# Chuyên đề

# Giải các hệ thức truy hồi

## I. Sơ lược về dãy số và quan hệ truy hồi trong toán học

Trong toán học, dãy số là một danh sách (hữu hạn hoặc vô hạn) liệt kê các số theo một thứ tự nào đó.
Quan hệ truy hồi là một đẳng thức biểu diễn dãy số một cách đệ quy, mỗi phần tử của dãy được xác định bởi một hàm số của các phần tử trước.
Một số quan hệ truy hồi được xác định một cách đơn giản có thể có những đặc tính hết sức phức tạp, thỉnh thoảng được nghiên cứu bởi các nhà vật lý học và thỉnh thoảng lại được nghiên cứu bởi các nhà toán học về một lớp của toán học được biết đến với cái tên giải tích phi tuyến. Phần này khá phức tạp và không ứng dụng nhiều ở chương trình THPT nên sẽ không được đề cập ở chuyên đề này.
Một cách tổng quát, hệ thức

$$f\left(n+k\right)=g\left(f(n+k-1),f(n+k-2),...,f(n+1)\right) \quad \text{(B.1)}$$

là một *hệ thức truy hồi bậc k*. Công thức trên còn có thể được viết dưới dạng:

$$f_{n+k}=g\left(f_{n+k-1},f_{n+k-2},...,f_{n+1}\right)$$

Giải một hệ thức truy hồi có nghĩa là tìm một *hàm số không đệ quy theo biến n đơn giản nhất*.

## II. Giải hệ thức truy hồi

Ở chuyên đề này chúng ta sẽ chỉ xét 4 phương pháp cơ bản:

- Phương pháp thế
- Phương pháp quy nạp
- Phương pháp sử dụng nghiệm đặc trưng
- Phương pháp sử dụng hàm sinh

### 1. Phương pháp thế

Trong phương pháp thế để giải các hệ thức truy hồi cho $f(n)$, sự truy hồi của $f(n)$ được sử dụng lặp đi lặp lại nhiều lần để loại bỏ mọi giá trị của $f()$ ở vế phải. Để hiểu rõ hơn phương pháp này, ta hãy xét một số ví dụ.

**Ví dụ II.1.1** Xét dãy số $\left(t_n\right)$ xác định như sau:

$$t_n=\begin{cases}c_1 \mid n=0\\ c_2+t_{n-1} \mid n\in\mathbb{N}^*\end{cases} \quad \text{(II.1.1)}$$

Nếu $n>2$ thì $t_{n-1}=c_2+t_{n-2}$, nếu $n>3$ thì $t_{n-2}=c_2+t_{n-3}$,… Những đẳng thức này là hệ quả trực tiếp của (II.1.1) và được dùng để xác định biểu thức không truy hồi cho $t_n$:

$$\begin{aligned}t_n&=c_2+t_{n-1}\\&=c_2+c_2+t_{n-2}\\&=c_2+c_2+c_2+t_{n-3}\\&=...\\&=nc_2+t_0\\&=nc_2+c_1,n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Nên chúng ta có thể thấy rằng $t_n=nc_2+c_1,n\in\mathbb{N}$ ☺

**Ví dụ II.1.2** Xét hệ thức truy hồi:

$$t(n)=\begin{cases} c \mid n=1 \\ at\left(\frac{n}{b}\right)+nc \mid n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2 \end{cases} \qquad \text{(II.1.2)}$$

với *n* là lũy thừa của *b*.

Giả sử rằng $n=b^k, k\in\mathbb{N}$. Giải (II.1.2) bằng phương pháp thế cho ta:

$$\begin{aligned} t(n) &= at\left(\frac{n}{b}\right)+nc \\ &= a\left(at\left(\frac{n}{b^2}\right)+c\frac{n}{b}\right)+nc \\ &= a^2t\left(\frac{n}{b^2}\right)+nc\frac{a}{b}+nc \\ &= a^2\left(at\left(\frac{n}{b^3}\right)+c\frac{n}{b^2}\right)+nc\left(\frac{a}{b}+1\right) \\ &= a^3t\left(\frac{n}{b^3}\right)+nc\left(\frac{a}{b}\right)^2+nc\left(\frac{a}{b}+1\right) \\ &= a^3\left(at\left(\frac{n}{b^4}\right)+c\frac{n}{b^4}\right)+nc\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1\right) \\ &= a^4t\left(\frac{n}{b^4}\right)+nc\left(\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1\right) \\ &= \ldots \\ &= a^kt\left(\frac{n}{b^k}\right)+nc\sum_{i=0}^{k-1}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^i\right) \\ &= a^kt(1)+nc\sum_{i=0}^{k-1}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^i\right) \\ &= a^kc+nc\sum_{i=0}^{k-1}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^i\right) \\ &= nc\left(\frac{a}{b}\right)^k+nc\sum_{i=0}^{k-1}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^i\right) \\ &= nc\sum_{i=0}^{k}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^i\right) \end{aligned}$$

Khi $a=b$, $\sum_{i=0}^{k}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^i\right)=k+1$, khi $a\neq b$, $\sum_{i=0}^{k}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^i\right)=\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1}-1}{\frac{a}{b}-1}$.

Vậy, ta được: $t(n)=\begin{cases} nc(k+1) \mid a=b \\ nc\left(\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{k+1}-1}{\dfrac{a}{b}-1}\right) \mid a\neq b \end{cases}, k=\log_b n$ ☺

Xét hệ thức $t(n)=at\left(\dfrac{n}{b}\right)+g(n) \mid n\in\mathbb{N}^*$ (I.1.3)

với $a$ và $b$ là những hằng số đã biết. Giả sử rằng $t(1)$ đã được biết. Rõ ràng, (I.1.3) trở thành (I.1.2) khi $t(1)=c$ và $g(n)=nc$. Lại sử dụng phương pháp thế, ta có:

$$\begin{aligned} t(n) &= at\left(\frac{n}{b}\right)+g(n) \\ &= a\left(at\left(\frac{n}{b^2}\right)+g\left(\frac{n}{b}\right)\right)+g(n) \\ &= a^2t\left(\frac{n}{b^2}\right)+ag\left(\frac{n}{b}\right)+g(n) \\ &= \ldots \\ &= a^kt(1)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(a^ig\left(\frac{n}{b^i}\right)\right) \end{aligned}$$

Với $k=\log_b n$. Đẳng thức này có thể được làm đơn giản hơn như sau:

$$\begin{aligned} t(n) &= a^kt(1)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(a^ig\left(\frac{n}{b^i}\right)\right) \\ &= a^kt(1)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(a^ig\left(n^{k-i}\right)\right) \\ &= a^k\left(t(1)+\sum_{j=1}^{k}\left(a^{-j}g\left(b^j\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Do $a^k=a^{\log_b n}=n^{\log_b a}$, nên biểu thức cho $t(n)$ trở thành:

$$\begin{aligned} t(n) &= n^{\log_b a}\left(t(1)+\sum_{j=1}^{k}\left(a^{-j}g\left(b^j\right)\right)\right) \\ &= n^{\log_b a}\left(t(1)+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{g\left(b^j\right)}{\left(b^j\right)^{\log_b a}}\right)\right) \\ &= n^{\log_b a}\left(t(1)+\sum_{j=1}^{k}\left(h\left(b^j\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Với $h\left(b^j\right)=\dfrac{g\left(b^j\right)}{\left(b^j\right)^{\log_b a}}$. Vậy cuối cùng biểu thức cho $t(n)$ của chúng la là $t(n)=n^{\log_b a}\left(t(1)+f(n)\right)$ với $f(n)=\sum_{j=1}^{k}\left(h\left(b^j\right)\right)$. Xét một số trường hợp riêng của (II.1.3):

- $a=1,b=2,g(n)=c$ cho ta $t(n)=t\left(\dfrac{n}{2}\right)+c$, lúc này $\log_b a=0$ và $h(n)=\dfrac{g(n)}{n^{\log_b a}}=c$. Từ công thức trên, ta được $t(n)=n^{\log_b a}\left(t(1)+c\log_2 n\right)=t(1)+c\log_2 n$
- $a=7,b=2,g(n)=18n^2$ cho ta $t(n)=7t\left(\dfrac{n}{2}\right)+18n^2$, lúc này $\log_b a=\log_2 7$ và $h(n)=\dfrac{18n^2}{n^{\log_2 7}}=18n^{2-\log_2 7}$, công thức cho $t(n)$ là $t(n)=n^{\log_2 7}\left(t(1)+\sum_{j=1}^{k}18\left(2^j\right)^{2-\log_2 7}\right)$ $=n^{\log_2 7}\left(t(1)+18\sum_{j=1}^{k}\left(2^{(2-\log_2 7)}\right)^j\right)=n^{\log_2 7}\left(t(1)+18\dfrac{2^{(2-\log_2 7)(k+1)}-2^{(2-\log_2 7)}}{2^{(2-\log_2 7)}-1}\right)$.
- $a=9,b=3,g(n)=4n^6$ cho ta $t(n)=9t\left(\dfrac{n}{3}\right)+4n^6$, lúc này $\log_b a=2$ và $h(n)=\dfrac{4n^6}{n^2}=4n^4$, nên $t(n)=n^2\left(t(1)+\sum_{j=1}^{k}4\left(3^j\right)^4\right)=n^2\left(t(1)+\dfrac{81^{\log_3 n+1}-81}{20}\right)$ ☺

**2. Phương pháp quy nạp**

Quy nạp là một phương pháp kiểm tra hơn là một phương pháp giải. Xét các ví dụ:

**Ví dụ II.2.1** Xét hệ thức truy hồi

$$t_n=\begin{cases}2 \mid n=0\\ 3+t_{n-1} \mid n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

Cơ sở cho việc quy nạp là, khi $n=0, t_n=2$ và $3n+2=2$. Giả sử rằng $t_m=3m+2, m\in\mathbb{N}$, chúng ta sẽ chứng minh $t_{m+1}=3(m+1)+2$, điều này hiển nhiên đúng theo hệ thức truy hồi. ☺

Như đã được đề cập ở trên, phương pháp quy nạp không thể dùng để tìm ra lời giải cho mội hệ thức truy hồi, nó chỉ có thể dùng để kiểm tra tính đúng đắn một hệ thức.

**3. Phương pháp nghiệm đặc trưng**

Hệ thức truy hồi của $f(n)$ là một *phương trình truy hồi tuyến tính* nếu và chỉ nếu nó có dạng:

$$f(n)=\sum_{i=1}^{k}g_i(n)f(n-i)+g(n)$$

với $g_i(n) \mid i=\overline{1,k}$ và $g(n)$ là các hàm số biến *n* mà không phải là hàm số biến *f*. Hệ thức truy hồi xác định như trên là *phương trình truy hồi tuyến tính bậc k*, với *k* là hằng số và $g_k(n)\neq 0$. Nếu $g_k(n)=0,\forall n$ thì bậc của *phương trình truy hồi tuyến tính* đó nhỏ hơn *k*. Một *phương trình truy hồi tuyến tính với hệ số hằng* là phương trình có dạng:

$$f(n)=a_1f(n-1)+a_2f(n-2)+\ldots+a_kf(n-k)+g(n), n\geq k \qquad \text{(II.3.1)}$$

Với $a_i \mid i=\overline{1,n}$ là hằng số, $g(n)$ là hàm số biến *n* mà không phải là hàm số biến *f*. (II.3.1) là một của *phương trình truy hồi tuyến tính thuần nhất* nếu và chỉ nếu $g(n)\equiv 0$. Phần lớn các hệ trức truy hồi chuyên đề này đã đề cập đến đều là *phương trình truy hồi tuyến tính với hệ số hằng*.

Hệ thức (II.1.2):

$$t(n)=\begin{cases} c \mid n=1 \\ at\left(\frac{n}{b}\right)+nc \mid n\in \mathbb{N}^*, n\ge 2\end{cases}$$

với $n$ là lũy thừa của $b$ không phải là một *phương trình truy hồi tuyến tính bậc k* với hằng số $k$ nào bởi vì sự xuất hiện của $t\left(\frac{n}{b}\right)$ ở vế phải. Tuy nhiên, vì $n$ là lũy thừa của $b$ nên (II.1.2) có thể viết lại:

$$t\left(b^k\right)=\begin{cases} c \mid n=1 \\ at\left(b^{k-1}\right)+cb^k \mid k\in \mathbb{N}^*\end{cases}$$

Dùng $h(k)$ để biểu diễn $t\left(b^k\right)$, hệ thức trên trở thành:

$$h(k)=\begin{cases} c \mid n=1 \\ ah(k-1)+c2^k \mid k\in \mathbb{N}^*\end{cases}$$

Dễ thấy hệ thức trên là một *phương trình truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc 1 với hệ số hằng*. Do $h(k)=t\left(b^k\right)=t(n)$, việc giải hệ thức tuyến tính tương đương với việc giải hệ thức trên.

Hệ thức

$$t(n)=t(n-1)+t(n-2) \mid n\in \mathbb{N}^*, n\ge 2$$

Xác định các số Fibonacci khi sử dụng điều kiện $t(0)=0, t(1)=1$. Đây là một *phương trình truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2 với hệ số hằng*.

Những hệ thức trên có thể được giải bằng cách trước tiên xác định một nghiệm chung cho $t(n)$. Nghiệm chung này chứa một số hệ số chưa xác định và với các giá trị của $t(0), t(1), ..., t(k-1)$, chúng ta có thể xác định được các hệ số chưa xác định đó.

Lấy ví dụ hệ thức $t(n)=5t(n-1)-6t(n-2) \mid n\in \mathbb{N}^*, n\ge 2$, nghiệm chung của nó là $t(n)=c_1 2^n+c_2 3^n$ (chúng ta sẽ tìm hiểu cách tìm nghiệm chung này sau), các dệ số chưa xác định là $c_1$ và $c_2$. Nếu $t(0)=0$ và $t(1)=1$, chúng ta có thể thế vào $t(n)=c_1 2^n+c_2 3^n$ để xác định $c_1$ và $c_2$. Việc này cho ta

$$f(0)=c_1+c_2=0 \text{ và } f(1)=2c_1+3c_2=1$$

Do đó $c_1=1, c_2=-1$. Vì vậy, $t(n)=2^n-3^n, n\ge 0$ là nghiệm của hệ thức $t(n)=5t(n-1)-6t(n-2)$.

Nghiệm chung của (II.3.1) có thể biểu diễn dưới dạng tổng của $f_h(n)$ và $f_p(n)$, với $f_h(n)$ là nghiệm chung cho phần thuần nhất của (II.3.1):

$$f_h(n)=a_1 f_h(n-1)+a_2 f_h(n-2)+...+a_k f_h(n-k), n\ge k$$

và $f_p(n)$ là nghiệm riêng của

$$f_p(n)=a_1 f_p(n-1)+a_2 f_p(n-2)+...+a_k f_p(n-k)+g(n), n\ge k$$

Nhận thấy rằng $f_h(n)+f_p(n)$ là một nghiệm của (II.3.1). Do phương pháp ta sẽ dùng để xác định $f_p(n)$ sẽ cho chúng ta một biểu thức $f_p(n)$ có thể không phải là nghiệm của phương trình $f(n)$. Nên việc tìm $f_h(n)$ để cộng vào $f_p(n)$ là điều cần thiết.

**Tìm** $f_h(n)$

Để xác định $f_h(n)$ chúng ta cần phải giải hệ thức tuyến tính dạng:

$$f_h(n) = a_1 f_h(n-1) + a_2 f_h(n-2) + ... + a_k f_h(n-k)$$

Hay

$$f_h(n) - a_1 f_h(n-1) - a_2 f_h(n-2) - ... - a_k f_h(n-k) = 0 \qquad \text{(II.3.1.1)}$$

Nhận thấy rằng (II.3.1.1) có một nghiệm dạng $f_h(n) = Ax^n$. Thế vào (II.3.1.1), ta được:

$$A\left(x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - ... - a_k x^{n-k}\right) = 0$$

Ta có thể giả sử $A \neq 0$, khi đó ta được

$$x^{n-k}\left(x^k - \sum_{i=1}^{k} a_i x^{k-i}\right) = 0$$

Phương trình trên có *n* nghiệm (trong đó có *n* – *k* nghiệm là 0). *K* nghiệm còn lại của nó là nghiệm của phương trình

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - ... - a_k = 0 \qquad \text{(II.3.1.2)}$$

Phương trình (II.3.1.2) gọi là phương trình đặc trưng của (II.3.1.1) . Trong $\mathbb{C}$ phương trình trên có đúng *k* nghiệm. Ta chỉ xét trường hợp nó có đúng *k* nghiệm trong $\mathbb{R}$.

Nghiệm của phương trình đặc trưng

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

là 2 và 3. Phương trình đặc trưng

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0 \qquad \text{(II.3.1.3)}$$

có các nghiệm là $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 3$, với 3 là nghiệm bội 2. Các *nghiệm phân biệt* của nó là 2 và 3.

**Đinh lý 1.** *Giả sử các nghiệm phân biệt của phương trình đặc trưng*

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - ... - a_k = 0$$

*của hệ thức tuyến tính thuần nhất*

$$f_h(n) = a_1 f_h(n-1) + a_2 f_h(n-2) + ... + a_k f_h(n-k)$$

*là* $t_1, t_2, ..., t_s$ *với* $s \le k$. *Tồn tại một nghiệm chung của* $f_h(n)$ *có dạng:*

$$f_h(n) = u_1(n) + u_2(n) + ... + u_s(n)$$

*với*

$$u_i(n) = \left(c_{i_0} + c_{i_1} n + c_{i_2} n^2 + ... + c_{i_{w-1}} n^{w-1}\right) t_i^n$$

*Ở đây,* $t_i$ *là nghiệm bội w.*

Phương trình đặc trưng của phương trình truy hồi

$$t(n) = 5t(n-1) - 6t(n-2) \mid n \in \mathbb{N}^*, n \ge 2$$

Là

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng này là 2 và 3. *Định lý 1* cho ta $t(n) = u_1(n) + u_2(n)$ với $u_1(n) = c_1 2^n$, $u_2(n) = c_2 3^n$, Do đó, $t(n) = c_1 2^n + c_2 3^n$.

(II.3.1.3) là phương trình đặc trưng của *hệ thức truy hồi thuần nhất* sau:

$$f(n) = 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3)$$

Phương trình đó có 2 nghiệm phân biệt là $r_1 = 2$ và $r_2 = 3$, với $r_2$ là nghiệm bội 2. Nên, $u_1(n) = c_1 2^n$, và $u_2(n) = (c_2 + c_3 n)3^n$. Nghiệm chung của *hệ thức truy hồi* trên là

$$f(n) = c_1 2^n + (c_2 + c_2 n)3^n$$ ☺

Dãy truy hồi cho các số Fibonacci là *thuần nhất* và có phương trình đặc trưng $x^2 - x - 1 = 0$. Các nghiệm của nó là $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Do các nghiệm này phân biệt, nên $u_1(n) = c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ và $u_2(n) = c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Vì vậy

$$F(n) = c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Là nghiệm chung của dãy Fibonacci. Sử dụng điều kiện $F(0) = 0$ và $F(1) = 1$, ta được $c_1 + c_2 = 0$ và $c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$. Giải cho $c_1, c_2$ ta được $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Nên các số Fibonacci thõa mãn đẳng thức

$$F(n) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad ☺$$

Định lý 1 cho chúng ta một phương pháp đơn giản xác định nghiệm chung của bất kỳ *hệ thức truy hồi tuyến tính tuần nhất bậc k với hệ số hằng*. Chúng ta chỉ cần xác định các nghiệm của phương trình đặc trưng của nó,

**Tìm** $f_p(n)$

Hiện chưa có phương pháp chung để xác định nghiệm riêng $f_p(n)$. Biểu thức của $f_p(n)$ phụ thuộc rất nhiều vào $g(n)$. Chúng ta chỉ xét 2 trường hợp:

- $g(n)$ là một đa thức biến n
- $g(n)$ là hàm số mũ theo biến n

*Tìm $f_p(n)$ khi $g(n)$ là đa thức theo biến n*

Khi $g(n) = 0$, nghiệm riêng $f_p(n) = 0$.

Khi $g(n) = \sum_{i=1}^{d} e_i n^i, e_d \neq 0$, nghiệm riêng $f_p(n)$ có dạng

$$f_p(n) = p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + ... + p_{d+m} n^{d+m} \qquad \text{(III.3.2.1.1)}$$

Với $m = 0$ nếu 1 không là nghiệm của phương trình đặc trưng, và nếu 1 là nghiệm của phương trình đặc trưng thì $m = k$ với 1 là nghiệm bội $k$ của phương trình đặc trưng.

Để xác định $p_0, p_2, ..., p_{d+m}$, ta thế $f_p(n)$ vào hệ thức truy hồi rồi áp dụng tính chất của đồng nhất thức.

Xét ví dụ

$$u(n) = 3u(n-1) + 6u(n-2) + 3n + 2 \qquad \text{(III.3.2.1.2)}$$

Có $g(n) = 3n + 2$, phương trình đặc trưng của nó là $x^2 - 3x - 6 = 0$. Phương trình này không có nghiệm $x = 1$ nên $m = 0$, nghiệm riêng của (III.3.2.1.2) có dạng $f_p(n) = p_0 + p_1 n$. Thế vào (III.3.2.1.2), ta được:

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 n &= 3\left(p_0 + p_1(n-1)\right) + 6\left(p_0 + p_1(n-2)\right) + 3n + 2 \\ &= 3p_0 + 3np_1 - 3p_1 + 6p_0 + 6np_1 - 12p_1 + 3n + 2 \\ &= (9p_0 - 15p_1 + 2) + (9p_1 + 3)n, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2 \end{aligned}$$

So sánh 2 vế của đẳng thức trên, ta được

$$\begin{cases} p_0 = 9p_0 - 15p_1 + 2 \\ p_1 = 9p_1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = -\dfrac{61}{64} \\ p_1 = -\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Do đó một nghiệm riêng của (III.3.2.1.2) là $f_p(n) = -\frac{61}{64} - \frac{3}{8}n$ ☺

Xét dãy số

$$f(n) = 2f(n-1) - f(n-2) - 6 \qquad \text{(III.3.2.1.3)}$$

Phương trình đặc trưng tương ứng của nó là $x^2 - 2x + 1 = 0$, nghiệm của nó là $r_1 = r_2 = 1$. Nên, $f_p(n)$ có dạng:

$$f_p(n) = p_0 + p_1 n + p_2 n^2$$

Thế vào (III.3.2.1.3), ta được:

$$p_0 + p_1 n + p_2 n^2 = 2\left(p_0 + p_1(n-1) + p_2(n-1)^2\right) - \left(p_0 + p_1(n-2) + p_2(n-2)^2\right) - 6$$
$$= (p_0 - 2p_2 - 6) + p_1 n + p_2 n^2, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$$

So sánh 2 vế, ta được $p_0 = p_0 - 2p_2 - 6 \Rightarrow p_2 = -3$, nên $f_p(n) = p_0 + p_1 n - 3n^2$, mặt khác $f_h(n) = (c_0 + c_1 n)1^n$, vậy $f(n) = p_0 + p_1 n - 3n^2 + c_0 + c_1 n = c_2 + c_3 n - 3n^2$ với $c_2, c_3$ là các hằng số, có thể xác định từ các giá trị của $f(0)$ và $f(1)$. ☺

*Tìm $f_p(n)$ khi $g(n)$ là hàm số mũ theo biến n*

Khi $g(n) = ca^n$ với *c* và *a* là hằng số, thì nghiệm riêng $f_p(n)$ có dạng

$$f_p(n) = \left(p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + ... + p_w n^w\right) a^n$$

Với $w = 0$ nếu *a* là nghiệm của phương trình đặc trưng, và bằng *k* với *a* là nghiệm bội *k* của phương trình đặc trưng.

Xét hệ thức truy hồi

$$f(n) = 3f(n-1) + 2f(n-4) - 6 \cdot 2^n \qquad \text{(III.3.2.1.4)}$$

Hệ thức truy hồi thuần nhất tương ứng là:

$$f_h(n) = 3f_h(n-1) + 2f_h(n-4)$$

Phương trình đặc trưng của nó là:

$$x^4 - 3x^3 - 2 = 0$$

Dễ dàng kiểm tra *x* = 2 không phải là nghiệm của nó, vì vậy nghiệm riêng của (III.3.2.1.4) có dạng:

$$f_p(n) = p_0 2^n$$

Thế vào (III.3.2.1.4) ta được:

$$p_0 2^n = 3p_0 2^{n-1} + 2p_0 2^{n-4} - 6 \cdot 2^n, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 4$$
$$\Leftrightarrow p_0 2^4 = 3p_0 2^3 + 2p_0 - 6 \cdot 2^4, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 4$$
$$\Leftrightarrow 16p_0 = 24p_0 + 2p_0 - 96, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 4$$
$$\Leftrightarrow p_0 = \frac{48}{5}$$

Nên một nghiệm riêng của (III.3.2.1.4) là $f_p(n) = \frac{48 \cdot 2^n}{5}$. ☺

Xét hệ thức truy hồi

$$f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2) + 4\cdot 3^n \qquad \text{(III.3.2.1.5)}$$

Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi thuần nhất tương ứng là $x^2 - 5x + 6 = 0$, có nghiệm $r_1 = 2, r_2 = 3$. Do 3 là nghiệm bội 1 (nghiệm đơn) của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của nó có dạng:

$$f_p(n) = (p_0 + p_1 n)3^n$$

Thế vào (III.3.2.1.5) ta được:

$$(p_0 + p_1 n)3^n = 5(p_0 + p_1(n-1))3^{n-1} - 6(p_0 + p_1(n-2))3^{n-2} + 4\cdot 3^n, \forall n \in \mathbb{Z}, n \ge 2$$

Chia 2 vế cho $3^{n-2}$, ta được:

$$(p_0 + p_1 n)3^2 = 5(p_0 + p_1(n-1))3 - 6(p_0 + p_1(n-2)) + 4\cdot 3^2$$
$$= (9p_0 - 3p_1 + 36) + 9p_1 n, \forall n \in \mathbb{Z}, n \ge 2$$

So sánh 2 vế, ta thấy $9p_0 = 9p_0 - 3p_1 + 36 \Leftrightarrow p_1 = 12$. Một nghiệm riêng của (III.3.2.1.5) là:

$$f_p(n) = (p_0 + 12n)3^n$$

Mặt khác, nghiệm chung của phần thuần nhất của nó là:

$$f_h(n) = c_1 2^n + c_2 3^n$$

Vậy nên nghiệm chung của nó là:

$$f(n) = f_h(n) + f_p(n)$$
$$= c_1 2^n + (c_2 + p_0)3^n + 12\cdot n\cdot 3^n$$
$$= c_1 2^n + c_3 3^n + 12\cdot n \cdot 3^n$$

Cho 2 giá trị đầu, $f(0)$ và $f(1)$, ta sẽ tính được giá trị của $c_1$ và $c_3$. ☺

**Tìm kết quả cuối cùng**

Chúng ta đã biết $f(n) = f_h(n) + f_p(n)$ là nghiệm chung của hệ thức truy hồi:

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), n \ge k \qquad \text{(II.3.3.1)}$$

Sử dụng các giá trị ban đầu $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(k-1)$, chúng ta có thể tìm được $k$ hằng số chưa xác định trong $f_h(n) + f_p(n)$ để nhận được kết quả duy nhất với mỗi bộ giá trị ban đầu cho hệ thức trên.

**Tóm tắt**

Phương pháp nghiệm đặc trưng dùng để giải hệ thức (II.3.3.1) bao gồm các bước sau:

1. Viết phương trình đặc trưng:
$$x^k - \sum_{i=1}^{k} a_i x^{k-i} = 0$$
2. Xác định các nghiệm phân biệt $t_1, t_1, \ldots, t_s$ của phương trình đặc trưng, với $t_i$ là nghiệm bội $m_i, i = \overline{1,n}$.
3. Xác định nghiệm chung $f_h(n)$ của hệ thức thuần nhất tương ứng. $f_h(n) = u_1(n) + u_2(n) + \ldots + u_s(n)$ với $u_i(n) = \left(c_{i_0} + c_{i_1} n + c_{i_2} n^2 + \ldots + c_{i_{w-1}} n^{w-1}\right) t_i^n, w = m_i$.
4. Xác định nghiệm riêng $f_p(n)$.
   - Nếu $g(n) = 0$, thì $f_p(n) = 0$.

- Khi $g(n) = \sum_{i=1}^{d} e_i n^i, e_d \neq 0$, nghiệm riêng $f_p(n)$ có dạng

$$f_p(n) = p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + ... + p_{d+m} n^{d+m} \qquad \text{(III.3.2.1.1)}$$

Với $m = 0$ nếu 1 không là nghiệm của phương trình đặc trưng, và nếu 1 là nghiệm của phương trình đặc trưng thì $m = k$ với 1 là nghiệm bội $k$ của phương trình đặc trưng.

- Khi $g(n) = ca^n$ với c và a là hằng số, thì nghiệm riêng $f_p(n)$ có dạng

$$f_p(n) = \left(p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + ... + p_w n^w\right) a^n$$

Với $w = 0$ nếu a là nghiệm của phương trình đặc trưng, và bằng k với a là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng.

5. Nếu $g(n) \neq 0$, sử dụng $f_p(n)$ ở trên để loại bỏ tất cả các $f(n-i)$ trong (II.3.3.1) bằng cách thay thế $f_p(n-i)$ cho $f(n-i)$. Sau đó sử dụng tính chất của đồng nhất nhức để xác định càng nhiều càng tốt các hệ số chưa biết.
6. Ghi ra kết quả, $f(n) = f_h(n) + f_p(n)$. Giải hệ sử dụng các giá trị ban đầu $f(0), f(1), f(2), ..., f(k-1)$ để tìm tất cả các hệ số chưa biết còn lại.

**Định lý 2.** *Sáu bước trên luôn tìm được nghiệm duy nhất cho hệ thức (II.3.3.1) với các giá trị khởi đầu cho trước.*

**Ví dụ II.3.5.1.** Phương trình đặc trưng của *hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2*:

$$u_n = 6u_{n-1} - 4u_{n-2} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Là

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

Có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 3 - \sqrt{5}, x_2 = 3 + \sqrt{5}$

Nên

$$u_n = c_1\left(3-\sqrt{5}\right)^n + c_2\left(3+\sqrt{5}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}$$

Giả sử rằng ta có $u_0 = 0$ và $u_1 = 4\sqrt{5}$, vậy thì ta có hệ:

$$\begin{cases} u_0 = c_1\left(3-\sqrt{5}\right)^0 + c_2\left(3+\sqrt{5}\right)^0 \\ u_1 = c_1\left(3-\sqrt{5}\right)^1 + c_2\left(3+\sqrt{5}\right)^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 4\sqrt{5} = c_1\left(3-\sqrt{5}\right) + c_2\left(3+\sqrt{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy biểu thức của $u_n$ là $u_n = -2\left(3-\sqrt{5}\right)^n + 2\left(3+\sqrt{5}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}$ ☺

**Ví dụ II.3.5.2.** Xét hệ thức

$$u_n = \begin{cases} \frac{5}{2} \mid n = 0 \\ \frac{9}{2} \mid n = 1 \\ 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 3n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng cho phần thuần nhất là:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Nghiệm của nó là $x_1 = 2, x_2 = 3$

Vì vậy nghiệm chung cho phần thuần nhất là

$$h_n = c_1 2^n + c_2 3^n \mid n \in \mathbb{N}$$

Do $g(n)=3n^2$ và 1 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của $u_n$ có dạng:
$$p_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2$$
Thề vào hệ thức ban đầu:
$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 = 5\left(a_0 + a_1(n-1) + a_2(n-1)^2\right) - 6\left(a_0 + a_1(n-2) + a_2(n-2)^2\right) + 3n^2$$
$$= (-a_0 + 7a_1 - 19a_2) + (-a_1 + 14a_2)x + (3 - a_2)x^2, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2$$
Nên ta có hệ
$$\begin{cases} a_0 = -a_0 + 7a_1 - 19a_2 \\ a_1 = -a_1 + 14a_2 \\ a_2 = 3 - a_2 \end{cases} \Leftrightarrow a_0 = \frac{45}{2}, a_1 = \frac{21}{2}, a_2 = \frac{3}{2}$$
Vậy nghiệm chung của $u_n$ là
$$u_n = h_n + p_n = c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{45}{2} + \frac{21}{2}n + \frac{3}{2}n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$
Do $u_0$ và $u_1$ đã được biết với giá trị lần lượt là $\frac{5}{2}$ và $\frac{9}{2}$, ta được:
$$\begin{cases} \frac{5}{2} = c_1 + c_2 + \frac{45}{2} \\ \frac{9}{2} = 2c_1 + 3c_2 + \frac{69}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -30 \\ c_2 = 10 \end{cases}$$
Vậy nên $$u_n = -30 \cdot 2^n + 10 \cdot 3^n + \frac{45}{2} + \frac{21}{2}n + \frac{3}{2}n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$
Chúng ta có thể kiểm tra kết quả này bằng quy nạp ☺

**Ví dụ II.3.5.3.** Chúng ta hãy giải hệ thức:
$$f(n) = 10f(n-1) - 37f(n-2) + 60f(n-3) - 36f(n-4) + 4 \mid n \in \mathbb{N}, n \ge 4$$
Với
$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 1$$
Phương trình đặc trưng:
$$x^4 - 10x^3 + 37x^2 + 60x - 36 = 0$$
Hay
$$(x-3)^2(x-2)^2 = 0$$
Có các nghiệm
$$x_1 = x_2 = 2 \text{ và } x_3 = x_4 = 3$$
Do các nghiệm đều bội 2 nên nghiệm chung của phần thuần nhất là:
$$f_h(n) = (c_1 + c_2 n)2^n + (c_3 + c_4 n)4^n$$
Do $g(n) = 4$ và 1 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $f_p(n)$ có dạng:
$$f_p(n) = p_0$$
Thế vào hệ thức ban đầu, ta có: $p_0 = 10p_0 - 37p_0 + 60p_0 - 36p_0 + 4$

Nên $$p_0 = 1$$
Nghiệm chung của hệ thức ban đầu sẽ là:
$$f_h(n) = (c_1 + c_2 n)2^n + (c_3 + c_4 n)4^n + 1$$

Thế $n=0, n=1, n=2, n=3$ và sử dụng $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=1$, ta được

$$\begin{cases} c_1+c_3=0 \\ 2c_1+2c_2+3c_3+3c_4=0 \\ 4c_1+8c_2+9c_3+18c_4=0 \\ 8c_1+24c_2+27c_3+81c_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1=c_2=c_3=c_4=0$$

Vậy nên $f(n)=1, \forall n \in \mathbb{N}$. Chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra điều này bằng quy nạp.

Bây giờ nếu thay đổi điều kiện đề bài thành $f(0)=f(1)=f(2)=1, f(3)=4$ thì sau khi lập hệ tương tự như trên ta sẽ tìm được $c_1=6, c_2=\dfrac{3}{2}, c_3=-6, c_4=1$, lúc này $f_h(n)=\left(6+\dfrac{3}{2}n\right)2^n+(n-6)4^n+1, \forall n \in \mathbb{N}$. Một lần nữa, chúng ta có thể kiểm tra kết quả này bằng quy nạp. ☺

**4. Phương pháp sử dụng hàm sinh**

Một hàm sinh $G(z)$ là một chuỗi lũy thừa vô hạn:

$$G(z)=\sum_{i=0}^{+\infty} c_i z^i \qquad \text{(II.4.1)}$$

Ta nói rằng một hàm sinh $G(z)$ tương ứng với hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $c_i=f(i), \forall i \in \mathbb{N}$.

**Ví dụ II.4.1.** $G(z)=\sum_{i\ge 0} 2z^i$ tương ứng với hàm $f(n)=2, \forall n \in \mathbb{Z}$;

$G(z)=\sum_{i\ge 0} iz^i$ tương ứng với hàm $f(n)=n, \forall n \in \mathbb{Z}$;

$G(z)=\sum_{i\ge 8} 2z^i$ tương ứng với hàm $f(n)=\begin{cases} 0 \mid \forall n \in \mathbb{Z}, 0 \le n \le 7 \\ 2 \mid \forall n \in \mathbb{Z}, 8 \le n \end{cases}$. ☺

Một hàm sinh có thể được biểu diễn dưới 2 dạng. Fạng thứ nhất được gọi là *chuỗi lũy thừa*, đây là dạng được cho ở (II.4.1). Dạng khác được gọi là dạng tường minh.

**Ví dụ II.4.2.** Chuỗi lũy thừa cho hàm $f(n)=1, \forall n \in \mathbb{Z}$ là $G(z)=\sum_{i\ge 0} z^i$, nên $zG(z)=\sum_{i\ge 1} z^i$. Trừ theo vế, ta có $G(z)-zG(z)=\sum_{i\ge 0} z^i-\sum_{i\ge 1} z^i=1$, dẫn đến $G(z)=\dfrac{1}{1-z}$. Vì vậy dạng tường minh của chuỗi lũy thừa $\sum_{i\ge 0} z^i$ là $\dfrac{1}{1-z}$.

Lưu ý rằng $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{i\ge 0} z^i$ chỉ đúng với những giá trị của $z$ làm chuỗi $\sum_{i\ge 0} z^i$ hội tụ. Chúng ta không bàn đến vấn đề này ở đây. ☺

Với $n$ là số nguyên và $i$ là số tự nhiên, *hệ số nhị thức* $\dbinom{n}{i}$ được xác định như sau:

$$\binom{n}{i}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{i(i-1)(i-2)\dots(1)}$$

**Ví dụ II.4.3.** $\dbinom{3}{2}=\dfrac{3\cdot 2}{2\cdot 1}=3$; $\dbinom{4}{2}=\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$; $\dbinom{-3}{2}=\dfrac{(-3)\cdot(-4)}{2\cdot 1}=6$ ☺

*Định lý khai triển nhị thức* (hay ngắn gọn hơn là *định lý nhị thức*) là một định lý toán học về việc khai triển hàm mũ của tổng. Cụ thể, kết quả của định lý này là việc khai triển một nhị thức bậc n thành một đa thức có n+1 số hạng:

$$(a+z)^n = \sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}a^{n-i}z^i\right), n \in \mathbb{N}$$

Tổng quát hơn, định lý được phát biểu dưới dạng:

$$(1+z)^n = \sum_{i=0}^{m}\left(\binom{n}{i}z^i\right), n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(II.4.2)}$$

Với $m = n$ nếu $n \geq 0$ và $m = +\infty$ trong trường hợp ngược lại.

Đẳng thức (II.4.2) cho ta một số dạng tường minh quan trọng.

**Ví dụ II.4.4.** Với $n = -2$, ta được

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{i\geq 0}\left(\binom{-2}{i}z^i\right)$$

Mà $$\binom{-2}{i} = \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)...(-2-i)}{i(i-1)(i-2)...(1)} = (-1)^i(i+1)$$

Nên $$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{i\geq 0}\left((-1)^i(i+1)z^i\right)$$

Thế *z* bởi – *z*, ta được $$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{i\geq 0}\left((i+1)z^i\right)$$

Vậy dạng tường minh của $\sum_{i\geq 0}\left((i+1)z^i\right)$ là $\frac{1}{(1-z)^2}$.

Đẳng thức (II.4.2) có thể dùng để tìm dạng tường minh của $\frac{1}{(1-z)^n} \mid n \in \mathbb{N}^*$. ☺

Chúng ta sẽ sớm biết rằng, hàm sinh có thể dùng để giải các quan hệ hồi quy. Nhưng đầu tiên, chúng ta hãy tìm hiểu về các phép toán trên các hàm sinh.

**Các phép toán trên hàm sinh**

*Cộng và trừ:* Nếu $G_1(z) = \sum_{i\geq 0} c_i z^i$ và $G_2(z) = \sum_{i\geq 0} d_i z^i$ là các hàm sinh tương ứng với các hàm $f_1$ và $f_2$, thì hàm sinh ứng với $f_1 \pm f_2$ là $\sum_{i\geq 0}(c_i \pm d_i)z^i$, là hệ quả trực tiếp từ định nghĩa của hàm sinh.

*Nhân với hằng số:* Nếu $G_1(z) = \sum_{i\geq 0} c_i z^i$ là hàm sinh tương ứng với hàm $f$, thì $G_2(z) = aG_1(z) = \sum_{i\geq 0} ac_i z^i$ là hàm sinh ứng với $a \cdot f$, *a* là hằng số.

Do $z^k G_1(z) = \sum_{i\geq 0} c_i z^{i+k}$ là hàm sinh ứng với hàm số $g(n) = \begin{cases} 0 & \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n < k \\ f(n-k) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq k \end{cases}$, nên nhân một hàm sinh với $z^k$ tương đương với việc dịch chuyển dãy số sang phải *k* đơn vị.

**Ví dụ II.4.5.** Ở *ví dụ II.4.4*, chúng ta đã chỉ ra rằng $\sum_{i\geq 0}\left(\left(i+1\right)z^i\right)=\frac{1}{\left(1-z\right)^2}$, nhân cả 2 vế với *z*, ta nhận được $\sum_{i\geq 0}\left(\left(i+1\right)z^{i+1}\right)=\frac{z}{\left(1-z\right)^2}$ hay $\sum_{i\geq 0}\left(iz^i\right)=\frac{z}{\left(1-z\right)^2}$. Nên $\frac{z}{\left(1-z\right)^2}$ là dạng tường minh cho hàm sinh ứng với hàm số $f\left(n\right)=n,\forall n\in\mathbb{Z},n\geq 0$. ☺

*Tích của 2 hàm sinh*: Tích $G_1\left(z\right)\cdot G_2\left(z\right)$ của 2 hàm sinh $G_1\left(z\right)=\sum_{i\geq 0}c_iz^i$ và $G_2\left(z\right)=\sum_{i\geq 0}d_iz^i$ là một hàm sinh thứ 3 $G_3\left(z\right)=\sum_{i\geq 0}e_iz^i$. Có thể dễ dàng kiểm tra được rằng $e_i$ được cho bởi:

$$e_i=\sum_{j=0}^{i}c_jd_{i-j},i\in\mathbb{N} \qquad \text{(II.4.1.1)}$$

Lưu ý rằng tích của 2 hàm sinh có tính giao hoán: $G_1\left(z\right)\cdot G_2\left(z\right)=G_2\left(z\right)\cdot G_1\left(z\right)$

Đẳng thức (II.4.1.1) cho ta thấy tích của 2 hàm sinh có thể có lợi trong việc tính các tổng. Nếu $G_2\left(z\right)=\sum_{i\geq 0}z^i=\frac{1}{1-z}$, $d_i=1,\forall i\in\mathbb{N}$, thì (II.4.1.1) trở thành:

$$e_i=\sum_{j=0}^{i}c_j,i\in\mathbb{N} \qquad \text{(II.4.1.2)}$$

**Ví dụ II.4.6.** Chúng ta hãy thử tìm biểu thức tường minh cho tổng $s\left(n\right)=\sum_{i=1}^{n}i$. Từ *ví dụ II.4.5*, chúng ta đã biết rằng $\frac{z}{\left(1-z\right)^2}$ là dạng tường minh cho hàm sinh ứng với hàm số $f\left(n\right)=n$. Hơn nữa, ở *ví dụ II.4.2*, ta biết rằng $\frac{1}{1-z}$ là dạng tường minh cho hàm sinh ứng với hàm số $f\left(n\right)=1$. Nên, $\frac{1}{1-z}\cdot\frac{z}{\left(1-z\right)^2}=\frac{z}{\left(1-z\right)^3}$ là dạng tường minh cho $\left(\sum_{i\geq 0}iz^i\right)\left(\sum_{i\geq 0}z^i\right)$. Giả sử rằng dạng chuỗi lũy thừa của $\frac{z}{\left(1-z\right)^3}$ là $\sum_{i\geq 0}e_iz^i$. Theo (II.4.1.2), $e_n=\sum_{i=0}^{n}i=s\left(n\right)$. Bây giờ chúng ta sẽ tính $e_i$. Sử dụng *định lý nhị thức* ta nhận được:

$$\left(1-z\right)^{-3}=\sum_{i\geq 0}\left(\binom{-3}{i}\left(-1\right)^iz^i\right)$$

Vì vậy hệ số của $z^{n-1}$ trong khai triển của $\left(1-z\right)^{-3}$ là:

$$\begin{aligned}\binom{-3}{n-1}\left(-1\right)^{n-1}&=\frac{\left(-3\right)\left(-4\right)...\left(-3-n+2\right)}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(1\right)}\left(-1\right)^{n-1}\\&=\frac{\left(n+1\right)\left(n\right)\left(n-1\right)...\left(3\right)}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(1\right)}\\&=\frac{n\left(n+1\right)}{2}\end{aligned}$$

Nên, hệ số $e_n$ của $z^n$ trong khai triển lũy thừa của $\dfrac{z}{(1-z)^3}$ là $\dfrac{n(n+1)}{2}=s(n)$. ☺

*Đạo hàm:* Lấy đạo hàm (II.4.1) theo *z* cho ta:

$$\frac{d}{dz}\left(G(z)\right)=\sum_{i=0}^{+\infty} ic_i z^{i-1} \qquad \text{(II.4.1.3)}$$

Hay

$$z\frac{d}{dz}\left(G(z)\right)=\sum_{i=0}^{+\infty} (ic)_i z^{i} \qquad \text{(II.4.1.4)}$$

**Ví dụ II.4.7.** Ở *ví dụ II.4.4*, khai triển nhị thức đã được dùng để tìm dạng tường minh cho $\sum_{i\ge 0}\left((i+1)z^i\right)$. Chúng ta cũng có thể tìm được kết quả này bằng phép đạo hàm. Từ *ví dụ II.4.2*, ta biết rằng $\sum_{i\ge 0} z^i=\dfrac{1}{1-z}$. , sử dụng (II.4.1.3) cho ta $\sum_{i=0}^{+\infty} iz^{i-1}=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ hay $\sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)z^i=\dfrac{1}{(1-z)^2}$. ☺

*Tích phân:* Lấy tích phân (II.4.1) theo *z*, ta được:

$$\int_0^z G(u)du=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{c_{i-1}z^i}{i} \qquad \text{(II.4.1.5)}$$

**Ví dụ II.4.8.** Dạng tường minh cho hàm sinh của hàm $f(n)=\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*$ có thể được xác định bằng cách lấy tích phân của $f(n)=1$, từ *ví dụ II.4.2*, ta có:

$$\frac{1}{1-u}=\sum_{i\ge 0}u^i$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{1}{1-u}du &= \sum_{i\ge 0}\int_0^z u^i du\\ &=\sum_{i\ge 0}\frac{1}{z+1}z^{i+1}\\ &=\sum_{i>0}\frac{1}{z}z^i\end{aligned}$$

Nhưng

$$\int_0^z\frac{1}{1-u}du=-\ln(1-z)$$

Nên hàm sinh của hàm số $f(n)=\begin{cases}0 \mid n=0\\ \dfrac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ là $-\ln(1-z)$.

**Ứng dụng giải các hệ thức truy hồi**

Phương pháp sử dụng hàm sinh để giải các hệ thức truy hồi sữ được minh họa rõ nhất bằng cách lấy một ví dụ. Xét hệ thức truy hồi:

$$F(n)=\begin{cases}0 & \mid n=0\\ 2F(n-1)+7 & \mid n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

Những bước giải các hệ thức truy hồi bằng hàm sinh là:

1. Gọi $G(z)=\sum_{i\geq 0} a_i z^i$ là hàm sinh của hàm $F(n)$, vậy thì $a_i = F(i), \forall i \in \mathbb{N}$.
2. Thay thế tất cả $F(n), F(n-1), F(n-2), ...$ bởi các $a_i$ tương ứng, ở ví dụ này sau khi thức hiện bước 2 ta sẽ được: $a_n = 2a_{n-1} + 7, \forall n \in \mathbb{N}^*$
3. Nhân 2 vế của đẳng thức nhận được với $z^n$ và lấy tổng 2 vế của tất cả các *n* mà đẳng thức còn đúng. Ở ví dụ này, ta được $\sum_{n\geq 1} a_n z^n = 2\sum_{n\geq 1} a_{n-1} a_n z^n + \sum_{n\geq 1} 7 z^n$

| | Dạng tường minh | Chuỗi lũy thừa |
|---|---|---|
| 1 | $(1-az)^{-1}$ | $\sum_{i\geq 0} a^i z^i$ |
| 2 | $(1-az)^{-2}$ | $\sum_{i\geq 0} (i+1) a^i z^i$ |
| 3 | $(1-az)^n$ | $\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} a^i z^i$ <br> $m = \begin{cases} n & \mid n \geq 0 \\ +\infty & \mid n < 0 \end{cases}$ |
| 4 | $\ln(1+az)$ | $\sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} a^i z^i$ |
| 5 | $-\ln(1-az)$ | $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i} a^i z^i$ |
| 6 | $e^{az}$ | $\sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!} a^i z^i$ |

***Bảng 1.** Một số dạng tường minh và chuỗi lũy thừa tương ứng*

4. Thay thế tất cả các tổng chứa $a_i$ bằng biểu thức tương đương chỉ chứa $G(z), z$ và một số hữu hạn các $a_i$. Cho một hệ thức truy hồi bậc *k* sẽ chỉ còn lại $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$. Ở ví dụ này là:

$$G(z) - a_0 = 2zG(z) + \sum_{n\geq 1} 7 z^n$$

5. Thay thế các giá trị đã biết $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ $(a_i = F(i))$:

$$G(z) = 2zG(z) + \sum_{n\geq 1} 7 z^n$$

6. Giải phương trình tìm $G(z)$ từ đẳng thức nhận được. Ở đây thì:

$$G(z) = \frac{1}{1-2z} \sum_{n\geq 1} 7 z^n$$

7. Xác định hệ số của $z^n$ trong khai triển lũy thừa của đẳng thức nhận được ở bước 6. Hệ số này là $a_n = F(n)$. Về ví dụ của chúng ta:

$$G(z) = \sum_{i\geq 0} 2^i z^i \cdot \sum_{n\geq 1} 7 z^n$$

Hệ số của $z^n$ trong tích của hai chuỗi trên là:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} 7 \cdot 2^{n-i} = 7\left(2^n - 1\right)$$

Nên, $$F(n) = 7\left(2^n - 1\right), n \in \mathbb{N}. ☺$$

Một vài ví dụ tiếp đây sẽ minh họa rõ hơn kĩ thuật này.

**Ví dụ II.4.2.1.** Chúng ta hãy xét dãy các số Fibonacci:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$$

Với $$F_0 = 0, F_1 = 1$$

Đặt $G(z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$ là hàm sinh của hàm $F_n$. Từ định nghĩa của hàm sinh, ta có $a_i = F_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Vậy thì $F_n = a_n, F_{n-1} = a_{n-1}, F_{n-2} = a_{n-2}$, từ hệ thức truy hồi cho $F_n$, ta được:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$$

Nhân 2 vế với $z^n$ và lấy tổng từ $n = 2$ đến $+\infty$, ta được:

$$\sum_{n \geq 2} a_n z^n = \sum_{n \geq 2} a_{n-1} z^n + \sum_{n \geq 2} a_{n-2} z^n, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$$

Nhận xét rằng tổng trên không thể lấy từ $n = 0$ đến $+\infty$ do $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ chỉ đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Đẳng thức trên có thể được viết lại như sau:

$$G(z) - a_1 z - a_0 = z\sum_{n \geq 2} a_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n \geq 2} a_{n-2} z^{n-2} = z\sum_{n \geq 1} a_n z^n + z^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^n = zG(z) - a_0 z + z^2 G(z), \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$$

Thế $a_0 = F_0 = 0$ và $a_1 = F_1 = 1$ và giải đẳng thức trên cho $G(z)$, ta được:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z}{1 - z - z^2} \\ &= \frac{z}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} z\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} z\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} z} - \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} z} \right) \end{aligned}$$

Do khai triển lũy thừa của $(1 - az)^{-1}$ là $\sum_{i \geq 0} a^i z^i$ nên:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{i \geq 0} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i z^i - \sum_{i \geq 0} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i z^i \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{i \geq 0} \left( \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \right) z^i \right) \right) \end{aligned}$$

Vậy nên $$F_n = a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right), \forall n \geq 0. ☺$$

**Ví dụ II.4.2.2.** Xét dãy: $t_n = \begin{cases} 0 & | n = 0 \\ at_{n-1} + bn & | n \ge 1 \end{cases}$

Đặt $G(z) = \sum_{i \ge 0} c_i z^i$ là hàm sinh của hàm $t_n$, thì $c_i = t_i, i \ge 0$. Từ công thức truy hồi của dãy, ta có:

$$c_n = ac_{n-1} + bn, \forall n \ge 1$$

Nhân 2 vế với $z^n$ rồi lấy tổng từ $n = 1$ đến $+\infty$ cho ta:

$$\sum_{n \ge 1} c_n z^n = a \sum_{n \ge 1} c_{n-1} z^n + \sum_{n \ge 1} bnz^n$$

Hay

$$G(z) - c_0 = az \sum_{n \ge 1} c_{n-1} z^{n-1} + \sum_{n \ge 1} bnz^n$$

$$= azG(z) + \sum_{n \ge 1} bnz^n$$

Thế $c_0 = 0$ và biến đổi, ta được: $G(z) = \dfrac{1}{1 - az} \sum_{n \ge 1} bnz^n = \sum_{n \ge 0} a^n z^n \sum_{n \ge 1} bnz^n$

Áp dụng công thức tích của 2 hàm sinh, ta có:

$$c_n = b \sum_{i=1}^{n} ia^{n-i} = ba^n \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{a^i}.$$

Nên $t_n = c_n = ba^n \sum_{i=0}^{n} \dfrac{i}{a^i}, n \ge 0$. ☺

**Ví dụ II.4.2.3.** Ở ví dụ trước, chúng ta đã chứng minh được rằng $c_n = ba^n \sum_{i=0}^{n} \dfrac{i}{a^i}$. Một biểu thức tường minh hơn cho $c_n$ có thể nhận được từ biểu thức tường minh của $d_n = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{i}{a^i}$. Với $a = 1$ biểu thức này có thể được tìm một cách rất đơn giản, vì vậy ta chỉ xét trường hợp $a \ne 1$. Trước tiên, ta hãy tìm hàm sinh cho hàm số $f(i) = \dfrac{i}{a^i}$. Ta đã biết rằng $(1 - z)^{-1} = \sum_{i \ge 0} z^i$. Nên, $\left(1 - \dfrac{z}{a}\right)^{-1} = \sum_{i \ge 0} \dfrac{z^i}{a^i}$. Lấy đạo hàm theo biến $z$, ta được

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - \frac{z}{a}}\right) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{i \ge 0} \frac{z^i}{a^i}\right) = \sum_{i \ge 0}\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{z^i}{a^i}\right)\right) = \sum_{i \ge 0} \frac{iz^{i-1}}{a^i}$$

Hay $$\frac{a}{(z - a)^2} = \sum_{i \ge 0} \frac{iz^{i-1}}{a^i}$$

Nhân 2 vế với $z$, ta được $$\frac{az}{(z - a)^2} = \sum_{i \ge 0} \frac{iz^i}{a^i}$$

Nhân 2 vế với $\dfrac{1}{1 - z}$, ta được

$$\frac{az}{(z - a)^2 (1 - z)} = \frac{1}{1 - z} \sum_{i \ge 0} \frac{iz^i}{a^i} = \sum_{n \ge 0}\left(\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{a^i}\right) z^n\right) = \sum_{n \ge 0}\left(d_n z^n\right)$$

Bây giờ chúng ta cần phải tìm hệ số của $z^n$ trong khai triển của

$$\frac{az}{(z-a)^2(1-z)}$$

Khai triển biểu thức trên, ta được

$$\begin{aligned}\frac{az}{(z-a)^2(1-z)} &= az(a-z)^{-2}(1-z)^{-1}\\ &= \frac{z}{a}\left(1-\frac{z}{a}\right)^{-2}(1-z)^{-1}\\ &= \frac{z}{a}\sum_{i\ge 0}\frac{i+1}{a^i}z^i\sum_{i\ge 0}z^i\end{aligned}$$

Nên,

$$\begin{aligned}d_n &= \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i+1}{a^i}\\ &= \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{a^i}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a^i}\right)\\ &= \frac{1}{a}\left(d_n-\frac{n}{a^n}+\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n-1}{\frac{1}{a}-1}\right)\end{aligned}$$

Suy ra $$d_n = \frac{a^{n+1}-an-a+n}{a^n(a-1)^2}.$$ ☺

**Ví dụ II.4.2.4.** Xét hệ thức truy hồi $u_n = 5u_{n-1}-6u_{n-2}+2n, \forall n\in\mathbb{N}, n\ge 2$ với $u_0=u_1=0$.

Giả sử $G(z)=\sum_{i\ge 0}c_iz^i$ là hàm sinh ứng với hàm *f*. Vậy thì $u_n=c_n$, $u_{n-1}=c_{n-1}$ và $u_{n-2}=c_{n-2}$. Vì thế:

$$c_n = 5c_{n-1}-6c_{n-2}+2n, n\ge 2$$

Hay

$$c_nz^n = 5c_{n-1}z^n-6c_{n-2}z^n+2nz^n, n\ge 2$$

Lấy tổng khi cho $n=2$ đến $+\infty$:

$$\sum_{n\ge 2}c_nz^n = 5z\sum_{n\ge 2}c_{n-1}z^{n-1}-6z^2\sum_{n\ge 2}c_{n-2}z^{n-2}+\sum_{n\ge 2}2nz^n, n\ge 2$$

Hay

$$G(z)-c_1z-c_0 = 5z\left(G(z)-c_0\right)-6z^2G(z)+\sum_{n\ge 2}2nz^n, n\ge 2$$

Thế $c_0=c_1=0$, ta được:

$$G(z)=5zG(z)-6z^2G(z)+\sum_{n\ge 2}2nz^n, n\ge 2$$

Hay $$G(z)\left(1-5z+6z^2\right)=\sum_{n\ge 2}2nz^n$$

Nên

$$G(z)=\frac{\sum_{n\ge 2}2nz^n}{(1-3z)(1-2z)}$$
$$=\left(\frac{3}{1-3z}-\frac{2}{1-2z}\right)\sum_{j\ge 2}2jz^j$$
$$=\left(3\sum_{i\ge 0}3^i z^j-2\sum_{i\ge 0}2^i z^j\right)\sum_{j\ge 2}2jz^j$$

Có thể thấy rằng hệ số $c_n$ của $z^n$ lúc này là:

$$c_n=\sum_{j=2}^{n}6j\cdot 3^{n-j}-\sum_{j=2}^{n}4j\cdot 2^{n-j}$$
$$=6\cdot 3^n\sum_{j=2}^{n}\frac{j}{3^j}-4\cdot 2^n\sum_{j=2}^{n}\frac{j}{2^j}$$

Từ *ví dụ II.4.2.3*, ta biết rằng: $$\sum_{j=2}^{n}\frac{j}{3^j}=\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 3^n}-\frac{1}{3}$$

Và $$\sum_{j=2}^{n}\frac{j}{2^j}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}-\frac{1}{2}$$

$$c_n=6\cdot 3^n\left(\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 3^n}-\frac{1}{3}\right)-4\cdot 2^n\left(\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}-\frac{1}{2}\right)$$

Nên $$=\frac{3}{2}\left(3^{n+1}-2n-3\right)-6\cdot 3^{n-1}-4\left(2^{n+1}-n-2\right)+4\cdot 2^{n-1}$$
$$=\frac{5\cdot 3^n}{2}-3\cdot 2^{n+1}+n+\frac{7}{2}$$

Vậy $$u_n=\frac{5\cdot 3^n}{2}-3\cdot 2^{n+1}+n+\frac{7}{2}.$$ ☺

Cuối cùng mời các bạn hãy tự giải một số bài toán sau để nắm chắc hơn các phương pháp nêu trên:
Tìm số hạng tổng quát của dãy số $(u_n)$ trong các trường hợp sau sau:

1. $u_1=a$, $u_{n+1}=a+bu_n$.
2. $u_0=a,u_1=b,u_{n+2}=\frac{1}{2}\left(u_{n+1}+u_n\right)$
3. $u_0=1,u_1=2,u_2=3,u_{n+3}=18u_{n+2}-107u_{n+1}+210+n^3-5n^2-3$
4. $u_1=a$, $u_{n+1}^4u_n-u_{n+1}^2u_n+u_n-au_{n+1}u_n-bu_{n+1}u_n^4+bu_{n+1}u_n^2-bu_{n+1}=0$.
5. $u_0=a,u_1=b,u_2=c,2u_{n+3}+u_{n+2}-16u_{n+1}-15u_n+4n^2-2=0$
6. $u_0=a,u_1=b,u_2=c,2u_{n+3}+5u_{n+2}-4u_{n+1}-10u_n-3^n+n^2-4n-4=0$
7. $u_0=a,u_1=b,2u_{n+2}+u_{n+1}-10u_n-3^n-n^3+n^2-2n-1=0$

*Chuyên đề về việc giải các quan hệ truy hồi kết thúc ở đây. Hy vọng rằng chuyên đề này sẽ là một tài liệu tham khảo bổ ích cho bạn đọc.*

*Vanhoa*

*Kiến thức chỉ có được qua tư duy của con người* - A. Einstein (1879–1954)

**Tham khảo**

*A general method for solving divide-and-conquer recurrences,*
by J. Bentley, D. Haken, and J. Saxe, SIGACT News, 12(3), 1980, pp. 36-44.

*Concepts in Discrete Mathematics*
by Sartaj Sahni, Camelot Publishing, 1985

*Introductory combinatorics*
By R. Brualdi, Elsevier North-Holland Inc., New York, 1977