Tìm cực trị từ tính chất của điểm cực trị

- Trần Nam Dũng
Trường Đại học KHTN Tp Hồ Chí Minh

Bài toán cực trị là một trong những dạng toán thường gặp trong chương trình toán phổ thông, và đặc biệt thường xuất hiện trong các bài toán Olympic. Đó có thể là bài toán cực trị đại số, cực trị hình học, cực trị số học hay cực trị tổ hợp. Và phương pháp giải, công cụ sử dụng cũng rất khác nhau: phương pháp giải tích, phương pháp đại số, phương pháp xác suất ...

Trong bài viết này, chúng ta thử đưa ra một cách nhìn chung cho các phương pháp trên: để tìm cực trị, ta sẽ đi nghiên cứu tính chất của các điểm cực trị, nghiên cứu tính chất của các cấu hình tối ưu và từ các tính chất đó tìm ra các điểm cực trị.

Hướng tiếp cận này không phải là mới mà là một hướng tiếp cận rất kinh điển. Ở đây, qua các Ví dụ minh họa, chúng ta sẽ làm rõ thêm hiệu quả của hướng tiếp cận này, cũng như phân tích các kỹ thuật cụ thể để có thể nghiên cứu tính chất điểm cực trị.

1. Hàm một biến và nguyên lý Fermat

Khi nghiên cứu cực trị hàm một biết, có một nguyên lý mà ai cũng biết đến: nếu hàm số f là khả vi thì mỗi một điểm cực tiểu (cực đại) địa phương của nó đều là điểm dừng, tức là là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Về điều này trước Fermat cũng đã từng được nhắc tới:

"Về cả hai phía của điểm có giá trị lớn nhất sự giảm ban đầu không đáng kể"
(Johan Kepler)

Bổ đề 1. Fermat cho ta một tính chất quan trọng, mang tính đặc trưng của các điểm cực trị (của hàm khả vi): điểm cực trị phải là điểm dừng. Điều ngược lại không đúng: điểm dừng có thể không phải là điểm cực trị của hàm số, như ví dụ đơn giản sau: hàm x^3 tại điểm x = 0. Để tìm các giá trị cực trị của hàm số f, ta giải phương trình $f'(x) = 0$, tìm được tất cả các điểm dừng là những điểm "nghi can" cho các giá trị cực trị. Sau đó ta sử dụng định lý tồn tại: một hàm số liên tục trên đoạn [a, b] sẽ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đó. Ta sẽ coi định lý này là hiển nhiên về mặt hình học và bỏ qua phép chứng minh đó. Như vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục, khả vi trên đoạn [a, b] tồn tại và ta chỉ cần tìm các giá trị này tại các điểm dừng và hai đầu mút.

Đối với các hàm số xác định trên các tập không đóng như R và (a, b), ta cần đến các bổ đề sau:

Bổ đề 2. 1. Nếu hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và $f(x)\to+\infty$ khi $|x|\to+\infty$ thì nó đạt được giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}$.

Bổ đề 3. 2. Nếu hàm số $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ liên tục và $f(x)\to+\infty$ khi $x\to a$ và $x\to b$ thì nó đạt được giá trị nhỏ nhất trên (a,b).

Điều kiện tồn tại giá trị lớn nhất cũng được phát biểu tương tự. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một Ví dụ kinh điển.

Ví dụ 1. Định luật Snellius. Tia sáng cắt đường biên của hai môi trường, vào với góc α và ra với góc β (góc giữa tia sáng với đường vuông góc với đường biên tại điểm cắt). Khi đó $\dfrac{\sin\alpha}{v_a}=\dfrac{\sin\beta}{v_b}$, trong đó va, vb là vận tốc ánh sáng trong các môi trường đó.

Lời giải. Ta sẽ sử dụng nguyên lý Fermat trong quang học: ánh sáng trong đường đi của mình từ một điểm đến một điểm luôn chọn đường đi ngắn nhất về mặt thời gian. Nếu ta lấy trên tia sáng hai điểm A, B nằm về hai phía đối với đường biên, còn chính đường biên ký hiệu là ℓ là ta thu được bài toán tìm cực tiểu: $\begin{cases} f(M)=\dfrac{AM}{v_a}+\dfrac{BM}{v_b}\to\min \\ M\in\ell \end{cases}$

Giá trị nhỏ nhất tồn tại, điều này được đảm bảo bởi bổ đề 1. Gọi điểm mà hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là M_0. Vấn đề là tính đạo hàm của hàm số f. Điều này có thể làm thế nào? Ta có thể thực hiện điều này bằng cách tìm ra biểu thức hàm số f sử dụng định lý Pythagore:

Gọi AH, BK là đường vuông góc hạ từ A, B tương ứng xuống. Đặt AH = a, BK = b và HK = c. Đặt HM = x thì ta có $AM=\sqrt{a^2+x^2}$, $BH=\sqrt{b^2+(c-x)^2}$.

Từ đó

$f(M)=g(x)=\sqrt{a^2+x^2}/v_a+\sqrt{b^2+(c-x)^2}/v_b$.

Theo bổ đề 1 thì f(M) đạt được giá trị nhỏ nhất tại một điểm M_0 nào đó. Và theo nguyên lý Fermat thì $f'(M_0)=0$. Nhưng $f'(M)=g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_a}-\dfrac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}v_b}$.

Từ đó $f'(M_0)=0$ hay $\dfrac{x_0}{\sqrt{a^2+x^2}v_a}-\dfrac{c-x_0}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}v_b}\Leftrightarrow\dfrac{\sin\alpha}{v_a}=\dfrac{\sin\beta}{v_b}$.

Định luật Snellius cho chúng ta một tính chất quan trọng của đường đi của ánh sáng qua các môi trường không đồng chất, và nhiều bài toán quan trọng (Ví dụ bài toán đường đoản thời - đường đi ngắn nhất về thời gian của 1 viên bi từ điểm A đến điểm B) được giải nhờ vào định luật (thực ra là định lý) này.

Nguyên lý Fermat có thể áp dụng khá hiệu quả trong các bài toán cực trị hàm một biến, đây là một trong những phương pháp quan trọng trong chương trình toán phổ thông. Ta xem xét một số ví dụ.

Ví dụ 2. Có một miếng thép kích thước $1m\times 1m$. Người ta muốn làm từ tấm thép một hình hộp không đáy bằng cách cắt ở 4 góc các hình vuông kích thước $x\times x$, gấp lên rồi hàn lại. Hỏi phải chọn x bằng bao nhiêu để thể tích hình hộp là lớn nhất?

Lời giải. Rõ ràng ta phải có $0 \le x \le 1/2$. Thể tích hình hộp là $V(x) = x(1-2x)^2$. Với bài toán này, chỉ cần một chút khéo léo là ta có thể dùng bất đẳng thức Cô-si để tìm ra giá trị lớn nhất. Tuy nhiên, sử dụng phương pháp hàm số sẽ là phương pháp tự nhiên và không đòi hỏi bất cứ một sự sáng tạo đặc biệt nào:

$$V'(x) = 12x^2 - 8x + 1 = (2x-1)(6x-1).$$

Từ đó ta có V(x) chỉ có thể đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các điểm 0 (biên), 1/6 (điểm dừng), 1/2 (biên). Vì V(0) = V(1/2) = 0, V(1/6) = 2/27 nên ta suy ra $V_{max} = 2/27$ khi x = 1/6.

Bài tập 1. Hãy giải bài toán trên với miếng thép có kích thước $a \times b$ bằng một trong các phương pháp sau

a) Dùng bất đẳng thức Cauchy ;

b) Dùng đạo hàm.

Ví dụ 3. Qua một điểm nằm trong một góc cho trước, hãy kẻ đoạn thẳng có độ dài ngắn nhất có đầu mút nằm trên các cạnh của góc.

Lời giải.

Bổ đề 4. 1 đảm bảo sự tồn tại của đoạn thẳng ngắn nhất. Giả sử đoạn thẳng ngắn nhất là AB và điểm nằm trong góc là M. Qua M ta kẻ một đường thẳng khác là A'B'. Gọi γ là góc có hướng giữa A'B' và AB. Hàm số $f(\gamma) = A'B'$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $\gamma = 0$ do đó $f'(0) = 0$. Đặt $\alpha = \angle OAB$, $\beta = \angle OBA$ trong đó O là đỉnh của góc. Sử dụng định lý hàm số sin cho các tam giác MAA' và MBB', ta có

$$MA' = MA\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)}, \quad MB' = MB\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\Delta f = A'B' - AB &= MA' + MB' - MA - MB \\ &= MA\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)} - 1\right) + MB\left(\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} - 1\right) \\ &= MA\frac{2\sin(\gamma/2)\cos(\alpha-\gamma/2)}{\sin(\alpha-\gamma)} - MB\frac{2\sin(\gamma/2)\cos(\alpha+\gamma/2)}{\sin(\alpha+\gamma)}\end{aligned}$$

Như vậy $\dfrac{\Delta f}{\Delta\gamma} = \dfrac{2\sin(\gamma/2)}{\gamma}\left(MA\dfrac{\cos(\alpha-\gamma/2)}{\sin(\alpha-\gamma)} - MB\dfrac{\cos(\alpha+\gamma/2)}{\sin(\alpha+\gamma)}\right)$

Cho $\gamma \to 0$, ta được

$$f'(0) = MA\cot(\alpha) - MB\cot(\beta).$$

Nhưng vì f'(0) = 0 nên ta có $MA\cot(\alpha) = MB\cot(\beta)$. Kết quả này có ý nghĩa hình học như thế nào? Hạ đường vuông góc OH xuống AB. Dễ dàng kiểm tra được rằng $HB/HA = \cot(\beta)/\cot(\alpha)$. Mặt khác $MA/MB = \cot(\beta)/\cot(\alpha)$, suy ra MA = HB, MB = HA. Như vậy,

Đoạn thẳng ngắn nhất AB được đặc trưng bởi tính chất sau: Hình chiếu của O lên AB đối xứng với M qua trung điểm của AB.

Nhận xét 1. Tại sao chúng ta chỉ tìm ra đặc trưng hình học của đoạn thẳng AB mà không nêu ra cách dựng của nó? Vấn đề là với một vị trí tổng quát, lời giải này không thể dựng được bằng thước và com-pa. Trong thực tế, có nhiều bài toán cực trị ta chỉ đưa ra được các tính chất đặc trưng của lời giải chứ không tìm được lời giải mang tính xây dựng.

Bài tập 2. Đường thẳng đi qua một điểm nằm trong một góc, cắt góc này thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Hãy tìm lời giải hình học và lời giải giải tích cho bài toán này.

Bài tập 3. Cũng bài toán trên với chu vi nhỏ nhất. Hãy tìm cả lời giải hình học lẫn lời giải giải tích.

Bài tập 4. Qua một điểm nằm trong góc vuông hãy kẻ một đường thẳng sao cho OA + OB nhỏ nhất (O là đỉnh góc vuông, A, B là giao điểm của đường thẳng với các cạnh góc vuông).

Bài tập 5. (Theo Olympic 30-4) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x\left(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2}\right)$ trên đoạn [0, 1]

Bài tập 6. (Bài toán về góc sút và khung thành) Cho một đường thẳng l và hai điểm A, B nằm về cùng một phía đối với l. Tìm vị trí điểm M trên l sao cho góc $\angle AMB$ lớn nhất.

2. Tìm cực trị khi biết điểm rơi

Với khá nhiều bài toán cực trị hay bất đẳng thức, khi biết điểm rơi (điểm đạt giá trị cực trị hay xảy ra dấu bằng) thì bài toán trở nên đơn giản.

Lý do là lúc đó ta sẽ biết cách áp dụng các bất đẳng thức quen thuộc với các hệ số phù hợp để đạt được điều mong muốn.

Chẳng hạn với bài toán:

Ví dụ 4. Cho $0 \le x \le 1$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức $x\left(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2}\right) \le 16$.

Bài toán này ra đời cách đây gần 20 năm, dịp Olympic 30/4 năm 1996. Tôi đã nhiều lần trình bày lời giải bài này, nhưng không phải trình bày theo trí nhớ, mà theo logic về điều kiện xảy ra dấu bằng. Thực sự tôi không nhớ từng dòng của lời giải mà chỉ nhớ một thông tin duy nhất: dấu bằng ở bất đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Với thông tin này, ta dễ dàng "phục hồi" lại các đánh giá sau:

$$x\left(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{3}{2}(3x.2\sqrt{1+x^2}) + \frac{13}{2}(x.2\sqrt{1-x^2})$$
$$\le \frac{3}{4}(9x^2 + 4(1+x^2)) + \frac{13}{4}(x^2 + 4(1-x^2)) = 16.$$

(Bạn đọc hãy suy nghĩ xem tại sao từ thông tin về điểm rơi, ta lại nghĩ ra được các đánh giá như trên?)

Bài tập 7. Cho $R > 0$ là số thực dương cho trước, $x \in [0, R]$ thay đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = x(R + \sqrt{R^2 - x^2})$.

Hướng dẫn. Bài toán này liên quan đến bài toán hình học sau: Trong tất cả các tam giác nội tiếp trong đường tròn bán kính R, tìm tam giác có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R.

Làm sao có thể tìm được điểm rơi? Ta có thể dự đoán, hoặc sử dụng công cụ đạo hàm. Tuy nhiên, với các bài toán trên, nếu đã sử dụng công cụ đạo hàm thì ta có thể làm thẳng bằng phương pháp hàm số. Dưới đây ta xem xét một số Ví dụ phức tạp hơn:

Ví dụ 5. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$2xyz = 2x + 4y + 7z.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x + y + z$.

Ta lại có "thông tin" rằng giá trị nhỏ nhất đạt được khi x = 3, y = 5/2, z = 2. Ta sử dụng thông tin này để có các đánh giá sau:

$$2(x+y+z) = 6 \times \frac{x}{3} + 5 \times \frac{2y}{5} + 4 \times \frac{z}{2} \geq 15 \sqrt[15]{\left(\frac{x}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2y}{5}\right)^5 \left(\frac{z}{2}\right)^4}. \tag{1}$$

Mặt khác, từ điều kiện đề bài suy ra

$$15 = \frac{15}{yz} + \frac{30}{zx} + \frac{105}{2xy} = 3 \times \frac{5}{yz} + 5 \times \frac{6}{zx} + 7 \times \frac{15}{2xy} \geq 15 \sqrt[15]{\left(\frac{5}{yz}\right)^3 \left(\frac{6}{zx}\right)^5 \left(\frac{15}{2xy}\right)^7}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$4(x+y+z)^2 \times 15 \geq \left(15 \sqrt[15]{\left(\frac{x}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2y}{5}\right)^5 \left(\frac{z}{2}\right)^4}\right)^2 15 \sqrt[15]{\left(\frac{5}{yz}\right)^3 \left(\frac{6}{zx}\right)^5 \left(\frac{15}{2xy}\right)^7} = 15^3.$$

Suy ra $x + y + z \geq 15/2$. Lời giải khá ngắn gọn. Và bí quyết của sự ngắn gọn này là ta đã biết điểm rơi. Vấn đề là làm sao để tìm được điểm rơi này? Trước khi có câu trả lời cho câu hỏi này, ta tiếp tục xem xét một Ví dụ nữa.

Ví dụ 6. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác, x, y, z là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện x + y + z = a + b + c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ax^2 + by^2 + cz^2 + xyz$.

Bằng một "linh cảm" toán học, đặc biệt là được gợi ý bởi điều kiện "a, b, c là ba cạnh của một tam giác", ta dự đoán rằng giá trị nhỏ nhất đạt được khi x = b + c - a, y = c + a - b và z = a + b - c. Khi đó ta tính được P = 4abc. Ta đưa bài toán ban đầu về một bài toán dễ chịu hơn:

Bài toán 6.1. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác, x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện x + y + z = a + b + c. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức $P = ax^2 + by^2 + cz^2 + xyz \geq 4abc$.

Bằng một lý luận khá đơn giản (bạn đọc hãy tự phục hồi lý luận này), ta có thể đưa bài toán trên về bài toán sau:

Bài toán 6.2. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác, x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ax^2 + by^2 + cz^2 + xyz = 4abc$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức $x + y + z \le a + b + c$.

Bài toán cuối cùng này có thể giải khá hiệu quả bằng phương pháp lượng giác hóa như sau:

Chia đẳng thức $ax^2 + by^2 + cz^2 + xyz = 4abc$ cho abc, ta được

$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ca} + \frac{z^2}{ab} + \frac{xyz}{abc} = 4.$

Đặt $u = \frac{x}{\sqrt{bc}}, v = \frac{y}{\sqrt{ca}}, w = \frac{z}{\sqrt{ab}}$ thì ta được $u^2 + v^2 + w^2 + uvw = 4$. Và ta cần chứng minh $\sqrt{bc}u + \sqrt{ca}v + \sqrt{ab}w \le a + b + c$.

Bây giờ, do $0 \le u, v \le 2$ nên ta có thể đặt $u = 2\cos A, v = 2\cos B$ với A, B là hai góc của một tam giác. Khi đó, giải phương trình

$$w^2 + uvw + u^2 + v^2 - 4 = 0,$$

ta được $w = \dfrac{-4\cos A\cos B + 4\sin A\sin B}{2} = -2\cos(A + B) = 2\cos C.$

với C là góc thứ ba trong tam giác nói trên.

Như thế ta cần chứng minh $2\sqrt{bc}\cos A + 2\sqrt{ca}\cos B + 2\sqrt{ab}\cos C \le a + b + c.$

Như bất đẳng thức này đúng do bất đẳng thức quen thuộc

$$2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C \le x^2 + y^2 + z^2.$$

đúng với mọi x, y, z thực và với mọi tam giác ABC.

Các lời giải đẹp đã nói trên thực chất chỉ có được khi ta tìm được điểm rơi hay biết được giá trị cực trị. Vậy làm thế nào để tìm được điểm rơi, từ đó tìm được giá trị cực trị? Trong nhiều trường hợp, do tính đối xứng, ta có thể nghĩ đến những điểm mà ở đó các biến bằng nhau. Nhưng với các bài toán không có sự đối xứng như ở hai bài trên, thì ta sẽ xử lý thế nào? Phương pháp nhân tử Langrange là một trợ thủ tốt cho mục tiêu tìm điểm dừng. Ta nhắc lại lý thuyết cơ bản của phương pháp này.

Để tìm cực trị của hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ với điều kiện ràng buộc $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ta xét hàm

$$F(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Sau đó ta tìm cực trị của F. Chú ý rằng các điểm cực trị này đều thoả mãn điều kiện $g(x_1, x_2, \dots, x_N) = F'_\lambda(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$ nên sẽ là cực trị của f với điều kiện ràng buộc $g(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$.

Nếu có nhiều điều kiện ràng buộc hơn, ta bổ sung thêm các biến μ, ν...

Ví dụ 7. Tìm giá trị giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2$ với điều kiện $g(x, y) = 7x^2 + 2xy + 4y^2 - 3 = 0$.

Giải. Xét $L = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Đạo hàm theo các biến x và y, ta được hệ phương trình $\begin{cases} 10x + 2y + \lambda(14x + 2y) = 0 \\ 2x + 6y + \lambda(2x + 8y) = 0 \end{cases}$

Từ đây tính λ từ các phương trình rồi cho bằng nhau, ta được $\dfrac{10x+2y}{14x+2y} = \dfrac{6y+2x}{8y+2x}$. Giải phương trình thuần nhất này, ta được y/x bằng - 1 hoặc 2. Thay vào phương trình g(x, y) = 0, ta tìm được một số điểm « nghi vấn » của cực trị. Tính các giá trị của hàm số f tại các điểm này, ta thu được giá trị nhỏ nhất đạt tại các điểm (x, y) = (-1/3, 1/3), (x, y) = (1/3, -1/3). Cuối cùng ta dùng đến định lý về sự tồn tại giá trị nhỏ nhất (g(x, y) = 0 là phương trình của một ellip, vì thế là compact).

Bài tập 8. (Bài toán về Entropi cực đại) Với n số dương $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sao cho $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \ln(x_k)$. (Tổng này với dấu trừ được gọi là entropi).

Bài tập 9. Tổng của 5 số thực bằng 1, tổng bình phương của chúng bằng 13 thì giá trị nhỏ nhất của tổng lập phương của chúng bằng bao nhiêu?

Bài tập 10. Tổng của 5 số thực bằng 1, tổng bình phương của chúng bằng 11 thì giá trị lớn nhất của tổng lập phương của chúng bằng bao nhiêu?

Bây giờ ta quay trở lại với Ví dụ 5 và thử giải bằng phương pháp nhân tử Lagrange.

Giải: Xét $L = x + y + z + \lambda(2x + 4y + 7z - 2xyz)$.

Hệ phương trình Lx = Ly = Lz = 0 có dạng $\begin{cases} 1 + \lambda(2 - 2yz) = 0 \\ 1 + \lambda(4 - 2zx) = 0 \\ 1 + \lambda(7 - 2xy) = 0 \end{cases}$

Từ đây ta tìm được $2yz = 2 + 1/\lambda$, $2zx = 4 + 1/\lambda$, $2xy = 7 + 1/\lambda$. Mặt khác, điều kiện 2x + 4y + 7z = 2xyz có thể viết lại thành 2/2yz + 4/2zx + 7/2xy = 1

Thay các biểu thức vừa tìm được ở trên vào, ta tìm được $\dfrac{2\lambda}{2\lambda+1} + \dfrac{4\lambda}{4\lambda+1} + \dfrac{7\lambda}{7\lambda+1} =$ 1 Biến đổi tương đương, ta được phương trình

$$112\lambda^3 + 50\lambda^2 - 1 = 0.$$

Phương trình này có các nghiệm $\lambda = 1/8$, $\lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{2}}{14}$ (loại vì dẫn đến yz < 0). Từ đó ta có 2yz = 10, 2zx = 12, 2xy = 15. Từ đây tính được điểm dừng là (x, y, z) = (3, 5/2, 2). Sự tồn tại của giá trị nhỏ nhất được đảm bảo bởi

Bổ đề 5. 3, do đó (3, 5/2, 2) chính là điểm mà hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý rằng phương pháp nhân tử Langrange không có trong chương trình phổ thông, ngay cả trong chương trình chuyên toán. Như thế lời giải trên đây là không được chấp nhận. Ta có một phương án để tránh được sự phiền toái này: Ta dùng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm điểm rơi (và hoàn toàn không cần trình bày điều này vào lời giải) và sử dụng điểm rơi này để có lời giải dùng đánh giá theo bất đẳng thức AM-GM có trọng số như ở trên.

Trở lại với Ví dụ 6, ta thử xem phương pháp nhân tử Lagrange sẽ dẫn chúng ta đến hệ tìm điểm rơi thế nào?

Xét hàm số $F = ax^2 + by^2 + cz^2 + xyz + \lambda(a + b + c - x - y - z)$. Hệ tìm điểm dừng có dạng

$$2ax + yz = \lambda, 2by + zx = \lambda, 2cz + xy = \lambda, x + y + z = a + b + c.$$

Ta viết 3 phương trình đầu về dạng $\frac{\lambda}{x} - \frac{yz}{x} = 2a, \frac{\lambda}{y} - \frac{zx}{y} = 2b, \frac{\lambda}{z} - \frac{xy}{z} = 2c$

Đặt s = x + y + z, t = xy + yz + zx và p = xyz. Cộng các phương trình trên vế theo vế, nhân chúng vế theo vế và nhân chéo rồi cộng lại, ta lần lượt được các hệ thức

$$\frac{\lambda t}{p} - \frac{t^2 - 2sp}{p} = 2(a+b+c), \frac{\lambda^3 - \lambda^2 t + \lambda ps - p^2}{p} = 8abc,$$
$$\frac{\lambda^2 s - \lambda(st - 3p) + p(s^2 - 2t)}{p} = 4(ab + bc + ca)$$

Từ phương trình đầu, với chú ý s = x + y + z = a + b + c ta suy ra $\lambda = t$. Thay vào phương trình thứ hai ta suy ra ts - p = 8abc, vào phương trình thứ tư suy ra $s^2 + t = 4(ab + bc + ca)$.

Như vậy $t = 2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2$, từ đó $p = ts - 8abc = (a+b+c)(2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2) - 8abc = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

Từ đây ta tìm được điểm rơi x = b+c-a, y = c+a-b, z = a+b-c và giá trị nhỏ nhất 4abc như trên.

Bài tập 11. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z = 5, x^2+y^2+z^2 = 9$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$P = x^2y + y^2z + z^2x.$$

Bài tập 12. Tìm điểm P nằm trong tam giác sao cho tổng các tỷ số độ dài các cạnh trên khoảng cách từ P đến các cạnh này đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 13. (Romanian TST 2007) Cho $n \geq 2$ và $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$ là 2n số thực thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1,\ \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1,\ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0,$.

Chứng minh rằng $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \leq n.$

Bài tập 14. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n.$$

3. Tính chất cực trị của tiếp tuyến

Trong phần này, dưới dạng bài tập, ta đưa ra một số tính chất cực trị quan trọng của tiếp tuyến. Các tính chất này rất hữu ích trong các bài toán tìm khoảng cách giữa các đường cong nói riêng, giữa các tập hợp điểm nói chung.

Bài tập 15. Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với (d). M là một điểm di chuyển trên (d). Chứng minh rằng nếu góc AMB lớn nhất thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM tiếp xúc với (d).

Bài tập 16. Cho đường cong khả vi (C) và điểm M cố định nằm ngoài (C). N là một điểm thuộc C. Chứng minh rằng nếu MN đạt giá trị nhỏ nhất thì MN vuông góc với tiếp tuyến của (C) tại N.

Bài tập 17. Cho hai đường cong khả vi $(C_1), (C_2)$ không giao nhau. Chứng minh rằng nếu M_1M_2 là đoạn ngắn nhất giữa các đoạn nối hai điểm thuộc C_1, C_2 thì M_1M_2 vuông góc với tiếp tuyến của C_1 tại M_1 và tiếp tuyến của C_2 tại M_2.

4. Cực trị rời rạc và phương pháp "những dịch chuyển nhỏ"

Bây giờ ta sẽ xem xét một số các bài toán cực trị rời rạc. Ở đây, do tính chất rời rạc nên công cụ giải tích là không khả dụng, ta phải tìm một phương pháp khác để nghiên cứu tính chất của các điểm cực trị, các cấu hình tối ưu.

Chúng ta bắt đầu từ bài toán sau:

Ví dụ 8. Tổng ba số nguyên dương bằng 100. Tìm giá trị lớn nhất của tích ba số đó.

Nếu không có điều kiện nguyên dương thì ta giải bài này dễ dàng. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM thì ba số đó là 100/3, 100/3, 100/3. Điều kiện nguyên dương không cho phép ta áp dụng như thế. Tuy nhiên, rõ ràng nó gợi ý cho ta đến bộ số tối ưu 33, 33, 34.

Điểm rơi này cho ta lời giải sau:

Giả sử $a \le b \le c$ thì ta dễ dàng suy ra $a \le 33$ và $c \ge 34$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a}{33}.\frac{b}{33}.\frac{c}{34} \le \left(\frac{\frac{a}{33}+\frac{b}{33}+\frac{c}{34}}{3}\right)^3 = \left(\frac{34(a+b+c)-c}{3.33.34}\right)^3 \le \left(\frac{34(a+b+c)-34}{3.33.34}\right)^3 = 1.$$

Suy ra $abc \le 33.33.34$.

Phương pháp này vẫn tỏ ra hiệu quả với bài toán khó hơn sau:

Ví dụ 9. Tổng ba số nguyên dương phân biệt bằng 100. Tìm giá trị lớn nhất của tích ba số đó. Cũng như trên, ta có thể dự đoán được điểm rơi là 32, 33, 35 và ta sử dụng điểm rơi dự đoán này để giải bài toán:

Giả sử a < b < c. Khi đó $b \ge a+1, c \ge a+2$ và như vậy $100 = a+b+c \ge 3a+3$, suy ra a < 97/3, suy ra $a \le 32$. Tương tự suy ra $c \ge 35$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a}{32}\frac{b}{33}\frac{c}{35} \le \left(\frac{\frac{a}{32}+\frac{b}{33}+\frac{c}{35}}{3}\right)^3 = \left(\frac{32.35(a+b+c)+35a-2.32c}{3.33.34}\right)^3 \le 1.$$

Tuy nhiên, có vẻ như cách giải trên sẽ gặp khó với bài toán sau:

Ví dụ 10. Tổng ba số nguyên dương phân biệt bằng 100. Tìm giá trị lớn nhất của tích ba số đó. Ta vẫn dự đoán được điểm rơi là 23, 24, 26, 27 nhưng nếu áp dụng phương pháp trên, ta sẽ phải đánh giá thêm b hoặc c nữa (với 4 số a < b < c < d). Nhưng điều này là khá khó khăn.

Ta suy nghĩ theo một hướng khác. Giả sử a < b < c < d là bộ số tối ưu. Khi đó các số này phải thỏa mãn điều kiện gì?

Ta thấy rằng hiệu của hai số kề nhau trong dãy tăng nói trên không thể ≥ 3, vì nếu chẳng hạn $b - a \geq 3$ thì đặt a' = a + 1, b' = b - 1 ta có a' < b' < c < d, a' + b' + c + d = a + b + c + d và a'b'cd = (a+1)(b-1)cd = (ab + b - a - 1)cd > abcd. Mâu thuẫn với tính tối ưu của bộ số.

Như vậy ta phải có $b - a \leq 2, c - b \leq 2, d - c \leq 2$.

Tiếp theo ta nhận thấy rằng, trong các bất đẳng thức trên, chỉ có thể có nhiều nhất một bất đẳng thức có dấu bằng. Thật vậy, nếu chẳng hạn b - a = 2 và c - b = 2 thì ta có thể lấy a' = a+1, c' = c-1 còn b, d giữ nguyên để có bộ số a', b, c', d có tổng như cũ nhưng tích lớn hơn.

Áp dụng tính chất này ta suy ra $(b - a) + (c - b) + (d - c) \leq 2 + 1 + 1 = 4$, suy ra $d - a \leq 4$. Ta cũng có $c - a \leq 2 + 1 = 3$.

Bây giờ $100 = a + b + c + d \geq a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = 4a + 6$, suy ra

$$a \leq 94/4 = 23,5. \tag{1}$$

Tiếp theo, ta lại có, theo các đánh giá ở trên

$$100 = a + b + c + d \leq a + a + 2 + a + 3 + a + 4.$$

Suy ra

$$a \geq 91/4 = 22,75. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra a = 23. Dùng các đánh giá tương tự cho d, ta có thể tìm được d = 27. Và từ đây ta tìm được bộ duy nhất a < b < c < d thỏa mãn hệ điều kiện $b - a \leq 2, c - b \leq 2, d - c \leq 2, d - a \leq 4$ và $a + b + c + d = 100$ là (23, 24, 26, 27).

Và đó chính là bộ số có tích lớn nhất.

Bài tập 18. (IMO 1976) Một số số nguyên dương có tổng bằng 1976. Tìm giá trị lớn nhất của tích các số đó.

Bài tập 19. Một số số nguyên dương phân biệt có tổng bằng 2013. Tìm giá trị lớn nhất của tích các số đó.

Tiếp theo, ta xem xét một Ví dụ khá phức tạp như sau:

Ví dụ 11. 11. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một hoán vị của (1, 2, ..., n). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + ... + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

Ta có dự đoán là P đạt giá trị nhỏ nhất khi các số x_i, x_{i+1} có khoảng cách không lớn, từ đó, chẳng hạn với n = 8 ta có thể sắp 1, 3, 5, 7, 8, 6, 4, 2

Từ "điểm rơi"dự đoán này ta có thể nghĩ đến việc chứng minh $P \geq 4n - 6$. Ta chứng minh điều này bằng quy nạp.

Khi chuyển từ $n \to n + 1$, ta cần chứng minh

$$(x_n - x_{n+1})^2 + (x_{n+1} - x_1)^2 - (x_n - x_1)^2 \geq 4 \tag{1}$$

Bất đẳng thức này nói chung là không đúng (chẳng hạn nếu x_{n+1} nằm giữa x_n và x_1). Tuy nhiên, nếu chú ý đến tính vai trò như nhau của các xi thì ta có thể chọn x_{n+1} thích hợp để bất đẳng thức đúng.

Thật vậy, bất đẳng thức (1) có thể viết dưới dạng

$$(x_n - x_{n+1})(x_1 - x_{n+1}) \geq 2.(2)$$

Và nếu chọn $x_{n+1} = 1$ thì $x_n - x_{n+1}, x_1 - x_{n+1}$ là các số nguyên dương phân biệt do đó

$(x_n - x_{n+1})(x_1 - x_{n+1}) \geq 1.2 = 2$, nghĩa là (2) đúng và bước quy nạp đã được chứng minh.

Trong lời giải trên, ý tưởng quy nạp là khá tự nhiên. Tuy nhiên trong lời giải vẫn còn chút gì đó mò mẫm. Và phương pháp này dường như sẽ gặp khó khăn khi giải bài toán GTLN.

Ta thử suy nghĩ theo hướng nghiên cứu tính chất của bộ số tối ưu.

Chú ý là bài toán đã cho tương đương với việc tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$P = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1.$$

Để không nhầm lẫn, ta gọi $(y_1, y_2, ..., y_n)$ là bộ tối ưu cho bài toán GTLN, $(z_1, z_2, ..., z_n)$ là bộ tối ưu cho bài toán GTNN.

Ta chứng minh được tính chất quan trọng sau:

(1) $(y_i - y_{j+1})(y_{i+1} - y_j) > 0$ với mọi $i < j - 1$.

(2) $(z_i - z_{j+1})(z_{i+1} - z_j) > 0$ với mọi $i < j - 1$.

(Hãy chứng minh!)

Từ các tính chất này, ta có thể suy ra các hệ quả quan trọng trong việc tìm bộ số tối ưu và giải quyết bài toán, Ví dụ như

(3) Trong bộ y, cạnh n phải là n-1 và n-2.

(4) Trong bộ z, cạnh n phải là 1 và 2.

(5) Khi n = 2k, trong bộ z, các số > k không được xếp cạnh nhau, và do đó sẽ xếp xen kẽ với các số $\leq k$.

Bài tập 20. Giải tiếp phần tìm GTNN của $P = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1$.

Hướng dẫn: Dùng quy nạp toán học và tính chất (4).

Bài tập 21. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ là các số nguyên phân biệt. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + ... + |x_{2n-1} - x_{2n}| + |x_{2n} - x_1| \leq 2n^2.$$

Bài tập 22. Trên đường thẳng thực xét các điểm có tọa độ 1, 2, 3, ..., 2n. Một con bọ xuất phát từ điểm 1 nhảy đến tất cả các điểm 2, 3, ..., 2n, mỗi điểm đúng 1 lần rồi quay trở lại 1. Biết rằng tổng độ dài các đoạn mà con bọ đi qua, trừ bước cuối cùng, bằng n(2n-1). Chứng minh độ dài bước nhảy cuối cùng bằng n.