrightarrow R^2 + 12Rr - 4r^2 + 4(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \le R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

$\Leftrightarrow t^2 + 12t - 4 + 4(t-2)\sqrt{t(t-2)} \le t\sqrt{9t^2 + 48t + 12}$ trong đó $t = \frac{R}{r}, t \in [2;\ 2,16)$

$VT \le t^2 + 12t - 4 + 4(t-2)\sqrt{2,16(2,16-2)} \le t^2 + 12t - 4 + 2,4(t-2) = t^2 + 14,4t - 8,8$

$VP \ge t\sqrt{(3,2t + 5,6)^2 + (t-2)(9,28 - 1,24t)} \ge t(3,2t + 5,6)$

Mà $t(3,2t + 5,6) - (t^2 + 14,4t - 8,8) = 2,2(t-2)^2 \ge 0$, do đó VP ≥ VT.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 2$.

Vậy $\sum \cos\frac{A}{2} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1 + \prod \sin\frac{A}{2}\right)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

**Bài 4.** Cho $x, y, z > 0$. CMR:

$$8(x+y+z)^3 xyz(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \ge \left[\sum (x+y)^2\right]^3 \prod \left[(x+y)(x+z) - 2yz\right] \quad (1)$$

***Giải***

Đặt $x=\frac{b+c-a}{2}, y=\frac{c+a-b}{2}, z=\frac{a+b-c}{2}$ thì ta có $a$, $b$, $c$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác và: $a=y+z, b=z+x, c=x+y \Rightarrow$

$x+y+z=p, xyz=(p-a)(p-b)(p-c)$

($p$ là nửa chu vi tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là $a$, $b$, $c$)

$$2\left[(x+y)(x+z)-2yz\right]=(x+z)^2+(x+y)^2-(y+z)^2=b^2+c^2-a^2$$

Tương tự $2\left[(y+z)(y+x)-2zx\right]=c^2+a^2-b^2$ , $2\left[(z+x)(z+y)-2xy\right]=a^2+b^2-c^2$

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ $8p^3(p-a)(p-b)(p-c)a^2b^2c^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^3 \prod \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3(p-a)(p-b)(p-c)a^2b^2c^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^3 \prod (a^2+b^2-c^2)$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$

Nếu $b^2+c^2 \leq a^2$ thì VT ≥ 0 ≥ VP ⇒ (đpcm)

Nếy $b^2+c^2 > a^2$ thì đặt $a^2=m, b^2=n, c^2=p$

Ta có: $m, n, p$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác.

Mặt khác theo bất đẳng thức Holder ta có:

$(a^2+b^2+c^2)^3=\left(\sum \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^4}\right)^3 \leq (a+b+c)^2(a^4+b^4+c^4)$ (3)

Từ (2) và 93) suy ra để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh:

$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)a^2b^2c^2 \geq (a^4+b^4+c^4)\prod(a^2+b^2-c^2)$

$\Leftrightarrow (2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)a^2b^2c^2 \geq (a^4+b^4+c^4)\prod(a^2+b^2-c^2)$

$\Leftrightarrow (2mn+2np+2pm-m^2-n^2-p^2)mnp \geq (m^2+n^2+p^2)\prod(m+n-p)$

$\Leftrightarrow (16R_1r_1+4r_1^2)4R_1r_1p_1 \geq (m^2+n^2+p^2)8p_1r_1^2 \Leftrightarrow 8R_1^2+2R_1r_1 \geq m^2+n^2+p^2$ (4)

(4) đúng theo định lý 5.

Tức là ta đã chứng minh xong (1). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ghi chú: $R_1, r_1, p_1$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi ΔMNP có độ dài 3 cạnh là $m, n, p$.

Comment: Tạm thời bỏ qua độ cồng kềnh của bài toán thì độ chặt của nó đã đủ làm điêu đứng các phương pháp đại số rồi. Tôi đã thử đi tìm một lời giải đại số và kết quả sau nhiều cố gắng mới có được lời giải dài gấp 5 lần lời giải này. Có lẽ bài này sinh ra là để dành riêng cho G.L.A.

**Bài 5.** Cho $a, b, c > 0$. CMR: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$

***Giải***

Áp dụng công thức 3 và 8 ta cần chứng minh: $\frac{2(2R-r)}{r}\ge 4\cdot\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}$

$\Leftrightarrow 2R(2R-r)\ge p^2-8Rr+r^2 \Leftrightarrow 4R^2+6Rr-r^2\ge p^2$ (đúng theo định lý 3)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

**Bài 6.** Chứng minh rằng $\forall a, b, c$ không âm ta có BĐT:

$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$

***Giải***

Nếu trong 3 số $a, b, c$ có 2 số bằng 0 thì ta có ngay đpcm.

Nếu trong 3 số có 2 số $\neq 0$ thì áp dụng các công thức 1 và 14 ta cần chứng minh:

$p^2-8Rr-2r^2+2pr^2+1\ge 2(4Rr+r^2) \Leftrightarrow p^2+2pr^2+1\ge 16Rr+4r^2$

Ta có: $2pr^2+1=pr^2+pr+1\ge 3\cdot\sqrt[3]{p^2r^4}\ge 3\cdot\sqrt[3]{27r^2.r^4}=9r^2$ (1), $p^2\ge 16Rr-5r^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Xin giới thiệu cùng bạn đọc 2 cách chứng minh khác được trình bày trong cuốn "Sáng tạo bất đẳng thức" của Phạm Kim Hùng.

Cách 1: Sử dụng tam thức bậc 2

Chuyển về tam thức bậc 2 của $a$ là: $f(a)=a^2+2(bc-b-c)a+(b-c)^2+1$

$\Delta'=(bc-b-c)^2-(b-c)^2-1=bc(b-2)(c-2)-1$

Nếu $bc-b-c\ge 0$ ta có ngay đpcm.

Nếu $bc-b-c\le 0$ hay $(b-1)(c-1)\le 1$. Ta chia ra làm 2 trường hợp.

Có đúng 1 trong 2 số $b,c>2$, số còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 2. Ta có ngay $\Delta'\le 0$

+ Cả hai số $b,c$ đều nhỏ hơn 2. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$b(2-b)\le 1, c(2-c)\le 1 \Rightarrow \Delta' \le 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Đặt $k=a+b+c$. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$abc\ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\Rightarrow abc\ge (k-2a)(k-2b)(k-2c)$$

Rút gọn lại ta được: $4(ab+bc+ca)-k^2\le \frac{9}{k}abc$ (*)

Bất đẳng thức của bài toán tương đương với:

$$(a+b+c)^2+2abc+1\ge 4(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)-k^2\le 1+2abc$$

Sử dụng (*) ta chỉ cần chứng minh: $\left(\frac{9}{k}-2\right)abc\le 1$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\left(\frac{9}{k}-2\right)abc\le \left(\frac{9}{k}-2\right)\frac{k^3}{27}=\frac{(9-2k)k^3}{27}\le 1$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

**Bài 7.** (Phạm Kim Hùng) Giả sử *a*, *b*, *c* là các số thực không âm. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\ge \frac{10}{(a+b+c)^2}$

Cách 1: (Của PKH)

Khai triển hai vế bằng cách gui đồng mẫu số:

$$\left(\sum_{sym}a^4+3\sum a^2b^2\right)\left(\sum_{sym}a^2+2\sum_{sym}ab\right)\ge 10\left(\sum_{sym}a^4\left(b^2+c^2\right)+2a^2b^2c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum a^6+2\sum a^4\sum ab+6_{a,b,c}\sum a^3b^3+2abc\sum_{sym}c^2(a+b)\ge 6\sum_{sym}a^4\left(b^2+c^2\right)+11a^2b^2c^2$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Để chứng minh bất đẳng thức trên ta tìm cách loại bỏ các biểu thức chứa *c*. Ta có: $4c^3\left(a^3+b^3\right)\ge 4c^4\left(a^2+b^2\right)$

$$2c(a+b)\left(a^4+b^4\right)+2c^3\left(a^3+b^3\right)+(a+b)c^5-c^4\left(a^2+b^2\right)-6c^2\left(a^4+b^4\right)$$

$$=\left(a^4+b^4-ca^3-c^3a\right)(a-c)+\left(a^4+b^4-cb^3-c^3b\right)(b-c)\ge 0$$

$$6c^3\left(a^3+b^3\right)+2c(a+b)\left(a^4+b^4\right)+c^5(a+b)\ge 5c^4\left(a^2+b^2\right)+6c^2\left(a^4+b^4\right)$$

Ngoài ra dễ thấy: $2abc\sum_{sym} c^2(a+b) \ge 12a^2b^2c^2 \ge 11a^2b^2c^2$

Như vậy với phần còn lại ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức 2 biến (thực chất là chứng minh cho trường hợp $c = 0$) như sau:

$$a^6+b^6+2ab\left(a^4+b^4\right)+6a^3b^3+2c^4ab \ge 6a^2b^2(a+b)+c^4\left(a^2+b^2\right)$$

Bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\left(a^2-b^2\right)\left(a^4-b^4\right)+2ab(a-b)\left(a^3-b^3\right) \ge 2c^4(a-b)^2+a^2b^2(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[(a+b)\left(a^3+b^3+ab^2+a^2b\right)+2ab\left(a^2+b^2+ab\right)-2c^4-a^2b^2\right] \ge 0$$

Hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$, $c = 0$ và các hoán vị.

Cách 2: Áp dụng công thức 17 ta cần CM:

$$\frac{p^2-8(2R+r)rp^2+5r^2(4R+r)^2}{4r^2\left(4R^2+6Rr+r^2\right)p^2-2p^4r^2-2r^3(4R+r)^3} \ge \frac{10}{p^2} \quad (1)$$

Đặt $f(p)$ = VT − VP. Tính $f'(p)$ với chú ý $p^2 \ge 16Rr-5r^2$ ta được $f'(p) \ge 0$

$\Rightarrow f(p) \ge f\left[\left(16Rr-5r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$. Đến đây ta chỉ việc thay $p^2 = 16Rr-5r^2$ vào (1) rồi rút gọn là ta được đpcm nhưng việc rút gọn đó khá mất thời gian và dễ nhầm lẫn. Chính vì vậy ta sẽ thay $p^2 = 16Rr-5r^2$ vào đẳng thức thứ 3 trong công thức 17. Ta cần chứng minh:

$$\frac{(8R-7r)^2+(4R+r)^2-2\left(16Rr-5r^2\right)}{(8R-7r)\left[(4R+r)^2-2\left(16Rr-5r^2\right)\right]-(16R-5r)r^2} \ge \frac{10}{16R-5r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(8R-7r)^2+16R^2-24Rr+11r^2}{(8R-7r)\left(16R^2-24Rr+11r^2\right)-(16R-5r)r^2} \ge \frac{10}{16R-5r}$$

$$\Leftrightarrow (16R-5r)\left(16R^2-24Rr+11r^2+10r^2\right) \ge (8R-7r)\left[10\left(16R^2-24Rr+11r^2\right)-(16R-5r)(8R-7r)\right]$$

$$\Leftrightarrow (16R-5r)\left(16R^2-24Rr+21r^2\right) \ge (8R-7r)\left(32R^2-88Rr+75r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (16R-5r)\left(32R^2-48Rr+42r^2\right) \ge (16R-14r)\left(32R^2-88Rr+75r^2\right)$$

Ta thấy $16R-5r \ge 16R-14r = 2(8R-7r)$,

$2\left(16R^2-24Rr+21r^2\right) \ge 32R^2-88Rr+75r^2$

Từ 2 điều trên ta có ngay đpcm, tức (1) được giải quyết

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} r=0 \\ p^2=16Rr-5r^2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b, c=0$ và các hoán vị

**Bài 8 (Vũ Đình Quý)** Cho $a$, $b$, $c>0$. CMR: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{3abc}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge 4$

***Giải***

Đặt $\frac{a}{b}=x, \frac{b}{c}=y, \frac{c}{a}=z \Rightarrow xyz=1 \ (x,y,z>0)$

Bài toán trở thành: Cho xyz = 1. CMR: $x+y+z+\frac{3}{xy+yz+zx}\ge 4$

Chuyển về $p,R,r$ ta được bài toán: Cho $pr^2=1$. CMR: $p+\frac{3}{4Rr+r^2}\ge 4$

Ta có: $p^2\ge 16Rr-5r^2\ge 3\left(4Rr+r^2\right)\ge 27r^2 \Rightarrow p^3\ge 27pr^2=27\Rightarrow p\ge 3$

$p+\frac{3}{4Rr+r^2}\ge p+\frac{9}{p^2}=3\cdot\frac{p}{3}+\frac{9}{p^2}\ge 4\cdot\sqrt[4]{\frac{p}{3}}\ge 4$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

**Bài 9.** Cho $x,y,z$ là độ dài 3 cạnh Δ và $k$ là một số thực ≥ 2,6. CMR:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+kyz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+kzx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+kxy}}\ge\frac{3}{\sqrt{1+k}} \quad (*)$$

***Giải***

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có: $\left(\sum x\right)^2\le\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+kyz}}\right)\left(\sum x\sqrt{x^2+kyz}\right)$

$\left(\sum x\sqrt{x^2+kyz}\right)^2\le\left(\sum x\right)\sum\left(x^3+kxyz\right)$. Suy ra:

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+kyz}}\ge\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{\sum x}\sqrt{x^3+y^3+z^3+3kxyz}} \quad (1)$$

Mặt khác:

$x^3+y^3+z^3+3kxyz=\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)+3\left(k+1\right)xyz$

$=2p\left(p^2+6Rr\left(k-1\right)-3r^2\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy để chứng minh được (*) chỉ cần chứng minh:

$$\frac{2p}{\sqrt{p^2+6Rr(k-1)-3r^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 4(k+1)p^2 \geq 9\left[p^2+6Rr(k-1)-3r^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (4k-5)p^2 - 54Rr(k-1) + 27r^2$$

Đặt $f(k) = (4k-5)p^2 - 54Rr(k-1) + 27r^2 \Rightarrow f'(k) = 4p^2 - 54Rr \geq 0$ (do $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$) $\Rightarrow$ $f(k)$ đồng biến theo $k$

$$\Rightarrow f(k) \geq f(2,6) = 5,4p^2 - 86,4Rr + 27r^2 = 5,4\left(p^2 - 16Rr + 5r^2\right) \geq 0$$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow k = 2,6$ và $a = b = c$.

**Bài 10.** Cho $a,b,c > 0; a+b+c+1 = 4abc$. CMR: $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

***Giải***

Chuyển về $p, R, r$ ta được bài toán tương đương như sau:

Cho $p+1 = 4pr^2$. CMR: $p^2r^2 \geq 4Rr + r^2$

Ta có: $p^2 \geq 27r^2 \Rightarrow \frac{4p^3}{27} \geq p+1 \Rightarrow p \geq 3$

Ta cần chứng minh: $p(p+1) \geq 4\left(4Rr + r^2\right)$

Mặt khác: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (1)

Do $p \geq 3$ nên $4p^2 \geq 9(p+1) \Rightarrow 4p^2 \geq 9 \cdot 4pr^2 \Rightarrow p \geq 9r^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p(p+1) \geq 4\left(4Rr + r^2\right)$ tức là bài toán đã được giải quyết

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

**Bài 11 (Nguyễn Duy Khánh).**

Cho $a,b,c \geq 0$. CMR: $\sum \frac{(a+b)^2}{ab} \geq 12 + \frac{32abc(a+b+c)\sum(a-b)^2}{\prod(a+b)^2}$

***Giải***

BIến đổi vế trái:

$$\sum\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{\sum(a+b)^2c}{abc}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)+4abc}{abc}=\frac{4Rrp+4pr^2}{pr^2}=\frac{4(R+r)}{r}$$

$$12+\frac{32abc(a+b+c)\sum(a-b)^2}{\prod(a+b)^2}=12+\frac{32p^2r^2\left[2\left(p^2-8Rr-2r^2\right)-4\left(4Rr+2r^2\right)\right]}{16p^2R^2r^2}$$

$$=12+\frac{4\left(p^2-12Rr-3r^2\right)}{R^2}$$

Theo định lý 3 ta có $p^2\le 2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R(R-2r)}(R-2r)$

Suy ra: $VP\le 12+\dfrac{4\left[2R^2-2Rr-4r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\right]}{R^2}$

$$\le 12+\frac{8(R-2r)\left(R-r+\sqrt{R(R-2r)}\right)}{R^2}\le 12+\frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{4(R+r)}{r}\ge 12+\frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}\Leftrightarrow\frac{4(R-2r)}{r}\ge\frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}\Leftrightarrow 4(R-2r)^2\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow R=2r\Leftrightarrow a=b=c$

**Bài 12 (Nguyễn Duy Khánh).**

Cho $a,b,c\ge 0$. CMR: $\dfrac{\prod(a+b)^2}{8a^2b^2c^2}\ge\prod\left(\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{a+b}\right)$

***Giải***

Chuyển về $p,R,r$ ta cần chứng minh:

$\dfrac{8x^2y^2z^2}{\prod(x+y-z)^2}\ge\dfrac{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}{x^2y^2z^2}$. Dễ thấy $VT=\dfrac{2R^2}{r^2}$

Biến đổi vế phải: VP

$$=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[\left(xy+yz+zx\right)^2-2xyz\left(x+y+z\right)\right]}{x^2y^2z^2}-1$$

$$=\frac{\left(2p^2-8Rr-2r^2\right)\left[\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2\right]}{16R^2r^2p^2}-1$$

Ta có: $\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2=p^4+2\left(4Rr+r^2\right)p^2+\left(4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2$

Mặt khác: $2\left(4Rr+r^2\right)p^2\le 9Rrp^2;\left(4Rr+r^2\right)^2\le\frac{p^2}{3}\cdot\frac{9Rr}{2}=\frac{3Rrp^2}{2}$

$$\Rightarrow\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2\le p^2\left(p^2-\frac{7Rr}{2}\right)$$

Lại có $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2\le 4R^2+\frac{7Rr}{2}$. Do đó $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\le 4R^2p^2$

Mà $x^2+y^2+z^2\le 8R^2+4r^2$. Vậy $VP\le\frac{\left(8R^2+4r^2\right)4R^2p^2}{16R^2r^2p^2}-1=\frac{2R^2}{r^2}=VT$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$ .

## E. CÁC BÀI TOÁN TỰ SÁNG TẠO

Phải nói ngay rằng "sáng tạo" ở đây không có nghĩa tôi là người đầu tiên tìm ra chúng mà chỉ là độc lập tìm ra các bài toán đó. Trong hàng triệu người yêu toán khắp cả nước không thiếu gì những người tìm ra phương pháp G.L.A. thậm chí tìm ra từ rất lâu rồi và phát triển nó ở tầm cao hơn tôi nhiều. Tuy nhiên, cho tới nay chưa có bất kì một tài liệu nào trình bày một cách hệ thống về nó cả. Cũng có những người bằng phương pháp khác tìm ra những bài toán dưới đây để minh họa cho phương pháp của họ. Do sự hạn chế trong việc đọc tài liệu nên tôi không biết chúng đã xuất hiện ở đâu chưa. Có điều những bài toán đó được tìm ra một cách dễ dàng từ những công thức rất đơn giản đã xây dựng trong phần C. Chính vì thế thùơi gian để tìm ra các bài toán dưới đây còn nhanh hơn cả việc đi tìm một bài toán trong tài liệu nào đấy rồi nhận nó là của mình để bị mang tiếng.

I. CÁC BÀI TOÁN KHÔNG ĐIỀU KIỆN

1. Cho $a,b,c>0$. CMR: $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{19}{8}$ (*)

***Giải***

Áp dụng các công thức 1 và 3 trong C ta cần phải chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{2(2R-r)}{r}+2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{4Rr+r^2}{p^2-8Rr-2r^2}\ge\frac{19}{8}\quad(1)$$

Theo định lý 5 ta có: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$. Do đó để chứng minh (1) ta chỉ cần CM:

$$\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+\frac{3}{8}\cdot\frac{4Rr+r^2}{(4R^2+4Rr+3r^2)-8Rr-2r^2}\ge\frac{19}{8}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}-2\ge\frac{3}{8}\left(1-\frac{4Rr+r^2}{4R^2-4Rr+r^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(R-2r)}{r\left[\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+4\right]}\ge\frac{3}{8}\cdot\frac{4R(R-2r)}{(2R-r)^2}\Leftrightarrow 8(2R-r)^2\ge 3Rr\left[\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+4\right]$$

Ta nhận thấy: $\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+4\le 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}\le\frac{6R}{r}$

Suy ra: $VP\le 3Rr\cdot\frac{6R}{r}=18R^2=8\left(\frac{3R}{2}\right)^2\le 8(2R-r)^2=VP$

Do đó (2) được chứng minh, tức là (*) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

2. Cho $a,b,c>0$. CMR: $8(a+b+c)^2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+64a^2b^2c^2$

$\geq 6(a+b+c)abc\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]+(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$

Áp dụng các công thức 1, 5, 14 trong C ta cần phải chứng minh:

$$8p^2\left[\left(4Rr+r^2\right)^2-2p^2r^2\right]+64p^2r^4\geq 6p^2r^2\left(2p^2-8Rr-2r^2\right)+16p^2R^2r^2$$

$$\Leftrightarrow 2(4R+r)^2-4p^2+16r^2\geq 3\left(p^2-4Rr-r^2\right)+4R^2\Leftrightarrow 4R^2+4Rr+3r^2\geq p^2$$

(đúng theo định lý 3)

Comment: Nếu bài toán trên giải bằng phương pháp đại số thì lời giải cực kì dài dòng trong khi với G.L.A lời giải lại ngắn gọn và đẹp mắt như vậy. Qua đó, ta rút ra một điều là không thể đánh giá một bài toán qua vẻ bề ngoài của nó (trông đẹp mắt hay cồng kềnh) mà phải dựa vào nội dung (tức là giải) của nó.

3. Cho $a$, $b$, $c>0$. CMR: $\dfrac{8\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\dfrac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}-1$

***Giải***

Áp dụng các công thức 1, 4 và 14 trong C ta cần chứng minh:

$$\frac{8p\left(p^2-12Rr\right)}{4pRr}\geq\frac{4\left(p^2-8Rr-2r^2\right)}{4Rr+r^2}-1\Leftrightarrow\frac{2p^2}{Rr}-24\geq\frac{4p^2}{4Rr+r^2}-9$$

$$\Leftrightarrow\frac{2p^2}{Rr}-\frac{4p^2}{4Rr+r^2}\geq 15\quad\Leftrightarrow p^2\geq\frac{15Rr(4R+r)}{2(2R+r)}$$

Ta đã biết $p^2\geq 16Rr-5r^2$ và việc chứng minh:

$16Rr-5r^2\geq\dfrac{15Rr(4R+r)}{2(2R+r)}$ là quá đơn giản ($\Leftrightarrow$ $4R^2\geq 3Rr+10r^2$)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

4. Cho $a$, $b$, $c>0$. CMR: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}\geq\dfrac{5}{3}$

***Giải***

Áp dụng công thức 4, 8, 14 ta cần chứng minh: $\dfrac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}+\dfrac{pr^2}{2p\left(p^2-12Rr\right)}\geq\dfrac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}-\frac{3}{2}\ge\frac{1}{6}-\frac{r^2}{2\left(p^2-12Rr\right)}\Leftrightarrow\frac{p^2-14Rr+r^2}{4Rr}\ge\frac{p^2-12Rr-3r^2}{6\left(p^2-12Rr\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(p^2-14Rr+r^2\right)\left(p^2-12Rr\right)\ge 2Rr\left(p^2-12Rr-3r^2\right)\ (*)$$

Do $p^2\ge 16Rr-5r^2$ nên

$$\begin{cases}2\left(p^2-14Rr+r^2\right)=\left(p^2-12Rr-3r^2\right)+\left(p^2-16Rr+5r^2\right)\ge p^2-12Rr-3r^2 & (1)\\ 3\left(p^2-12Rr\right)\ge 3\left(4Rr-5r^2\right)=4Rr+r(8R-15r)\ge 4Rr & (2)\end{cases}$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta được (*) tức là bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

**5.** Cho $a$, $b$, $c>0$. CMR: $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{19}{8}$

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+9\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge 15\ (1)$$

***Giải***

Áp dụng công thức 1 và 3 ta cần chứng minh:

$$\frac{2(2R-r)}{r}+9\sqrt{\frac{4Rr+r^2}{p^2-8Rr-2r^2}}\ge 15\quad (*)$$

Theo định lý 5 ta có: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$. Do đó để chứng minh (*) ta chỉ cần chứng minh: $\frac{4R-2r}{r}+9\cdot\frac{\sqrt{4Rr+r^2}}{2R-r}\ge 15\Leftrightarrow\frac{4R-2r}{r}-6\ge 9\left(1-\frac{\sqrt{4Rr+r^2}}{2R-r}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{4(R-2r)}{r}\ge 9\cdot\frac{4R(R-2r)}{(2R-r)\left(2R-r+\sqrt{4Rr+r^2}\right)}\Leftrightarrow(2R-r)\left(2R-r+\sqrt{4Rr+r^2}\right)\ge 9Rr$$

Ta có: $VT\ge(2R-r)\left(2R-r+\sqrt{9r^2}\right)=4R^2+2Rr-2r^2\ge 9Rr=VP$

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

**6.** Cho $a$, $b$, $c>0$. CMR: $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{162abc}{(a+b+c)^3}\ge 9$

***Giải***

Áp dụng công thức 3 và 14 ta cần chứng minh:

$$\frac{p\left(p^2-12Rr\right)}{pr^2}+\frac{162pr^2}{p^3}\geq 9 \Leftrightarrow \frac{p^2-12Rr}{r^2}+\frac{162r^2}{p^2}\geq 9$$

Đặt $f\left(p\right)=\frac{p^2-12Rr}{r^2}+\frac{162r^2}{p^2} \Rightarrow f'\left(p\right)=\frac{2p}{r^2}-\frac{324r^2}{p^3}=\frac{2\left(p^4-162r^4\right)}{p^3r^2}\geq 0$

Do đó $f(p)$ đồng biến theo $p$ tức là $f\left(p\right)\geq f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)$

Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{16Rr-5r^2-12Rr}{r^2}+\frac{162r^2}{16Rr-5r^2}\geq 9 \Leftrightarrow \frac{4R-5r}{r}-3\geq 6-\frac{162r}{16R-5r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(R-2r\right)}{r}\geq 6\cdot\frac{16\left(R-2r\right)}{16R-5r} \Leftrightarrow 16R-5r\geq 24r \Leftrightarrow 16R\geq 29r \text{ (đúng)}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

**Mở rộng:** Tìm hằng số $k$ tốt nhất sao cho BĐT sau luôn đúng:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{kabc}{(a+b+c)^3}\geq 3+\frac{k}{27}.$$

Với cách làm tương tự ta dễ dàng tìm được $k=\frac{729}{4}$

**8.** Chứng minh rằng với mọi $a$, $b$, $c$ dương ta có:

$$\frac{abc(a+b+c)}{a^4+b^4+c^4}+\frac{12\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}\geq 5 \quad (*)$$

***Giải***

Áp dụng các công thức 1, 4, 5 và 14 ta cần chứng minh:

$$\frac{p^2r^2}{p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}+\frac{12p\left(p^2-12Rr\right)}{p\left(p^2-8Rr-2r^2\right)}\geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{12\left(p^2-12Rr\right)}{p^2-8Rr-2r^2}-4\ge 1-\frac{p^2r^2}{p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(2p^2-28Rr+2r^2\right)}{p^2-8Rr-2r^2}\ge \frac{p^4-\left(16Rr+r^2\right)p^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}{p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\left(p^2-14Rr+r^2\right)}{p^2-8Rr-2r^2}-\frac{p^4-\left(16Rr+r^2\right)p^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}{p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}\ge 0 \ (1)$$

Đặt VT của (1) là $f(p)$. Ta có $f\backslash(p) \ge 0$, do đó $f\left(p\right)\ge f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)$

Mà $f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)=\frac{8\left(2Rr-4r^2\right)}{8Rr-7r^2}-\frac{2\left(4R+r\right)^2-6\left(16Rr-5r^2\right)}{2\left(4R+r\right)^2-5\left(16Rr-5r^2\right)}$

$$=\frac{16(R-2r)}{8R-7r}-\frac{16(R-2r)(2R-r)}{32R^2-64Rr+27r^2}=\frac{32(R-2r)^2(8R-5r)}{(8R-7r)\left(32R^2-64Rr+27r^2\right)}\ge 0$$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

**9.** Cho $a$, $b$, $c>0$. CMR: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge \frac{7}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{5}{6}\cdot\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ (*)

***Giải***

Áp dụng công thức 1, 3 và 6 ta cần chứng minh:

$$\frac{4R-2r}{r}\ge \frac{7}{2}\cdot\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}+\frac{5}{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$$

$$\Leftrightarrow 6(4R-2r)\ge 21\cdot\frac{4R^2-4Rr+r^2}{4R+r}+5\left(\sqrt[3]{\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)r}-3r\right)$$

$$\Leftrightarrow 24(R-2r)\ge 21\cdot\frac{4R(R-2r)}{4R+r}+5\cdot\frac{4(R-2r)(R+3r)}{A^2+3rA+9r^2}$$

(trong đó $A=\sqrt[3]{\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)r}$ )

$$\Leftrightarrow 6(4R+r)\ge 21R+\frac{5r(R+3r)(4R+r)}{A^2+3rA+9r^2}\Leftrightarrow 3(R+2r)\left(A^2+3rA+9r^2\right)\ge 5r(R+3r)(4R+r)$$

Ta có: $A^2+3rA\ge 2\sqrt{A^3 3r}=2\sqrt{3r^2\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)}$

Suy ra: $3\left(A^2+3rA\right)\geq 2r\sqrt{27\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)}\geq 2r\left(10R+7r\right)$

Do đó trong (2) thì $VT\geq r\left(R+2r\right)\left(20R+41r\right)\geq VP$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

**Bài 11.** Cho $a$, $b$, $c\geq 0$. CMR:

$$\frac{a}{a^2+2bc}+\frac{b}{b^2+2ca}+\frac{c}{c^2+2ab}\leq\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

***Giải***

Trước tiên ta thấy ngay $VP=\dfrac{p}{4Rr+r^2}$. Công việc ta cần làm trước tiên là qui VT về $p,R,r$

Ta có: $VT=\dfrac{\sum\left[a\left(b^2+2ca\right)\left(c^2+2ab\right)\right]}{\left(a^2+2bc\right)\left(b^2+2ca\right)\left(c^2+2ab\right)}$

$$=\frac{2(a+b+c)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4abc\left(a^2+b^2+c^2\right)-abc(ab+bc+ca)}{9a^2b^2c^2+4abc\left(a^3+b^3+c^3\right)+2\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right)}$$

Áp dụng các đẳng thức 1, 4, 14, 16 ở phần C ta được:

$$VT=\frac{2p\left[\left(4Rr+r^2\right)^2-2p^2r^2\right]+4pr^2\left(p^2-8Rr-2r^2\right)-pr^3(4R+r)}{9p^2r^4+4p^2r^2\left(p^2-12Rr\right)+2r^3\left[(4R+r)^3-12p^2R\right]}$$

$$=\frac{2pr^2(4R+r)^2-4p^3r^2+4p^3r^2-8pr^3(4R+r)-pr^3(4R+r)}{9p^2r^4+4p^4r^2-48Rr^3p^2+2r^3(4R+r)^3-24Rp^2r^3}$$

$$=\frac{2pr^2(4R+r)^2-9pr^3(4R+r)}{9p^2r^4+4p^4r^2+2r^3(4R+r)^3-72Rp^2r^3}=\frac{p\left[2(4R+r)^2-9r(4R+r)\right]}{9p^2r^2+4p^4+2r(4R+r)^3-72Rrp^2}$$

Ta cần CM: $VT\leq\dfrac{p}{4Rr+r^2}\Leftrightarrow\dfrac{2(4R+r)^2-9r(4R+r)}{9p^2r^2+4p^4+2r(4R+r)^3-72Rrp^2}\leq\dfrac{1}{4Rr+r^2}$

Đặt $p^2=t$ và $f(t)=\dfrac{1}{9tr^2+4t^2+2r(4R+r)^3-72Rrt}$

$$f'(t)=-\frac{8t+9r^2-72Rr}{\left[9tr^2+4t^2+2r(4R+r)^3-72Rrt\right]^2}<0\quad(\text{do } t\geq 16Rr-5r^2\geq 9Rr)$$

Do đó $f(t)$ nghịch biến theo $t$ tức là $f(t) \le f\left(16Rr - 5r^2\right)$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2(4R+r)^2 - 9r(4R+r)}{9\left(16Rr - 5r^2\right)r^2 + 4\left(16Rr - 5r^2\right)^2 + 2r(4R+r)^3 - 72Rr\left(16Rr - 5r^2\right)} \le \frac{1}{4Rr + r^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(4R+r)^3 - 9r(4R+r)^2 \le 2(4R+r)^3 + 4r(16R-5r)^2 + 9r^2(16R-5r) - 72Rr(16R-5r)$$

$$\Leftrightarrow 4(16R-5r)^2 + 9r(16R-5r) + 9(4R+r)^2 - 72R(16R-5r) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(256R^2 - 160Rr + 25r^2\right) + 144Rr - 45r^2 + 9\left(16R^2 + 8Rr + r^2\right) - 1152R^2 + 360Rr \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 16R^2 - 64Rr + 64r^2 \ge 0 \Leftrightarrow 16(R-2r)^2 \ge 0$$

Comment: Để chứng minh bài toán trên ta còn vài lời giải khác tuy nhiên lời giải nào cũng phải dùng đến những phân tích rất phức tạp do đó rất dễ nhầm lẫn. Giải bằng G.L.A. do ta dễ xây dựng sẵn những công thức cơ bản nên tiện cho việc kiểm tra và ta lại có thể xét đạo hàm xem biểu thức sau khi qui về $p, R, r$ là đồng biến hay nghịch biến để qui $p$ về $R$ và $r$ một cách thích hợp. Việc giảm được 1 biến trong những bài toán cồng kềnh như thế này có ý nghĩa rất lớn lao.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 2r \\ \begin{cases} p^2 = 16Rr - 5r^2 \\ r = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow I \equiv G \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c \\ a = b, c = 0 \text{ (hoặc các hoán vị)} \end{array}\right.$

**Bài 12.** Cho $a$, $b$, $c > 0$. CMR: $\dfrac{a^3 + 2abc}{b+c} + \dfrac{b^3 + 2abc}{c+a} + \dfrac{c^3 + 3abc}{a+b} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{2}$ (1)

***Giải***

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^3 + b^3 + c^3 + 2abc\right)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) - \sum \frac{a^3 + b^3}{a+b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3 + b^3 + c^3 + 2abc\right)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \ge \frac{5}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Áp dụng các đẳng thức $1,3,12,14$ phần C ta cần chứng minh:

$$\left[p\left(p^2 - 12Rr\right) + 2pr^2\right] \cdot \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4Rrp} \ge \frac{5}{2}\left(p^2 - 8Rr - 2r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(p^2 - 12Rr + 2r^2\right)\left(p^2 + 4Rr + r^2\right)}{4Rr} \ge \frac{5}{2}\left(p^2 - 8Rr - 2r^2\right) \text{ (*)}$$

Đặt $p^2 = t$ và $f(t) = VT - VP$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{t + 4Rr + r^2 + t - 12Rr + 2r^2}{4Rr} - \dfrac{5}{2}$

$= \dfrac{2t - 8Rr + 3r^2}{4Rr} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{2t - 18Rr + 3r^2}{4Rr} \ge 0$ (do $t \ge 16Rr - 5r^2$)

Do đó $f(t)$ đồng biến theo $p$ tức là để (*) ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $p^2 = 16Rr - 5r^2$ hoặc $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ (tùy độ chặt)

Mặt khác:

$$\frac{\left[(16Rr - 5r^2) - 12Rr + 2r^2\right]\left[(16Rr - 5r^2) + 4Rr + r^2\right]}{4Rr} \ge \frac{5}{2}\left[(16Rr - 5r^2) - 8Rr - 2r^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4Rr - 3r^2)(20Rr - 4r^2)}{4Rr} \ge \frac{5}{2}(8Rr - 7r^2) \Leftrightarrow \frac{(4R - 3r)(5R - r)}{R} \ge \frac{5}{2}(8R - 7r)$$

$$\Leftrightarrow 2(20R^2 - 19Rr + 3r^2) \ge 40R^2 - 35Rr \Leftrightarrow 6r^2 \ge 3Rr \Leftrightarrow 2r \ge R \quad (**)$$

Dễ thấy (**) là một BĐT sai và khi thay $p^2 = 16Rr - 5r^2$ vào (*) thì ta thấy độ chênh giữa VT và VP là rất nhỏ. Do đó ta hoàn toàn tự tin rằng khi thay $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ và (*) thì ta sẽ có được điều phải chứng minh mặc dù $\dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ là một đại lượng rất bé. Trong quá trình giải bài việc biến đổi dẫn đến một bất đẳng thức ngược dấu như (**) là không thể tránh khỏi. Rõ ràng để "chắc ăn" ta sẽ thay $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ và (*) nhưng việc làm này lại cồng kềnh hơn so với thay $p^2 = 16Rr - 5r^2$ rất nhiều. Qua phân tích trên ta đã thấy bắt buộc phải thay $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ vào rồi nhưng liệu có phải cần thiết cứ ở đâu có $p^2$ là đều thay bằng $16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ hay không? Với một bạn có "sức khỏe" và khả năng tính toán tốt thì cứ việc thay hết vào nhưng cá nhân tôi thì có một nguyên tắc biến đổi càng đơn giản càng tốt. Quay trở lại việc thay $p^2 = 16Rr - 5r^2$ vào (*), liệu đây có phải là một việc làm vo tác dụng không? Xin trả lời là "không" vì qua quá trình đó ta đã ước lượng được độ chênh giữa VT – VP do đó có "cảm nhận" rằng chỉ cần thay $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ vào biểu thức $p^2 - 4Rr + r^2$ còn trong biểu thức

$p^2+4Rr+r^2$ chỉ cần thay $p^2=16Rr-5r^2$ thôi và tất nhiên ở VP thì buộc phải thay $p^2=16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$. Tiếp tục quá trình phân tích, về việc tính toán thì khi thay $p^2=16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$ vào một trong hai biểu thức $p^2+4Rr+r^2$ và $p^2-12Rr+2r^2$ và biểu thức còn lại là $p^2=16Rr-5r^2$ thì độ phức tạp trong tính toán là tương đương nhưng khi thay $p^2=16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$ vào trong biểu thức $p^2+4Rr+r^2$ thì ta dôi ra được lượng $p^2-12Rr+2r^2$ còn vào trong biểu thức $p^2-12Rr+2r^2$ lượng dôi ra (so với khi thay $p^2=16Rr-5r^2$) là $p^2+4Rr+r^2$. Chính vì thế việc thay $p^2=16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$ vào biểu thức $p^2-12Rr+2r^2$ là tốt hơn rất nhiều so với thay vào biểu thức $p^2+4Rr+r^2$. Với những bạn đã "dày dạn" kinhnghiệm "chiến đấu" thì nhìn lướt qua là có thể biết thay như thế nào cho hợp lý rồi, còn với những bạn mới làm quen với BĐT thì quá trình phân tích trên sẽ giúp cho các bạn phần nào khi giải những bài tập sau này. Bây giờ ta bắt đầu quá trình thay nhé!

$$\frac{\left(16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}-12Rr+2r^2\right)\left(16Rr-5r^2+4Rr+r^2\right)}{4Rr}$$

$$\geq\frac{5}{2}\left(16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}-8Rr-2r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(4Rr-3r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}\right)\left(20Rr-4r^2\right)}{4Rr}\geq\frac{5}{2}\left(8Rr-7r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(4R-3r+\frac{r(R-2r)}{R}\right)(5R-r)}{R}\geq\frac{5}{2}\left(8R-7r+\frac{r(R-2r)}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(20R^2-19Rr+3r^2\right)+\frac{2r(R-2r)(5R-r)}{R}\geq 40R^2-35Rr+5r(R-2r)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2r(R-2r)(5R-r)}{R}\geq 8r(R-2r)\Leftrightarrow 5R-r\geq 4R\Leftrightarrow R\geq r \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R=2r \\ \begin{cases} I \equiv G \\ r=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a=b, c=0 \end{array}\right.$ (hoặc các hoán vị)

**Bài 13.** Cho $a$, $b$, $c > 0$. CMR:

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab} \le \frac{9}{4(ab+bc+ca)} \text{ với } a+b+c=1 \ (*)$$

***Giải***

Biến đổi vế trái. Do $a+b+c=1$ nên $p=1$.

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}=\frac{\sum(a+bc)(b+ca)}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}$$

$$=\frac{(ab+bc+ca)+\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]+abc(a+b+c)}{abc+\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+abc\left(a^2+b^2+c^2\right)+a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{4Rr+r^2+(a+b)(b+c)(c+a)-2abc+p^2r^2}{pr^2+r^2(4R+r)^2-2p^2r^2+pr^2\left(p^2-8Rr-2r^2\right)+p^2r^4}$$

$$=\frac{4Rr+r^2+4Rr-2r^2+r^2}{r^2+r^2(4R+r)^2-2r^2+r^2\left(1-8Rr-2r^2\right)+r^4}=\frac{8Rr}{r^2(4R+r)^2-r^3(8R+2r)+r^4}$$

$$=\frac{8R}{r(4R+r)^2-r^2(8R+2r)+r^3}=\frac{8R}{16R^2r}=\frac{1}{2Rr}$$

Vậy ta cần phải chứng minh: $\frac{1}{2Rr} \le \frac{9}{4\left(4Rr+r^2\right)} \Leftrightarrow 2r \le R$ (đúng)

Tức là (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

**Bài 14.** Cho $a,b,c>0; ab+bc+ca=1$. CMR: $\frac{(a+b+c)^3}{abc} \ge 25\left(a^2+b^2+c^2\right)+2$ (*)

***Giải***

Trước tiên dựa vào điều kiện ta đi tìm bài toán gốc của (*)

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^3}{abc} \ge 24\left(a^2+b^2+c^2\right)+(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc} \geq \frac{24\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{24\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2} \quad (1)$$

(1) chính là bài toán gốc sau khi đã loại bỏ điều kiện. Với những bạn mới làm bất đẳng thức thì ngay việc đưa về dạng (1) cũng gặp nhiều khó khăn. Nhưng với cả những bạn luyện nhiều bất đẳng thức rồi thì qui về dạng (1) rồi cũng chưa biết nên làm theo cách nào. Dạng (1) chính là dạng sở trường của S.O.S. nhưng lần này lựa chọn S.O.S để giải lại không mấy sáng suốt. Các bạn hãy giải thử sẽ thấy ngay những khó khăn gặp phải. Khi đã biết G.L.A. thì việc giải bài trên khôg mấy khó khăn. Ta cần phải chứng minh: $\frac{4Rrp}{pr^2} \geq \frac{24\left(p^2-8Rr-2r^2\right)}{p^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} \geq \frac{6\left(p^2-8Rr-2r^2\right)}{p^2} \quad (**)$$

Ta thấy ngay VP đồng biến theo *p*, vấn đề bây giờ là chọn cận trên nào để giải quyết bài toán. Dùng định lý $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ có đủ mạnh để giải quyết bài toán không? Áp dụng định lý (2) $p^2 \leq 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$ thì chắc chắn sẽ giải quyết được bài toán nếu như bài toán đúng. Tuy nhiên ta rất hạn chế sử dụng định này bởi nó quá cồng kềnh. Quan sát một tí thì ta thấy bất đẳng thức (1) trở thành đẳng thức khi $a=b=c$ hoặc $a=2b=2c$ và các haón vị trong khi định lý $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ chỉ xảy ra đẳng thức khi tam giác là tam giác đều. Do vậy ta không thể áp dụng định lý này và dù không muốn nhưng ta cũng buộc lòng phải áp dụng (2).

(**) sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\frac{R}{r} \geq \frac{6\left[\left(2R^2+10Rr+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}-r^2\right)-8Rr-3r^2\right]}{2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}}$$

$$\Leftrightarrow 2R^3+10R^2r-Rr^2+2R(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \geq 12R^2r+12Rr^2-18r^3+12r(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow 2R^3-2R^2r-13Rr^2+18r^3 \geq 2(6r-R)(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)\left(2R^2+2Rr-9r^2\right) \geq 2(6r-R)(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$\Leftrightarrow 2R^2+2Rr-9r^2\ge 2(6r-R)\sqrt{R(R-2r)}$ (3)

Nếu $6r\le R$ thì ta có ngay VT ≥ 0 ≥ VP

Nếu $6r>R$ thì (3) tương đương với:

$(2R^2+2Rr-9r^2)^2\ge(4R^2-48Rr+144r^2)(R-2r)R$

$\Leftrightarrow 4R^4+4R^2r^2+81r^4+8R^3r-36Rr^3-36R^2r^2$

$\ge(4R^3-48R^2r+144Rr^2-8R^2r+96Rr^2-288r^3)R$

$\Leftrightarrow 4R^4+8R^3r-32R^2r^2-36Rr^3+81r^4\ge(4R^3-56R^2r+240Rr^2-288r^3)R$

$\Leftrightarrow 64R^3r-272R^2r^2+252Rr^3+81r^4\ge 0\Leftrightarrow 64R^3-272R^2r+252Rr^2+81r^3\ge 0$

$\Leftrightarrow 64R\left(R-\frac{9}{4}r\right)^2+16r\left(R-\frac{9}{4}r\right)^2\ge 0$ (đúng)

Vậy $\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge 25(a^2+b^2+c^2)+2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$ hoặc $a=2b=2c$ và các haớn vị

Comment: Trường hợp đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ thì dễ nhận thấy rồi nhưng còn trường hợp đẳng thức xảy ra khi $a=2b=2c$ thì ta tìm ra như sau. Theo lời giải bằng G.L.A thì đẳng thức xảy ra khi và chỉkhi:

$$\left[\begin{array}{l} R=2r \\ \begin{cases} p^2=2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \\ R=\frac{9}{4}r \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=b=c \\ \begin{cases} \text{O nằm gi ữ a I và K} \\ R=\frac{9}{4}r \end{cases} \end{array}\right.$$

Điều kiện O nằm giữa I và K cho ta biết tam giác đó phải là tam giác cân còn điều kiện $R=\frac{9}{4}r$ sẽ giúp ta tìm ra được một đẳng thức nữa là $a=2b=2c$ (Xin nhắc lại 1 chút là K là điểm sao cho $\overline{IK}=3\overline{IG}$ )

Lời giải trên nếu tóm ngắn lại cũng chỉ hơn 10 dòng nhưng ở phần sau các bạn sẽ thấy bài trên có thể giải trong 5 dòng sau khi đưa thêm một số lý thuyết từ $p,R,r$ vào G.L.A.

**Bài 15.** Cho $a$, $b$, $c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. CMR:

$$\frac{a^2}{5a+1}+\frac{b^2}{5b+1}+\frac{c^2}{5c+1} \le \frac{1}{8\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

***Giải***

Biến đổi VT:

$$VT=\frac{\sum a^2(5b+1)(5c+1)}{(5a+1)(5b+1)(5c+1)}=\frac{25abc(a+b+c)+5\sum\left[a^2(b+c)\right]+\left(a^2+b^2+c^2\right)}{125abc+25(ab+bc+ca)+5(a+b+c)+1}$$

$$=\frac{25p^2r^2+5\left(4Rrp-2pr^2\right)+p^2-8Rr-2r^2}{125pr^2+25\left(4Rr+r^2\right)+5p+1}$$

$$=\frac{25r^2+5\left(4Rr-2r^2\right)+1-8Rr-2r^2}{125r^2+25\left(4Rr+r^2\right)+5+1}=\frac{13r^2+12Rr+1}{150r^2+100Rr+6}=\frac{13r^2+12Rr+p^2}{150r^2+100Rr+6p^2}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{13r^2+12Rr+p^2}{150r^2+100Rr+6p^2}\le\dfrac{1}{8\sqrt{3(ab+bc+ca)}}=\dfrac{p}{8\sqrt{3\left(4Rr+r^2\right)}}$

Xét $f(p)=VP-VT$, suy ra

$$f'(p)=\frac{1}{8\sqrt{3\left(4Rr+r^2\right)}}-\frac{2p\left(150r^2+100Rr+6p^2\right)-12p\left(13r^2+12Rr+p^2\right)}{\left(150r^2+100Rr+6p^2\right)^2}$$

$\dfrac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}}-\dfrac{p\left(36r^2+14Rr\right)}{\left(75r^2+50Rr+3p^2\right)^2}$. Xét $g(p)=\dfrac{p\left(36r^2+14Rr\right)}{\left(75r^2+50Rr+3p^2\right)^2}$

$$\Rightarrow\ g'(p)=\frac{\left(36r^2+14Rr\right)\left(75r^2+50Rr-9p^2\right)}{\left(75r^2+50Rr+3p^2\right)^3}.$$

Do $p^2\ge 16Rr-5r^2$ và $R\ge 2r$ nên g’($p$) ≤ 0 ⇒ g($p$) nghịch biến theo $p$, tức là:

$$f'(p)\ge\frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}}-\frac{\sqrt{(16R-5r)r}\left(36r^2+14Rr\right)}{\left[75r^2+50Rr+3\left(16Rr-5r^2\right)\right]^2}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}}-\frac{\sqrt{(16R-5r)r}\left(36r^2+14Rr\right)}{\left(60r^2+98Rr\right)^2}$$

Nhận thấy $4\left(14Rr+36r^2\right)=56Rr+144r^2\le 98Rr+60r^2$

$2\sqrt{3r(4R+r)}\sqrt{(16R-5r)r} \le 2r(16R-5r) \le 98Rr + 60r^2$

Từ 2 điều trên ra thấy ngay $f'(p) \ge 0 \Rightarrow f(p)$ đồng biến theo $p$.

Vậy ta sẽ chứng minh được $f(p) \ge 0$ nếu chứng minh được $f\left(\sqrt{(16R-5r)r}\right) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{16R-5r}}{8\sqrt{3(4R+r)}} \ge \frac{13r^2+12Rr+(16R-5r)r}{150r^2+100Rr+6(16R-5r)r} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{16R-5r}{3(4R+r)}} \ge \frac{56R+16r}{49R+30r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16R-5r}{3(4R+r)} - 1 \ge \left(\frac{56R+16r}{49R+30r}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{4(R-2r)}{3(4R+r)} \ge \frac{(7R-14r)(105R+46r)}{(49R+30r)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(49R+30r)^2 \ge 21(105R+46r)(4R+r) \Leftrightarrow 784R^2 + 5571Rr + 2604r^2 \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

**Bài 16.** Cho $a,b,c \ge 0$. CMR: $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}} + \frac{16}{5} \cdot \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \frac{7}{5}$

***Giải***

Áp dụng các công thức 1 và 14 phần C ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}} + \frac{4r}{5R} \ge \frac{7}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}} - 1 \ge \frac{2}{5} - \frac{4r}{5R}$$

Theo định lý 6 ta có: $p^2 \ge 16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R}$ nên: