

Chương 1 :

CÁC BƯỚC ĐẦU CƠ SỞ

Để bắt đầu một cuộc hành trình, ta không thể không chuẩn bị hành trang để lên đường. Toán học cũng vậy. Muốn khám phá được cái hay và cái đẹp của bất đẳng thức lượng giác, ta cần có những “vật dụng” chắc chắn và hữu dụng, đó chính là chương 1: “**Các bước đầu cơ sở**”.

Chương này tổng quát những kiến thức cơ bản cần có để chứng minh bất đẳng thức lượng giác. Theo kinh nghiệm cá nhân của mình, tác giả cho rằng những kiến thức này là đầy đủ cho một cuộc “hành trình”.

Trước hết là các bất đẳng thức đại số cơ bản (**AM – GM**, **BCS**, **Jensen**, **Chebyshev** ...) Tiếp theo là các đẳng thức, bất đẳng thức liên quan cơ bản trong tam giác. Cuối cùng là một số định lý khác là công cụ đắc lực trong việc chứng minh bất đẳng thức (định lý **Largare**, định lý về dấu của tam thức bậc hai, định lý về hàm tuyến tính ...)

Mục lục :

1.1.	Các bất đẳng thức đại số cơ bản.....	4
1.1.1.	Bất đẳng thức AM – GM	4
1.1.2.	Bất đẳng thức BCS	8
1.1.3.	Bất đẳng thức Jensen	13
1.1.4.	Bất đẳng thức Chebyshev	16
1.2.	Các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.....	19
1.2.1.	Đẳng thức.....	19
1.2.2.	Bất đẳng thức.....	21
1.3.	Một số định lý khác.....	22
1.3.1.	Định lý Largare	22
1.3.2.	Định lý về dấu của tam thức bậc hai.....	25
1.3.3.	Định lý về hàm tuyến tính.....	28
1.4.	Bài tập.....	29

1.1. Các bất đẳng thức đại số cơ bản :

1.1.1. Bất đẳng thức AM – GM :

Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta luôn có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Bất đẳng thức **AM – GM** (Arithmetic Means – Geometric Means) là một bất đẳng thức quen thuộc và có ứng dụng rất rộng rãi. Đây là bất đẳng thức mà bạn đọc cần ghi nhớ rõ ràng nhất, nó sẽ là công cụ hoàn hảo cho việc chứng minh các bất đẳng thức. Sau đây là hai cách chứng minh bất đẳng thức này mà theo ý kiến chủ quan của mình, tác giả cho rằng là ngắn gọn và hay nhất.

Chứng minh :

Cách 1 : Quy nạp kiểu Cauchy

Với $n = 1$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Khi $n = 2$ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \quad (\text{đúng!})$$

Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ tức là :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$$

Ta sẽ chứng minh nó đúng với $n = 2k$. Thật vậy ta có :

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k})}{2k} &\geq \frac{\sqrt[k]{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k})}}{k} \\ &\geq \frac{\sqrt[k]{(k \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k})(k \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{2k}})}}{k} \\ &= \sqrt[2k]{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_{2k}} \end{aligned}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh với $n = k - 1$. Khi đó :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} &\geq k \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \\ &= k \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} \geq (k-1) \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

Cách 2 : (lời giải của Polya)

$$\text{Gọi } A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq A^n \quad (*)$$

Rõ ràng nếu $a_1 = a_2 = \dots = a_n = A$ thì $(*)$ có dấu đẳng thức. Giả sử chúng không bằng nhau. Như vậy phải có ít nhất một số, giả sử là $a_1 < A$ và một số khác, giả sử là $a_2 > A$ tức là $a_1 < A < a_2$.

Trong tích $P = a_1 a_2 \dots a_n$ ta hãy thay a_1 bởi $a'_1 = A$ và thay a_2 bởi $a'_2 = a_1 + a_2 - A$. Như vậy $a'_1 + a'_2 = a_1 + a_2$ mà $a'_1 a'_2 - a_1 a_2 = A(a_1 + a_2 - A) - a_1 a_2 = (a_1 - A)(a_2 - A) > 0$
 $\Rightarrow a'_1 a'_2 > a_1 a_2$

$$\Rightarrow a_1 a_2 a_3 \dots a_n < a'_1 a'_2 a_3 \dots a_n$$

Trong tích $P' = a'_1 a'_2 a_3 \dots a_n$ có thêm thừa số bằng A . Nếu trong P' còn thừa số khác A thì ta tiếp tục biến đổi để có thêm một thừa số nữa bằng A . Tiếp tục như vậy tới đa $n-1$ lần biến đổi ta đã thay mọi thừa số P bằng A và được tích A^n . Vì trong quá trình biến đổi tích các thừa số tăng dần. $\Rightarrow P < A^n \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.1.1.1.

Cho A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. CMR :

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

Lời giải :

$$\text{Vì } \tan(A+B) = -\tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

Tam giác ABC nhọn nên $\tan A, \tan B, \tan C$ dương.

Theo **AM – GM** ta có :

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{\tan A \tan B \tan C} = 3\sqrt{\tan A + \tan B + \tan C}$$

$$\Rightarrow (\tan A + \tan B + \tan C)^2 \geq 27(\tan A + \tan B + \tan C)$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 1.1.1.2.

Cho ΔABC nhọn. CMR :

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

Lời giải :

Ta luôn có : $\cot(A+B) = -\cot C$

$$\Leftrightarrow \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C$$

$$\Leftrightarrow \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

Khi đó :

$$(\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) = 3$$

$$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.1.3.

CMR với mọi ΔABC nhọn và $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có :

$$\frac{\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geq 3^{\frac{n-1}{2}}$$

Lời giải :

Theo **AM – GM** ta có :

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[n]{(\tan A \tan B \tan C)^n} = 3\sqrt[n]{(\tan A + \tan B + \tan C)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geq 3\sqrt[n]{(\tan A + \tan B + \tan C)^{n-3}} \geq 3\sqrt[n]{(3\sqrt{3})^{n-3}} = 3^{\frac{n-1}{2}}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.1.1.4.

Cho a, b là hai số thực thỏa :

$$\cos a + \cos b + \cos a \cos b \geq 0$$

$$\text{CMR : } \cos a + \cos b \geq 0$$

Lời giải :

Ta có :

$$\cos a + \cos b + \cos a \cos b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos a)(1 + \cos b) \geq 1$$

Theo **AM – GM** thì :

$$\frac{(1 + \cos a) + (1 + \cos b)}{2} \geq \sqrt{(1 + \cos a)(1 + \cos b)} \geq 1$$

$$\Rightarrow \cos a + \cos b \geq 0$$

Ví dụ 1.1.1.5.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC nhọn ta có :

$$\sqrt{\frac{\cos A \cos B}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos B \cos C}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos C \cos A}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Ta có

$$\frac{\cos A}{2 \cos \frac{A}{2}} = \sin \frac{A}{2} \cot \frac{A}{2}$$

$$\frac{\frac{3}{4} \cos A \cos B}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right) \left(\frac{3}{4} \cot A \cot B \right)$$

Theo **AM – GM** thì :

$$\frac{\frac{3}{4} \cos A \cos B}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \leq \left(\frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \cot A \cot B}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\cos A \cos B}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \cot A \cot B \right)$$

Tương tự ta có :

$$\sqrt{\frac{\cos B \cos C}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \frac{3}{4} \cot B \cot C \right)$$

$$\sqrt{\frac{\cos C \cos A}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} + \frac{3}{4} \cot C \cot A \right)$$

Cộng về theo về các bất đẳng thức trên ta được :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\cos A \cos B}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos B \cos C}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos C \cos A}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}} \\ & \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} (\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) \\ & = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Bước đầu ta mới chỉ có bất đẳng thức **AM – GM** cùng các đẳng thức lượng giác nên sức ảnh hưởng đến các bất đẳng thức còn hạn chế. Khi ta kết hợp **AM – GM** cùng **BCS**, **Jensen** hay **Chebyshev** thì nó thực sự là một vũ khí đáng gờm cho các bất đẳng thức lượng giác.

1.1.2. Bất đẳng thức BCS :

Với hai bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta luôn có :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Nếu như **AM – GM** là “cánh chim đầu đàn” trong việc chứng minh bất đẳng thức thì **BCS** (Bouniakovski – Cauchy – Schwartz) lại là “cánh tay phải” hết sức đắc lực. Với **AM – GM** ta luôn phải chú ý điều kiện các biến là không âm, nhưng đối với **BCS** các biến không bị ràng buộc bởi điều kiện đó, chỉ cần là số thực cũng đúng. Chứng minh bất đẳng thức này cũng rất đơn giản.

Chứng minh :

Cách 1 :

Xét tam thức :

$$f(x) = (a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2$$

Sau khi khai triển ta có :

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Mặt khác vì $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên :

$$\Delta_f \leq 0 \Leftrightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \quad (\text{quy ước nếu } b_i = 0 \text{ thì } a_i = 0)$$

Cách 2 :

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có :

$$\frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \frac{b_i^2}{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq \frac{2|a_i b_i|}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}}$$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng về cả n bất đẳng thức lại ta có đpcm.

Đây cũng là cách chứng minh hết sức ngắn gọn mà bạn đọc nên ghi nhớ!

Bây giờ với sự tiếp sức của **BCS**, **AM – GM** như được tiếp thêm nguồn sức mạnh, như hổ mọc thêm cánh, như rồng mọc thêm vây, phát huy hiệu quả tầm ảnh hưởng của mình. Hai bất đẳng thức này bù đắp bổ sung hỗ trợ cho nhau trong việc chứng minh bất đẳng thức. Chúng đã “lường long nhất thế”, “song kiếm hợp bích” công phá thành công nhiều bài toán khó.

“Trăm nghe không bằng một thấy”, ta hãy xét các ví dụ để thấy rõ điều này.

Ví dụ 1.1.2.1.

CMR với mọi a, b, α ta có :

$$(\sin \alpha + a \cos \alpha)(\sin \alpha + b \cos \alpha) \leq 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + a \cos \alpha)(\sin \alpha + b \cos \alpha) &= \sin^2 \alpha + (a+b)\sin \alpha \cos \alpha + ab \cos^2 \alpha \\ &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{(a+b)}{2} \sin 2\alpha + ab \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2} (1 + ab + (a+b)\sin 2\alpha + (ab-1)\cos 2\alpha) \quad (1) \end{aligned}$$

Theo **BCS** ta có :

$$A \sin x + B \cos x \leq \sqrt{A^2 + B^2} \quad (2)$$

Áp dụng (2) ta có :

$$(a+b)\sin 2\alpha + (ab-1)\cos 2\alpha \leq \sqrt{(a+b)^2 + (ab-1)^2} = \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \quad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được :

$$(\sin \alpha + a \cos \alpha)(\sin \alpha + b \cos \alpha) \leq \frac{1}{2} \left(1 + ab + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \right) \quad (4)$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau đây với mọi a, b :

$$\frac{1}{2} \left(1 + ab + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \right) \leq 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (5)$$

Thật vậy :

$$\begin{aligned}(5) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} &\leq 1 + \frac{a^2+b^2}{4} + \frac{ab}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} &\leq \frac{a^2+b^2+2}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} &\leq \frac{(a^2+1)+(b^2+1)}{2} \quad (6)\end{aligned}$$

Theo **AM – GM** thì (6) hiển nhiên đúng $\Rightarrow$ (5) đúng.

Từ (1) và (5) suy ra với mọi a, b, α ta có :

$$(\sin \alpha + a \cos \alpha)(\sin \alpha + b \cos \alpha) \leq 1 + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi xảy ra đồng thời dấu bằng ở (1) và (6)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ \frac{a+b}{\sin 2\alpha} = \frac{ab-1}{\cos 2\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{a+b}{ab-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a+b}{ab-1} + k \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 1.1.2.2.

Cho $a, b, c > 0$ và $a \sin x + b \cos y = c$. CMR :

$$\frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned}\frac{1 - \sin^2 x}{a} + \frac{1 - \cos^2 y}{b} &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b} &\geq \frac{c^2}{a^3 + b^3} \quad (*)\end{aligned}$$

Theo **BCS** thì :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$\begin{aligned}\text{với } \begin{cases} a_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{a}} ; & a_2 = \frac{\cos y}{\sqrt{b}} \\ b_1 = a\sqrt{a} ; & b_2 = b\sqrt{b} \end{cases} \\ \Rightarrow \left(\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b} \right) (a^3 + b^3) &\geq (a \sin x + b \cos y)^2\end{aligned}$$

do $a^3 + b^3 > 0$ và $a \sin x + b \cos y = c \Rightarrow (*)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

$$\begin{aligned} \text{Đẳng thức xảy ra} &\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{a^2} = \frac{\cos y}{b^2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{a^2} = \frac{\cos y}{b^2} \\ a \sin x + b \cos y = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{a^2 c}{a^3 + b^3} \\ \cos y = \frac{b^2 c}{a^3 + b^3} \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.2.3.

CMR với mọi ΔABC ta có :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$$

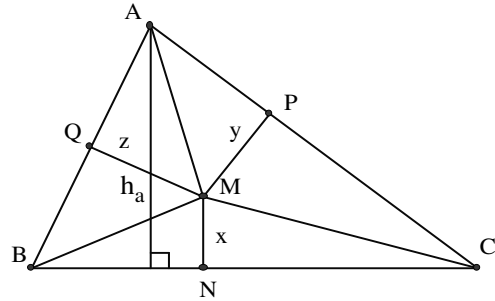
với x, y, z là khoảng cách từ điểm M bất kỳ nằm bên trong ΔABC đến ba cạnh BC, CA, AB .

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA} \\ \Leftrightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{z}{h_c} + \frac{y}{h_b} + \frac{x}{h_a} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_a + h_b + h_c = (h_a + h_b + h_c) \left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} \right)$$



Theo BCS thì :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{h_a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h_a}} + \sqrt{h_b} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{h_b}} + \sqrt{h_c} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{h_c}} \leq \sqrt{(h_a + h_b + h_c) \left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} \right)} = \sqrt{h_a + h_b + h_c}$$

$$\text{mà } S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} a b \sin C \Rightarrow h_a = b \sin C, \quad h_b = c \sin A, \quad h_c = a \sin B$$

$$\Rightarrow \sqrt{h_a + h_b + h_c} = \sqrt{(a \sin B + b \sin C + c \sin A)} = \sqrt{\frac{ab}{2R} + \frac{bc}{2R} + \frac{ca}{2R}}$$

Từ đó suy ra :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{2R}} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều và } M \text{ là tâm nội tiếp } \Delta ABC.$

Ví dụ 1.1.2.4.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \leq \sqrt[4]{8} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức **BCS** liên tiếp 2 lần ta có :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}\right)^4 &\leq \left((1^2 + 1^2)(\cos x + \sin x)\right)^2 \\ &\leq (1^2 + 1^2)^2 (1^2 + 1^2)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 8 \\ \Rightarrow \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} &\leq \sqrt[4]{8} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 1.1.2.5.

Chứng minh rằng với mọi số thực a và x ta có

$$\left| \frac{(1-x^2)\sin a + 2x\cos a}{1+x^2} \right| \leq 1$$

Lời giải :

Theo **BCS** ta có :

$$\begin{aligned} \left((1-x^2)\sin a + 2x\cos a\right)^2 &\leq \left((1-x^2)^2 + (2x)^2\right)(\sin^2 a + \cos^2 a) \\ &= 1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2 = 1 + 2x^2 + x^4 \\ \Rightarrow \left((1-x^2)\sin a + 2x\cos a\right)^2 &\leq (1+x^2)^2 \\ \Leftrightarrow \left| \frac{(1-x^2)\sin a + 2x\cos a}{1+x^2} \right| &\leq 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

1.1.3. Bất đẳng thức Jensen :

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và n điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ tùy ý trên đoạn $[a, b]$ ta có :

i) $f''(x) > 0$ trong khoảng (a, b) thì :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

ii) $f''(x) < 0$ trong khoảng (a, b) thì :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Bất đẳng thức **AM – GM** và bất đẳng thức **BCS** thật sự là các đại gia trong việc chứng minh bất đẳng thức nói chung. Nhưng riêng đối với chuyên mục bất đẳng thức lượng giác thì đó lại trở thành sân chơi riêng cho bất đẳng thức **Jensen**. Dù có vẻ hơi khó tin nhưng đó là sự thật, đến 75% bất đẳng thức lượng giác ta chỉ cần nói “theo bất đẳng thức Jensen hiển nhiên ta có đpcm”.

Trong phát biểu của mình, bất đẳng thức **Jensen** có đề cập đến đạo hàm bậc hai, nhưng đó là kiến thức của lớp 12 THPT. Vì vậy nó sẽ không thích hợp cho một số đối tượng bạn đọc. Cho nên ta sẽ phát biểu bất đẳng thức **Jensen** dưới một dạng khác :

Cho $f : R^+ \rightarrow R$ thỏa mãn $f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \forall x, y \in R^+$ Khi đó với mọi

$x_1, x_2, \dots, x_n \in R^+$ ta có bất đẳng thức :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Sự thật là tác giả chưa từng tiếp xúc với một chứng minh chính thức của bất đẳng thức **Jensen** trong phát biểu có $f''(x)$. Còn việc chứng minh phát biểu không sử dụng đạo hàm thì rất đơn giản. Nó sử dụng phương pháp quy nạp Cauchy tương tự như khi chứng minh bất đẳng thức **AM – GM**. Do đó tác giả sẽ không trình bày chứng minh ở đây.

Ngoài ra, ở một số tài liệu có thể bạn đọc gặp khái niệm lỗi lầm khi nhắc tới bất đẳng thức **Jensen**. Nhưng hiện nay trong cộng đồng toán học vẫn chưa quy ước rõ ràng đâu là lỗi, đâu là lầm. Cho nên bạn đọc không nhất thiết quan tâm đến điều đó. Khi chứng minh ta chỉ cần xét $f''(x)$ là đủ để sử dụng bất đẳng thức **Jensen**. Ok! Mặc dù bất đẳng thức **Jensen** không phải là một bất đẳng thức chặt, nhưng khi có dấu hiệu manh nha của nó thì bạn đọc cứ tùy nghi sử dụng.

Ví dụ 1.1.3.1.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \sin x$ với $x \in (0; \pi)$

Ta có $f''(x) = -\sin x < 0 \forall x \in (0; \pi)$. Từ đó theo **Jensen** thì :

$$f(A) + f(B) + f(C) \leq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.3.2.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC đều ta có :

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \tan x$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó theo **Jensen** thì :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right) = 3\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.3.3.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = (\tan x)^{2\sqrt{2}}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(x) = 2\sqrt{2}(1 + \tan^2 x)(\tan x)^{2\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}((\tan x)^{2\sqrt{2}-1} + (\tan x)^{2\sqrt{2}+1})$

$f''(x) = 2\sqrt{2}((2\sqrt{2}-1)(1 + \tan^2 x)(\tan x)^{2\sqrt{2}-2} + (2\sqrt{2}+1)(1 + \tan^2 x)(\tan x)^{2\sqrt{2}}) > 0$

Theo **Jensen** ta có :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right) = 3\left(\tan \frac{\pi}{6}\right)^{2\sqrt{2}} = 3^{1-\sqrt{2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 1.1.3.4.

Chứng minh rằng với mọi $\triangle ABC$ ta có :

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \sin x + \tan x$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f''(x) = \frac{\sin x(1 - \cos^4 x)}{\cos^4 x} > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó theo **Jensen** thì :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right) = 3\left(\sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 1.1.3.5.

Chứng minh rằng với mọi $\triangle ABC$ nhọn ta có :

$$(\sin A)^{\sin A} (\sin B)^{\sin B} (\sin C)^{\sin C} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Lời giải :

Ta có

$$\begin{cases} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C \\ \sin A + \sin B + \sin C \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \end{cases}$$

$$\text{và } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Xét $f(x) = x \ln x$ với $x \in (0; 1]$

Ta có $f'(x) = \ln x + 1$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in (0; 1]$$

Bây giờ với **Jensen** ta được :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \ln \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right) \leq \frac{\sin A (\ln \sin A) + \sin B (\ln \sin B) + \sin C (\ln \sin C)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^{\sin A + \sin B + \sin C} \leq \ln (\sin A)^{\sin A} + \ln (\sin B)^{\sin B} + \ln (\sin C)^{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left[\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^{\sin A + \sin B + \sin C} \right] \leq \ln [(\sin A)^{\sin A} (\sin B)^{\sin B} (\sin C)^{\sin C}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^{\sin A + \sin B + \sin C}}{3^{\sin A + \sin B + \sin C}} \leq (\sin A)^{\sin A} (\sin B)^{\sin B} (\sin C)^{\sin C}$$

$$\Rightarrow (\sin A)^{\sin A} (\sin B)^{\sin B} (\sin C)^{\sin C} \geq \frac{2^{\sin A + \sin B + \sin C}}{3^{\sin A + \sin B + \sin C}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

1.1.4. Bất đẳng thức Chebyshev :

Với hai dãy số thực đơn điệu cùng chiều $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thì ta có :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Theo khả năng của mình thì tác giả rất ít khi sử dụng bất đẳng thức này. Vì trước hết ta cần để ý tới chiều của các biến, thường phải sắp lại thứ tự các biến. Do đó bài toán cần có yêu cầu đối xứng hoàn toàn giữa các biến, việc sắp xếp thứ tự sẽ không làm mất tính tổng quát của bài toán. Nhưng không vì thế mà lại phủ nhận tầm ảnh hưởng của bất đẳng thức **Chebyshev** trong việc chứng minh bất đẳng thức lượng giác, mặc dù nó có một chứng minh hết sức đơn giản và ngắn gọn.

Chứng minh :

Bằng phân tích trực tiếp, ta có đẳng thức :

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \sum_{i,j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$$

Vì hai dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ đơn điệu cùng chiều nên $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$

Nếu 2 dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ đơn điệu ngược chiều thì bất đẳng thức đổi chiều.

Ví dụ 1.1.4.1.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}$$

Lời giải :

Không mất tính tổng quát giả sử :

$$a \leq b \leq c \Leftrightarrow A \leq B \leq C$$

Theo **Chebyshev** thì :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b+c}{3} \right) \left(\frac{A+B+C}{3} \right) &\leq \frac{aA+bB+cC}{3} \\ \Rightarrow \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} &\geq \frac{A+B+C}{3} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.4.2.

Cho ΔABC không có góc tù và A, B, C đo bằng radian. CMR :

$$3(\sin A + \sin B + \sin C) \leq (A + B + C) \left(\frac{\sin A}{A} + \frac{\sin B}{B} + \frac{\sin C}{C} \right)$$

Lời giải :

$$\text{Xét } f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right]$$

Vậy $f(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$

Không mất tổng quát giả sử :

$$A \geq B \geq C \Rightarrow \frac{\sin A}{A} \leq \frac{\sin B}{B} \leq \frac{\sin C}{C}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có :

$$(A + B + C) \left(\frac{\sin A}{A} + \frac{\sin B}{B} + \frac{\sin C}{C} \right) \geq 3(\sin A + \sin B + \sin C) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.4.3.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{\tan A \tan B \tan C}{3}$$

Lời giải :

Không mất tổng quát giả sử $A \geq B \geq C$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan A \geq \tan B \geq \tan C \\ \cos A \leq \cos B \leq \cos C \end{cases}$$

Áp dụng **Chebyshev** ta có :

$$\left(\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3} \right) \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \right) \geq \frac{\tan A \cos A + \tan B \cos B + \tan C \cos C}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3}$$

Mà ta lại có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.4.4.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$2(\sin A + \sin B + \sin C) \geq \frac{3}{2} \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\cos A + \cos B + \cos C}$$

Lời giải :

Không mất tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin A \leq \sin B \leq \sin C \\ \cos A \geq \cos B \geq \cos C \end{cases}$$

Khi đó theo **Chebyshev** thì :

$$\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right) \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \right) \geq \frac{\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin A + \sin B + \sin C) \geq \frac{3 \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{2 \cos A + \cos B + \cos C}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

1.2. Các đẳng thức bất đẳng thức trong tam giác :

Sau đây là hầu hết những đẳng thức, bất đẳng thức quen thuộc trong tam giác và trong lượng giác được dùng trong chuyên đề này hoặc rất cần thiết cho quá trình học toán của bạn đọc. Các bạn có thể dùng phần này như một từ điển nhỏ để tra cứu khi cần thiết. Hay bạn đọc cũng có thể chứng minh tất cả các kết quả như là bài tập rèn luyện. Ngoài ra tôi cũng xin nhắc với bạn đọc rằng những kiến thức trong phần này khi áp dụng vào bài tập đều cần thiết được chứng minh lại.

1.2.1. Đẳng thức :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad a = b \cos C + c \cos B$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad b = c \cos A + a \cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad c = a \cos B + b \cos A$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c \\ &= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = pr \\ &= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_a^2 &= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} & l_a &= \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} & r &= (p-a) \tan \frac{A}{2} \\
 m_b^2 &= \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} & l_b &= \frac{2ca \cos \frac{B}{2}}{c+a} & &= (p-b) \tan \frac{B}{2} \\
 m_c^2 &= \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} & l_c &= \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b} & &= (p-c) \tan \frac{C}{2} \\
 & & & & &= 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a-b}{a+b} &= \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)} & \cot A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \\
 \frac{b-c}{b+c} &= \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)} & \cot B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} \\
 \frac{c-a}{c+a} &= \frac{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)} & \cot C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \\
 & & \cot A + \cot B + \cot C &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} & \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} & \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\
 \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} & \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} & \tan \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\
 \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} & \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} & \tan \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{R} \\
 \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 4 \sin A \sin B \sin C \\
 \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= 2(1 + \cos A \cos B \cos C) \\
 \cos A + \cos B + \cos C &= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R} \\
 \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C
 \end{aligned}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

$$\sin(2k+1)A + \sin(2k+1)B + \sin(2k+1)C = (-1)^k 4 \cos(2k+1) \frac{A}{2} \cos(2k+1) \frac{B}{2} \cos(2k+1) \frac{C}{2}$$

$$\sin 2kA + \sin 2kB + \sin 2kC = (-1)^{k+1} 4 \sin kA \sin kB \sin kC$$

$$\cos(2k+1)A + \cos(2k+1)B + \cos(2k+1)C = 1 + (-1)^k 4 \sin(2k+1) \frac{A}{2} \sin(2k+1) \frac{B}{2} \sin(2k+1) \frac{C}{2}$$

$$\cos 2kA + \cos 2kB + \cos 2kC = -1 + (-1)^k 4 \cos kA \cos kB \cos kC$$

$$\tan kA + \tan kB + \tan kC = \tan kA \tan kB \tan kC$$

$$\cot kA \cot kB + \cot kB \cot kC + \cot kC \cot kA = 1$$

$$\tan(2k+1) \frac{A}{2} \tan(2k+1) \frac{B}{2} + \tan(2k+1) \frac{B}{2} \tan(2k+1) \frac{C}{2} + \tan(2k+1) \frac{C}{2} \tan(2k+1) \frac{A}{2} = 1$$

$$\cot(2k+1) \frac{A}{2} + \cot(2k+1) \frac{B}{2} + \cot(2k+1) \frac{C}{2} = \cot(2k+1) \frac{A}{2} \cot(2k+1) \frac{B}{2} \cot(2k+1) \frac{C}{2}$$

$$\cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC = 1 + (-1)^k 2 \cos kA \cos kB \cos kC$$

$$\sin^2 kA + \sin^2 kB + \sin^2 kC = 2 + (-1)^{k+1} 2 \cos kA \cos kB \cos kC$$

1.2.2. Bất đẳng thức :

$$|a-b| < c < a+b \quad a \leq b \Leftrightarrow A \leq B$$

$$|b-c| < a < b+c \quad b \leq c \Leftrightarrow B \leq C$$

$$|c-a| < b < c+a \quad c \leq a \Leftrightarrow C \leq A$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$$

$$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 1$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$$

$$\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2}$$

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$$

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

$$\cot A \cot B \cot C \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

1.3. Một số định lý khác :

1.3.1. Định lý Lagrange :

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì tồn tại 1 điểm $c \in (a; b)$ sao cho :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Nói chung với kiến thức THPT, ta chỉ có công nhận định lý này mà không chứng minh. Ví chứng minh của nó cần đến một số kiến thức của toán cao cấp. Ta chỉ cần hiểu cách dùng nó cùng những điều kiện đi kèm trong các trường hợp chứng minh.

Ví dụ 1.3.1.1.

Chứng minh rằng $\forall a, b \in R, a < b$ thì ta có :

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

Khi đó theo định lý **Lagrange** ta có

$$\begin{aligned} \exists c \in (a; b): f(b) - f(a) &= (b - a) \cos c \\ \Rightarrow |\sin b - \sin a| &\leq |b - a| |\cos c| \leq |b - a| \\ &\Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.1.2.

Với $0 < a < b$. CMR :

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \ln x$, khi đó $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ khả vi trên $(a; b)$ nên :

$$\exists c \in (a; b): \frac{\ln b - \ln a}{b - a} = f'(c) = \frac{1}{c} \quad \text{vì } a < c < b \text{ nên } \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

$$\text{Từ đó } \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 1.3.1.3.

Cho $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. CMR :

$$\frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} < \tan \alpha - \tan \beta < \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \tan x$ liên tục trên $[\beta; \alpha]$ khả vi trên $(\beta; \alpha)$ nên theo định lý **Lagrange**

$$\exists c \in (\beta; \alpha): \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = f'(c) \Rightarrow \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\cos^2 c} \quad (1)$$

$$\text{Vì } \beta < c < \alpha \text{ nên } \frac{1}{\cos^2 \beta} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.3.1.4.

$$\text{CMR nếu } x > 0 \text{ thì } \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Lời giải :

$$\text{Xét } f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x(\ln(x+1) - \ln x) \quad \forall x > 0$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$$

Xét $g(t) = \ln t$ liên tục trên $[x; x+1]$ khả vi trên $(x; x+1)$ nên theo **Lagrange** thì :

$$\exists c \in (x; x+1): \frac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} = g'(c) > \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} > 0$$

với $x > 0 \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(0; +\infty)$

$$\Rightarrow f(x+1) > f(x) \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.3.1.5.

Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ta có :

$$\frac{1}{n^2 + 2n + 2} \leq \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right) \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \arctan x$ liên tục trên $[n; n+1]$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ trên } (n; n+1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Theo định lý Lagrange ta có :

$$\exists c \in (n; n+1): f'(c) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c^2} = \arctan(n+1) - \arctan n = \arctan \left(\frac{n+1-n}{1+(n+1)n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c^2} = \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Đề ý } c \in (n; n+1) &\Rightarrow 1 \leq n < c < n+1 \\
 &\Rightarrow n^2 < c^2 < (n+1)^2 \\
 &\Leftrightarrow n^2 + 1 < c^2 + 1 < n^2 + 2n + 2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2 + 2n + 2} < \frac{1}{c^2 + 1} < \frac{1}{n^2 + 1} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2 + 2n + 2} < \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) < \frac{1}{n^2 + 1} \\
 &\Rightarrow \text{đpcm.}
 \end{aligned}$$

1.3.2. Định lý về dấu của tam thức bậc hai :

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a , với mọi số thực x .
- Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và giả sử $x_1 < x_2$. Thế thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ (tức là $x < x_1$ hay $x > x_2$) và $f(x)$ trái dấu với a khi x ở trong khoảng hai nghiệm (tức là $x_1 < x < x_2$).

Trong một số trường hợp, định lý này là một công cụ hết sức hiệu quả. Ta sẽ coi biểu thức cần chứng minh là một tam thức bậc hai theo một biến rồi xét Δ . Với định lý trên thì các bất đẳng thức thường rơi vào trường hợp $\Delta \leq 0$ mà ít khi ta xét $\Delta > 0$.

Ví dụ 1.3.2.1.

CMR $\forall x, y, z \in R^+$ và ΔABC bất kỳ ta có :

$$\frac{\cos A}{x} + \frac{\cos B}{y} + \frac{\cos C}{z} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2xyz}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x^2 - 2x(y \cos C + z \cos B) + (y^2 + z^2 - 2yz \cos A) \geq 0$$

Coi đây như là tam thức bậc hai theo biến x .

$$\begin{aligned}
 \Delta' &= (y \cos C + z \cos B)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz \cos A) \\
 &= -(y \sin C - z \sin B)^2 \leq 0
 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức trên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} y \sin C = z \sin B \\ x = y \cos C + z \cos B \end{cases} \Leftrightarrow x : y : z = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

tức x, y, z là ba cạnh của tam giác tương đương với ΔABC .

Ví dụ 1.3.2.2.

CMR $\forall x \in R$ và ΔABC bất kỳ ta có :

$$1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \cos A + x(\cos B + \cos C)$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x^2 - 2x(\cos B + \cos C) + 2 - 2\cos A \geq 0$$

$$\Delta' = (\cos B + \cos C)^2 - 2(1 - \cos A)$$

$$= \left(2\cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \right)^2 - 4\sin^2 \frac{A}{2}$$

$$= 4\sin^2 \frac{A}{2} \left(\cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 \right)$$

$$= -4\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B-C}{2} \leq 0$$

Vậy bất đẳng thức trên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ x = \cos B + \cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ x = 2\cos B = 2\cos C \end{cases}$$

Ví dụ 1.3.2.4.

CMR trong mọi ΔABC ta đều có :

$$ab \sin^2 A + bc \sin^2 B + ca \sin^2 C \leq \left(\frac{a+b+c}{2} \right)^2$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$a^2 + 2a(b \cos 2A + c \cos 2C) + b^2 + c^2 + 2bc \cos 2B \geq 0$$

$$\Delta' = (b \cos 2A + c \cos 2C)^2 - (b^2 + c^2 + 2bc \cos 2B)$$

$$= -(b \sin 2A + c \sin 2C)^2 \leq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Ví dụ 1.3.2.4.

Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải :

$$\text{Đặt } k = \cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} - \cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{A+B}{2} - 2 \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} + k - 1 = 0$$

Do đó $\cos \frac{A+B}{2}$ là nghiệm của phương trình :

$$2x^2 - 2 \cos \frac{A-B}{2} x + k - 1 = 0$$

Xét $\Delta' = \cos^2 \frac{A+B}{2} - 2(k-1)$. Để tồn tại nghiệm thì :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2(k-1) \leq \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.3.2.5.

CMR $\forall x, y \in R$ ta có :

$$\sin x + \sin y + \cos(x+y) \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải :

$$\text{Đặt } k = \sin x + \sin y + \cos(x+y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{x+y}{2}$$

Khi đó $\sin \frac{x+y}{2}$ là nghiệm của phương trình :

$$2x^2 - 2 \cos \frac{x-y}{2} x + k - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta' &= 1 - 2(k - 1) \geq 0 \\ \Rightarrow k &\leq \frac{3}{2} \\ \Rightarrow &\text{đpcm.}\end{aligned}$$

1.3.3. Định lý về hàm tuyến tính :

Xét hàm $f(x) = ax + b$ xác định trên đoạn $[\alpha; \beta]$

$$\begin{aligned}\text{Nếu } &\begin{cases} f(\alpha) \geq k \\ f(\beta) \geq k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \\ \text{thì } &f(x) \geq k \quad \forall x \in [\alpha; \beta].\end{aligned}$$

Đây là một định lý khá hay. Trong một số trường hợp, khi mà **AM – GM** đã bó tay, **BCS** đã đuối hàng vô điều kiện thì định lý về hàm tuyến tính mới phát huy hết sức mạnh của mình. Một phát biểu hết sức đơn giản nhưng đó lại là lối ra cho nhiều bài bất đẳng thức khó.

Ví dụ 1.3.3.1.

Cho a, b, c là những số thực không âm thỏa :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

$$\text{CMR :} \quad a + b + c \leq \frac{1}{2}abc + \sqrt{8}$$

Lời giải :

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng :

$$\left(1 - \frac{1}{2}bc\right)a + b + c - \sqrt{8} \leq 0$$

$$\text{Xét } f(a) = \left(1 - \frac{1}{2}bc\right)a + b + c - \sqrt{8} \quad \text{với } a \in [0; 2].$$

Khi đó :

$$f(0) = b + c - \sqrt{8} \leq \sqrt{2(b^2 + c^2)} - \sqrt{8} = \sqrt{8} - \sqrt{8} = 0$$

$$f(2) = 2 - bc + b + c - \sqrt{8} = 2 - \sqrt{8} < \sqrt{8} - \sqrt{8} = 0$$

$$(\text{vì } a = 2 \Leftrightarrow b = c = 0)$$

$$\text{Vậy } f(a) \leq 0 \quad \forall a \in [0; 2] \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0, b = c = 0$ và các hoán vị.

Ví dụ 1.3.3.2.

CMR $\forall a, b, c$ không âm ta có :

$$7(ab + bc + ca)(a + b + c) \leq 9abc + 2(a + b + c)^3$$

Lời giải :

Đặt $x = \frac{a}{a+b+c}$; $y = \frac{b}{a+b+c}$; $z = \frac{c}{a+b+c}$. Khi đó bài toán trở thành :

Chứng minh $7(xy + yz + zx) \leq 9xyz + 2$ với $x + y + z = 1$

Không mất tính tổng quát giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

Xét $f(x) = (7y + 7z - 9yz)x + 7yz - 2$ với $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

Ta có :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 ; f(1) = -2 < 0$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 0 \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$$

Vậy bất đẳng thức chứng minh xong.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Đây là phần duy nhất của chuyên đề không đề cập đến lượng giác. Nó chỉ mang tính giới thiệu cho bạn đọc một định lý hay để chứng minh bất đẳng thức. Nhưng thực ra trong một số bài bất đẳng thức lượng giác, ta vẫn có thể áp dụng định lý này. Chỉ có điều các bạn nên chú ý là dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra phải phù hợp với tập xác định của các hàm lượng giác.

1.4. Bài tập :

Cho ΔABC . CMR :

1.4.1. $\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ với ΔABC nhọn.

1.4.2. $\sin \frac{A}{4} + \sin \frac{B}{4} + \sin \frac{C}{4} \leq \frac{3\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

1.4.3. $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$

1.4.4. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq \frac{7}{8}$

- 1.4.5.** $\cot A + \cot B + \cot C \leq \frac{9}{8 \sin A \sin B \sin C}$
- 1.4.6.** $\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \geq 8 \sin A \sin B \sin C$
- 1.4.7.** $1 + \cos A \cos B \cos C \geq \sin A \sin B \sin C$
- 1.4.8.** $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{S}}$
- 1.4.9.** $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$
- 1.4.10.** $\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- 1.4.11.** $m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq p^2$
- 1.4.12.** $\frac{1}{a^2 m_a} + \frac{1}{b^2 m_b} + \frac{1}{c^2 m_c} > \frac{3}{abc}$
- 1.4.13.** $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$
- 1.4.14.** $h_a + h_b + h_c \geq 9r$
- 1.4.15.** $\sin A \sin B \sin C \leq \sin\left(\frac{A+3B}{4}\right) \sin\left(\frac{B+3C}{4}\right) \sin\left(\frac{C+3A}{4}\right)$