

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC AN GIANG
KHOA SỬ PHẠM**

-----oOo-----

**LÊ MINH THẮNG
ĐH3A2**

**CÁC DẠNG TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN,
VẬN DỤNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM CÔSI ĐỂ GIẢI
MỘT SỐ DẠNG TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM**

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN: Th.s VƯƠNG VĨNH PHÁT

AN GIANG – 2004

LỜI CẢM ƠN

Tôi bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thạc sĩ Vương Vĩnh Phát, người thầy đã tận tình hướng dẫn, hết lòng giúp đỡ để đề tài được hoàn thành đúng thời hạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, khoa sư phạm, các thầy cô trong tổ toán trường Đại học An Giang đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình thực hiện đề tài.

Tác giả đề tài

Lê Minh Thắng

MỞ ĐẦU

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI:

Hiện nay, ở Trường Phổ Thông, phương trình hàm vẫn chưa được đề cập nhiều. Phần lớn các học sinh tiếp cận với phương trình hàm là các học sinh lớp chuyên Toán, còn đối với học sinh đại trà thì vẫn là một lĩnh vực xa lạ, khó mà tiếp cận. Đa số học sinh khi tìm hiểu về phương trình hàm đều cảm thấy khó bởi vì đây là loại toán đòi hỏi ở người học phải vận dụng nhiều kiến thức khi giải, có khả năng tư duy tốt, khả năng khái quát, phán đoán vấn đề

Mặt khác, các tài liệu đề cập về phương trình hàm còn ít và chưa có một tài liệu nào trình bày khá đầy đủ các khía cạnh của phương trình hàm. Do đó, việc giúp học sinh tiếp cận với phương trình hàm dễ dàng hơn, và giải được một số bài toán về phương trình hàm là một yêu cầu hết sức cần thiết nên chúng tôi chọn đề tài: ***“Một số dạng toán phương trình hàm cơ bản và vận dụng phương trình hàm Côsi để giải một số dạng toán phương trình hàm”***.

II. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU VÀ KHÁCH THỂ NGHIÊN CỨU:

Khách thể nghiên cứu: phương trình hàm.

Đối tượng nghiên cứu: một số dạng phương trình hàm cơ bản và một số dạng phương trình hàm vận dụng phương trình hàm Côsi để giải.

III. MỤC ĐÍCH VÀ NHIỆM VỤ:

Nghiên cứu một số dạng phương trình hàm cơ bản.

Nghiên cứu phương trình hàm Côsi từ đó áp dụng phương trình hàm Côsi để giải một số phương trình hàm khác.

Giúp đào sâu vấn đề từ một bài toán.

IV. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU:

Phương pháp nghiên cứu lí luận: phân tích các tài liệu về phương trình hàm, các tạp chí toán học và tuổi trẻ, 40 năm Olympic Toán học Quốc tế

V. GIẢ THUYẾT KHOA HỌC:

Nếu học sinh Phổ Thông nắm được một số dạng phương trình hàm và biết vận dụng chúng để giải toán, thì học sinh sẽ tiếp cận nội dung phương trình hàm dễ dàng hơn, tạo điều kiện phát triển năng lực tư duy, năng lực giải toán...

VI. NỘI DUNG:

Ngoài các phần mở đầu, tài liệu tham khảo, nội dung đề tài gồm hai chương:

Chương I: KIẾN THỨC CƠ BẢN.

1.1. Các khái niệm.

1.2. Một số dạng phương trình hàm cơ bản.

Kết luận chương 1.

Chương II: VẬN DỤNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM CÔSI VÀ KHAI THÁC BÀI TOÁN.

2.1. Phương trình hàm Côsi.

2.1.1. Phương trình hàm Côsi.

2.1.2. Các bài tập áp dụng.

2.2. Khai thác bài toán.

2.2.1. Giải quyết bài toán.

2.2.2. Khi thay đổi điều kiện của bài toán.

2.2.3. Mở rộng vấn đề.

Kết luận chương 2.

TÀI LIỆU THAM KHẢO.

MỤC LỤC

-----oOo-----

Đề mục	Trang
Mở đầu	
Chương I: Kiến thức cơ bản.	1
1.1. Các khái niệm cơ bản.	1
1.1.1. Giải phương trình hàm.	1
1.1.2. Hàm số chẵn và hàm số lẻ.	2
1.1.3. Hàm số đồng biến và hàm số nghịch biến.	3
1.1.4. Hàm số liên tục.	4
1.1.5. Đạo hàm của hàm số.	5
1.1.6. Hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính.	5
1.1.7. Hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính.	8
1.1.8. Điểm bất động.	10
1.2. Các dạng phương trình hệ phương trình hàm cơ bản.	10
1.2.1. Dạng $f(u(x)) = v(x)$.	10
1.2.2. Dạng $af(u(x)) + bf(v(x)) = v(x)$	12
1.2.3. Dạng $\begin{cases} af(u(x)) + bg(v(x)) = w(x) \\ a'f(u'(x)) + b'g(v'(x)) = w'(x) \end{cases}$	14
Kết luận chương I.	17
Chương II: Vận dụng phương trình hàm Côsi và khai thác bài toán.	18
2.1. Vận dụng phương trình hàm Côsi.	18
2.1.1. Phương trình hàm Côsi.	18
Phương trình hàm Côsi.	18
Phương trình hàm Côsi mở rộng.	20
Bài tập áp dụng.	23

2.1.2. Các dạng bài tập áp dụng.	26
Dạng 1	26
Dạng 2	30
Dạng 3	34
Dạng 4	37
2.2. Khai thác bài toán.	45
2.2.1. Bài toán.	45
2.2.2. Khi thay đổi điều kiện bài toán.	46
2.2.3. Mở rộng vấn đề.	47
Kết luận chương II.	49
Tài liệu tham khảo.	50

Chương I : KIẾN THỨC CƠ BẢN



1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

1.1.1. Giải phương trình hàm: là xác định hàm số chưa biết trong phương trình

Ví dụ: Hãy xác định hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn các phương trình:

$$2f(1 - x) + 1987 = f(x)$$

$$(x - 1).f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = A - 1$$

1.1.2. Hàm số chẵn và hàm số lẻ:

1.1.2.1. Hàm số chẵn:

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên M , $M \subset D(f)$ ($D(f)$ là tập xác định của hàm số $f(x)$) nếu:

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow -x \in M \\ f(-x) = f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Ví dụ: Hàm số $f(x) = \cos(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$. Thật vậy:

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$$

1.1.2.2. Hàm số lẻ:

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M , $M \subset D(f)$ nếu:

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow -x \in M \\ f(-x) = -f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Ví dụ: Hàm số $f(x) = \sin(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R}$ nên, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$$

1.1.2.3. Bài tập:

Bài 1: Chứng minh rằng mọi hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ đều có thể viết được dưới dạng tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

Giải

$$\text{Ta có : } f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Ta sẽ chứng minh $f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ là hàm số chẵn và
 $f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ là hàm số lẻ

Vì hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ nên ta có :

$$f_1(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = f_1(x)$$

$\Rightarrow f_1(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Tương tự ta chứng minh được $f_2(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Bài 2: Cho $x_0 \in \mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ sao cho:

$$f(x_0 - x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt } x = \frac{x_0}{2} - t \Leftrightarrow t = \frac{x_0}{2} - x$$

$$\text{Khi đó : } x_0 - x = \frac{x_0}{2} + t$$

$$\text{Và (1) có dạng: } f\left(\frac{x_0}{2} + t\right) = f\left(\frac{x_0}{2} - t\right) \quad (2)$$

$$\text{Đặt } g(t) = f\left(\frac{x_0}{2} + t\right) \quad \text{thì } g(-t) = f\left(\frac{x_0}{2} - t\right), \quad f(t) = g\left(t - \frac{x_0}{2}\right)$$

Khi đó (2) có dạng $g(-t) = g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Vậy $g(t)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$

Kết luận: $f(x) = g\left(x - \frac{x_0}{2}\right)$, trong đó $g(x)$ là hàm chẵn tùy ý trên $\mathbb{R}$

Bài 3: Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ sao cho

$$f(a - x) + f(x) = b, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải

Đặt: $t = \frac{a}{2} - x$. Khi đó $x = \frac{a}{2} - t$ và $a - x = \frac{a}{2} + t$.

Khi đó (1) có dạng :

$$f\left(\frac{a}{2} + t\right) + f\left(\frac{a}{2} - t\right) = b \quad (2)$$

Đặt: $f\left(\frac{a}{2} + t\right) - \frac{b}{2} = g(t)$

Khi đó có thể viết (2) dưới dạng :

$$g(-t) + g(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Hay : $g(-t) = -g(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy : $g(t)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$

Kết luận: $f(x) = g\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{b}{2}$ trong đó $g(x)$ là hàm lẻ tùy ý trên $\mathbb{R}$.

1.1.3. Hàm số đồng biến và hàm số nghịch biến:

1.1.3.1. Hàm số đồng biến :

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên khoảng (a,b) , nếu với mọi điểm x_1 và x_2 thuộc khoảng ấy mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Ví dụ: Hàm số $y = f(x) = x$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Thật vậy :

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 < x_2$ thì ta có :

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

1.1.3.2. Hàm số nghịch biến :

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm nghịch biến trên khoảng (a,b) nếu với mọi điểm x_1 và x_2 thuộc khoảng ấy mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$

Ví dụ : Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$ là hàm nghịch biến trên khoảng $(1,3)$. Thật vậy :

$\forall x_1, x_2 \in (1, 3)$ sao cho $1 < x_1 < x_2 < 3$ thì ta có :

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

1.1.3.3. Bài tập:

Bài 1: Chứng minh rằng nếu các hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đồng biến trên tập hợp X thì hàm số $y = h(x) = f(x) + g(x)$ cũng đồng biến trên X .

Giải

Vì các hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đồng biến trên tập hợp X nên $\forall x_1, x_2 \in X$

$$\text{sao cho } x_1 < x_2 \text{ ta có : } \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) < g(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_2) - f(x_1) > 0 \\ g(x_2) - g(x_1) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [f(x_2) - f(x_1)] + [g(x_2) - g(x_1)] > 0 \Leftrightarrow [f(x_2) + g(x_2)] - [f(x_1) + g(x_1)] > 0$$

$$\text{Hay: } h(x_2) - h(x_1) > 0$$

$$\Leftrightarrow h(x_2) > h(x_1).$$

Do đó hàm số $y = h(x)$ là hàm số đồng biến trên tập X .

1.1.4. Hàm số liên tục :

1.1.4.1. Định nghĩa hàm số liên tục:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ được xác định tại điểm $x = x_0$. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

- Nếu đẳng thức trên không xảy ra thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = x_0$
- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc đoạn $[a, b]$ thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn đó.

Ví dụ: Hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$ liên tục $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Thật vậy :

- Tại điểm $x = 3$ thì hàm số không xác định nên đẳng thức $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ không xảy ra. Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x = 3$

- Tại điểm $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ thì ta có đẳng thức :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} = \frac{x_0^2 - 3x_0 + 2}{x_0 - 3} = f(x_0)$$

Do đó , hàm số liên tục $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1.1.4.2. Định lí Bônxanô - Côsi thứ nhất :

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$

Ví dụ: Hàm số $y = f(x) = x - 1$, liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và $f(0).f(2) = -1 < 0$

$\Rightarrow \exists c \in (0; 2)$ sao cho $f(c) = 0$ mà cụ thể là $c = 1 \in (0; 2)$

1.1.5. Đạo hàm của hàm số :

Cho hàm số $f(x)$, $x_0 \in D(f)$. Ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại và hữu hạn ; Giới hạn này được kí hiệu là $f'(x_0)$ và được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0

Ví dụ: Xét hàm số $y = 3x - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta xét đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x_0 + \Delta x) - 2 - (3x_0 - 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$$

Vậy : Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ là : $f'(x_0) = 3$.

1.1.6. Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính:

1.1.6.1. Hàm tuần hoàn cộng tính:

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ a ($a > 0$) trên M nếu $M \subset D(f)$ ($D(f)$ là tập hợp xác định của hàm số $f(x)$) và:

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x + a) = f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Cho $f(x)$ là hàm tuần hoàn trên M . Khi đó T ($T > 0$) được gọi là chu kỳ cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T mà không là hàm tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn T .

Ví dụ: Hàm số $f(x) = |\sin x|$ là hàm tuần hoàn. Thật vậy:

Miền xác định của $f(x)$ là toàn trục số nên với mọi x , các điểm $x + \pi$ và $x - \pi$ cũng thuộc miền xác định của hàm số:

$$\text{Ta có: } f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$$

Do đó: $f(x)$ là hàm tuần hoàn

Nếu gọi T là chu kỳ cơ sở của $f(x)$ tức là: $f(x + T) = f(x)$

Thay $x = 0$ ta được :

$$|\sin T| = 0 \Leftrightarrow \sin T = 0 \Rightarrow T = k\pi \quad (k=1,2,3,\dots) \text{ (do } T > 0)$$

Nên $T = \pi$ là chu kỳ cơ sở của hàm số $f(x)$

Vậy $f(x) = |\sin x|$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở là $T = \pi$

1.1.6.2. Hàm phản tuần hoàn công tính :

– Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn chu kỳ b ($b > 0$) trên $M \subset D(f)$ ($D(f)$ là tập xác định của hàm số $f(x)$) và :

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm b \in M \\ f(x + b) = -f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

– Nếu $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn chu kỳ b . Trên M mà không là hàm phản tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn b trên M thì b được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn $f(x)$ trên M .

Ví dụ : Hàm số $f(x) = \sin x$ là hàm phản tuần hoàn. Thật vậy :

Miền xác định của $f(x)$ là toàn trục số, nên $\forall x$ các điểm $x + \pi$ và $x - \pi$ cũng thuộc miền xác định của hàm số.

$$\text{Ta có: } f(x + \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x = -f(x)$$

Nên hàm số $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn với chu kỳ là π .

Nếu gọi T là chu kỳ cơ sở của $f(x)$. Tức là : $f(x + T) = -f(x)$

$$\Leftrightarrow \sin(x + T) = -\sin x$$

Thay $x = 0$ ta được : $f(T) = -\sin 0 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin T = 0$$

$$\Leftrightarrow T = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ do } T > 0$$

$$\Rightarrow T = \pi$$

Vậy hàm số $f(x) = \sin x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở là π

1.1.6.3. Bài tập:

Bài 1 : Cho cặp hàm $f(x), g(x)$ tuần hoàn trên M có các chu kỳ lần lượt là a và b ($a, b > 0$) với $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Chứng minh rằng : $F(x) = f(x) + g(x)$ và $G(x) = f(x).g(x)$ cũng là những hàm tuần hoàn trên M .

Giải

Theo giả thiết $\exists m, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1$ sao cho $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

Đặt $T = na = mb$. Khi đó:

$$\begin{cases} F(x + T) = f(x + na) + g(x + mb) = f(x) + g(x) = F(x), \forall x \in M \\ G(x + T) = f(x + na).g(x + mb) = f(x).g(x) = G(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Hơn nữa, $\forall x \in M$ thì $x \pm T \in M$. Vậy $F(x), G(x)$ là những hàm tuần hoàn trên M

Bài 2: Chứng minh rằng mọi hàm phản tuần hoàn trên M cũng là hàm tuần hoàn trên M

Giải

Theo giả thiết, $\exists b > 0$ sao cho $\forall x \in M$ thì $x \pm b \in M$ và $f(x + b) = -f(x), \forall x \in M$

Suy ra : $\forall x \in M$ thì $x \pm 2b \in M$ và

$$f(x + 2b) = f(x + b + b) = -f(x + b) = -(-f(x)) = f(x), \forall x \in M$$

Vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $2b$ trên M

Bài 3 : Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn chu kỳ b trên M khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng : $f(x) = g(x + b) - g(x)$

Với $g(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $2b$ trên M

Giải

Giả sử $f(x)$ có dạng: $f(x) = g(x + b) - g(x)$ ta có:

$$f(x + b) = g(x + 2b) - g(x + b)$$

$$\begin{aligned}
 &= g(x) - g(x + b) \\
 &= -[g(x + b) - g(x)] \\
 &= -f(x), \forall x \in M
 \end{aligned}$$

Hơn nữa, $\forall x \in M$ thì $x \pm b \in M$. Do đó, $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn chu kì b trên M .

Ngược lại, với $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn chu kì b trên M , chọn $g(x) = \frac{-1}{2}f(x)$ thì $g(x)$ là hàm tuần hoàn chu kì $2b$ trên M (theo bài 2) và

$$g(x + b) - g(x) = \frac{-1}{2}f(x + b) - \left(\frac{-1}{2}f(x)\right) = \frac{-1}{2}(-f(x)) + \frac{1}{2}f(x) = f(x), \forall x \in M$$

1.1.7. Hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính:

1.1.7.1. Hàm tuần hoàn nhân tính:

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì a ($a \notin \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D(f)$ ($D(f)$ là tập xác định của hàm số $f(x)$) và:

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M, \\ f(ax) = f(x), \quad \forall x \in M \end{cases}$$

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = \sin(2\pi \log_2 x)$. Khi đó $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì 2 trên $\mathbb{R}^+$

Thật vậy, ta có: $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thì $2^{\pm 1}x \in \mathbb{R}^+$

Và $\sin(2\pi \log_2 (2x)) = \sin(2\pi(1 + \log_2 x)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+.$

1.1.7.2. Hàm phản tuần hoàn nhân tính:

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kì a ($a \notin \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D(f)$ ($D(f)$ là tập xác định của hàm $f(x)$) và:

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M, \\ f(ax) = -f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$

Ví dụ: Hàm số $f(x) = \sin(\pi \log_2 x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kì 2 trên $\mathbb{R}^+.$

Thật vậy, ta có: $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thì $2^{\pm 1}.x \in \mathbb{R}^+$ và:

$$f(2x) = \sin(\pi \log_2 (2x)) = \sin(\pi(1 + \log_2 x))$$

$$= -\sin(\pi \cdot \log_2 x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$$

1.1.7.3. Bài tập:

Bài 1: Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm tuần hoàn nhân tính chu kì a và b , tương ứng trên M và : $\frac{\ln|a|}{\ln|b|} = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng : $F(x) = f(x) + g(x)$ và $G(x) = f(x).g(x)$ là những hàm tuần hoàn nhân tính trên M .

Giải

Từ giả thiết suy ra $|a|^n = |b|^m$. Ta chứng minh $T = a^{2n} = b^{2m}$ là chu kì của $F(x)$ và $G(x)$. Thật vậy, ta có :

$$F(Tx) = f(a^{2n}x) + g(b^{2m}x) = f(x) + g(x) = F(x), \forall x \in M$$

$$G(Tx) = f(a^{2n}x).g(b^{2m}x) = f(x).g(x) = G(x), \forall x \in M$$

Hơn nữa, $\forall x \in M$ thì $T^{\pm 1}x \in M$. Do đó $F(x)$ và $G(x)$ là những hàm tuần hoàn nhân tính trên M .

Bài 2: Chứng minh rằng mọi hàm phản tuần hoàn nhân tính trên M cũng là hàm tuần hoàn nhân tính trên M .

Giải

Theo giả thiết, $\exists b \notin \{0, \pm 1\}$ sao cho $\forall x \in M$ thì $b^{\pm 1}.x \in M$ và:

$$f(bx) = -f(x), \forall x \in M.$$

Suy ra : $\forall x \in M$ thì $(b^2)^{\pm 1}x \in M$ và

$$f(b^2x) = f(b.bx) = -f(bx) = -(-f(x)) = f(x), \forall x \in M.$$

Như vậy, $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì b^2 trên M .

Bài 3: Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kì b ($b \notin \{0, \pm 1\}$) trên M khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng : $f(x) = \frac{1}{2}(g(bx) - g(x))$, trong đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì b^2 trên M .

Giải

Thật vậy, nếu $f(x)$ có dạng $f(x) = \frac{1}{2}(g(bx) - g(x))$ thì :

$$f(bx) = \frac{1}{2}[g(b^2x) - g(bx)] = \frac{1}{2}[g(x) - g(bx)] = -f(x), \forall x \in M$$

Hơn nữa, $\forall x \in M$ thì $b^{b^2} \cdot x \in M$. Do đó, $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ b trên M .

Ngược lại, giả sử $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ b trên M . Khi đó, $g(x) = -f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ b^2 trên M (bài 2) và

$$\frac{1}{2}[g(bx) - g(x)] = \frac{1}{2}[-f(bx) - (-f(x))] = \frac{1}{2}[-(-f(x)) + f(x)] = f(x), \forall x \in M.$$

1.1.8. Điểm bất động: x được gọi là điểm bất động của hàm f nếu $f(x) = x$.

Ví dụ: Hàm số $y = f(x) = x^2$ có một điểm bất động là $x = 1$. Thật vậy, $f(1) = 1$

1.2. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN :

1.2.1. Dạng $f(u(x)) = v(x)$:

1.2.1.1. Phương pháp giải:

Đặt $t = u(x) \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow f(t) = v(\varphi(t)) \Rightarrow f(x)$

1.2.1.2. Bài tập:

Bài 1: Xác định $f(x)$ khi biết :

a) $f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1} \quad (\forall x \neq 1, x \neq -2)$

b) $f(\sin x) = x - 3$

Giải

a) Đặt $t = \frac{3x+1}{x+2} \Leftrightarrow x = \frac{2t-1}{3-t} \quad (t \neq 3)$

$$\text{Do đó : } f(t) = \frac{\frac{2t-1}{3-t} + 1}{\frac{2t-1}{3-t} - 1} = \frac{t+2}{3t-4}$$

$$\text{Vậy: } f(x) = \frac{x+2}{3x-4}$$

b) Đặt $t = \sin x \Rightarrow x = \arcsin t$

Do đó: $f(t) = \arcsin t - 3 \Leftrightarrow f(x) = \arcsin x - 3$

Bài 2: Tìm hàm $f(x)$ nếu biết :

a) $f\left(x + \frac{a}{x}\right) = x^2 + \frac{a^2}{x^2}, \forall x \neq 0$

b) $f(\sqrt{1+x}) = \sqrt{1+x^2}, \forall x \geq -1$

c) $f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1$

Giải

a) Đặt $t = x + \frac{a}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{a^2}{x^2} + 2a \Rightarrow x^2 + \frac{a^2}{x^2} = t^2 - 2a, \forall x \neq 0.$

Do đó: $f(t) = t^2 - 2a$

Vậy: $f(x) = x^2 - 2a$

b) Đặt $t = \sqrt{1+x} \Rightarrow t^2 = 1+x \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow x^2 = (t^2 - 1)^2, \forall x \geq -1$

Do đó: $f(t) = \sqrt{1 + (t^2 - 1)^2} = \sqrt{t^4 - 2t^2 + 2}$

Vậy: $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}$

c) Đặt $t = 1 + \frac{1}{x} (x \neq 0)$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{t-1}, t \neq 1$$

Do đó: $f(t) = \frac{1}{(t-1)^2} - 1 = \frac{-t^2 + 2t}{(t-1)^2}$

Vậy: $f(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$

1.2.2. Dạng $af(u(x)) + bf(v(x)) = w(x)$ **1.2.2.1. Phương pháp giải:**

Đổi biến sao cho $u(x)$ thành $v(x)$ (đặt $u(t) = v(x)$). Giải hệ phương trình tìm $f(u(x))$ (hoặc $f(v(x)) \Rightarrow f(x)$)

1.2.2.2. Bài tập :

Bài 1: Tìm $f(x)$ biết:

a) $2f(x^3) + f(-x^3) = 2x$

b) $(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}, \forall x \neq 0, x \neq 1$

c) $f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2 \quad (\forall x \neq -1, x \neq \frac{1}{2})$

Giải

a) Đặt $t = -x \Rightarrow 2f(-t^3) + f(t^3) = -2t \Rightarrow 2f(-x^3) + f(x^3) = -2x \quad (1)$

Mà : $2f(-x^3) + 4f(x^3) = 4x \quad (2)$

Kết hợp (1) và (2) ta được : $3f(x^3) = 6x \Rightarrow f(x^3) = 2x$

Đặt $u = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{u} \Rightarrow f(u) = 2\sqrt[3]{u} \Rightarrow f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

b) Đặt $t = \frac{1}{x} (x \neq 0) \Leftrightarrow x = \frac{1}{t} (t \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{t} - 1\right)f\left(\frac{1}{t}\right) + f(t) = \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} (t \neq 1, t \neq 0)$

$$\Rightarrow \frac{1-t}{t}f\left(\frac{1}{t}\right) + f(t) = \frac{t}{1-t}$$

Ta có:
$$\begin{cases} \frac{1-x}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{1-x} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + (x-1)f(x) = \frac{1}{x-1} \end{cases}$$

Giải hệ ta có: $f(x) = \frac{1}{1-x}$

c) Đặt $t = \frac{x}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{t}{2t-1} (t \neq \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow f\left(\frac{t}{2t-1}\right) + \frac{t}{2t-1} f(t) = 2$$

Ta có hệ :
$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \frac{x}{2x-1} f(x) = 2 \\ f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2 \end{cases}$$

Giải hệ ta có: $f(x) = \frac{2(2x-1)}{x-1}$

Bài 2 : Tìm hàm số $f(x)$ biết:

a) $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$

b) $f(x-1) + 3f\left(\frac{1-x}{1-2x}\right) = 1-2x$

Giải

a) Đặt $t = \frac{x+1}{x-2} (x \neq 2) \Rightarrow x = \frac{2t+1}{t-1} (t \neq 1)$

$$\Rightarrow f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2t+1}{t-1}$$

Đặt $u = \frac{1}{t} (t \neq 0) \Rightarrow t = \frac{1}{u} (u \neq 0) \Rightarrow f\left(\frac{1}{u}\right) + 2f(u) = \frac{\frac{2}{u}+1}{\frac{1}{u}-1} = \frac{u+2}{1-u}$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x-1} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{x+2}{1-x} \end{cases}$$

Giải hệ ta có : $f(x) = \frac{4x+5}{-3x+3}$

b) Đặt $x - 1 = \frac{1-t}{1-2t} (t \neq \frac{1}{2}) \Rightarrow x = \frac{2-3t}{1-2t}$

Suy ra : $f(\frac{1-t}{1-2t}) + 3f(t-1) = \frac{4t-3}{1-2t}$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} f(x-1) + 3f(\frac{1-x}{1-2x}) = 1-2x \\ f(\frac{1-x}{1-2x}) + 3f(x-1) = \frac{4x-3}{1-2x} \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $f(x-1) = \frac{-4x^2 + 16x - 8}{8(1-2x)}$

Đặt $u = 1 - x \Rightarrow x = u + 1$

Suy ra : $f(u) = \frac{u^2 - 2u + 1}{2(2u + 1)}$

Do đó: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2(2x+1)}$

1.2.3. Dạng
$$\begin{cases} af(u(x)) + bg(v(x)) = w(x) \\ a'f(u'(x)) + b'g(v'(x)) = w'(x) \end{cases}$$

1.2.3.1. Phương pháp giải :

Đổi biến sao cho $u(x)$ thành $u'(x)$, giải hệ đưa về dạng :

$Af(u(x)) + Bf(v(x)) = u''(x)$ để giải.

1.2.3.2. Bài tập :

Bài 1: Tìm các hàm $f(x)$ và $g(x)$ thỏa :

a)
$$\begin{cases} f(x+1) + xg(x+1) = 2x & (1) \\ f(\frac{x+1}{x-1}) + g(\frac{x+1}{x-1}) = x-1 & (2) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \frac{x+2}{2} & (3) \\ f(\frac{x+2}{2}) + g(x+5) = x+4 & (4) \end{cases}$$

Giải

a) (1) Đặt $t = x + 1$

(2) Đặt $t = \frac{x+1}{x-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t) + (t-1)g(t) = 2t-2 \\ f(t) + g(t) = \frac{2}{t-1} \end{cases}$$

Giải hệ ta được : $\begin{cases} f(t) = -2 \\ g(t) = \frac{2t}{t-1} \end{cases}$

Suy ra : $\begin{cases} f(x) = -2 \\ g(x) = \frac{2x}{x-1} \end{cases}$

b) Đặt $\frac{x+2}{2} = t + 6 \Rightarrow x = 2t + 10$

Từ (4) suy ra : $f(t+6) + g(2t+15) = 2t+14$

Hay : $f(x+6) + g(2x+15) = 2x+14$

Ta có hệ : $\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \frac{x+2}{2} \\ f(x+6) + g(2x+15) = 2x+14 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $\begin{cases} f(x+6) = \frac{7x}{2} + 25 \\ g(2x+15) = -\frac{3x}{2} - 13 \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} f(x) = \frac{7x}{2} + 6 \\ g(x) = -\frac{3x+7}{4} \end{cases}$

Bài 2: Tìm các hàm $f(x)$ và $g(x)$ thỏa:

$$\begin{cases} f(2x-1) + g(1-x) = x+1 & (1) \\ f\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2g\left(\frac{1}{2x+2}\right) = 3 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Đặt } \frac{x}{x+1} = 2t-1 \quad (\forall x \neq -1) \Rightarrow x = \frac{2t-1}{2+2t} \quad (t \neq -1)$$

$$(2) \Rightarrow f(2t-1) + 2g(t+1) = 3$$

$$\text{Hay: } f(2x-1) + 2g(x+1) = 3 \quad (3)$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} f(2x-1) + g(1-x) = x+1 \\ f(2x-1) + 2g(1+x) = 3 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow g(1-x) - 2g(1+x) = x-2 \quad (4)$$

$$\text{Đặt } t = -x \text{ ta được } (4) \Rightarrow g(1+t) - 2g(1-t) = -t-2$$

$$\text{Hay: } g(1+x) - g(1-x) = -x-2 \quad (5)$$

$$\text{Kết hợp (4) và (5) có: } g(1+x) = \frac{6-x}{3}$$

$$\text{Suy ra: } g(x) = \frac{7-x}{3}$$

$$\text{Thay: } g(1+x) = \frac{6-x}{3} \text{ vào (*) ta được:}$$

$$3f(2x-1) + 12 - 2x = 9$$

$$\Leftrightarrow 3f(2x-1) = 2x-3$$

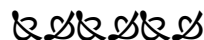
$$\text{Suy ra: } f(x) = \frac{x-2}{3}$$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{3} \\ g(x) = \frac{7-x}{3} \end{cases}$$

KẾT LUẬN CHƯƠNG I:

Nội dung của chương này là hệ thống lại các khái niệm cơ bản của môn giải tích cần thiết cho giải toán phương trình hàm, các dạng phương trình hàm cơ bản. Đồng thời qua các bài tập sẽ giúp hiểu sâu hơn các khái niệm, các dạng bài tập cơ bản đó. Học sinh phải nắm vững các kiến thức cơ sở trên thì mới có thể học tốt phương trình hàm.

Chương II : VẬN DỤNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM CÔSI VÀ KHAI THÁC BÀI TOÁN



2.1. VẬN DỤNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM CÔSI:

2.1.1. Phương trình hàm Côsi:

Bài toán: (Phương trình hàm Côsi) Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Giải

Từ (1) suy ra $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$ và với $y = x$ thì $f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Giả sử với k nguyên dương, $f(kx) = kf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$f[(k + 1)x] = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = (k + 1)f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ đó, theo nguyên lý quy nạp, ta có:

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Kết hợp với tính chất $f(-x) = -f(x)$ ta được:

$$f(mx) = mf(x), \forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Từ (2) ta có:

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) = 2^2 f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \dots = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

$$\text{Kết hợp (3) và (4) ta được: } f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n} f(1), \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+$$

Sử dụng giả thiết liên tục của hàm $f(x)$, suy ra:

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}, a = f(1)$$

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = ax, \forall a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $\forall x \in \mathbb{R}$ thỏa điều kiện bài toán.

➤ Nhận xét: Trong các bài toán, chúng ta ít gặp dạng phương trình hàm Côsi đơn giản như trên, mà thường gặp dạng biến thể tổng quát hơn. Chẳng hạn bài toán vấn đề sau:

Bài toán vấn đề: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục trên đoạn $[0;1]$ sao cho:

$$i) f(0) = f(1) = 0$$

$$ii) 2f(x) + f(y) = 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right) \text{ với mọi } x, y \in [0;1]$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$, với mọi $x, y \in [0;1]$

➤ Phân tích bài toán:

Từ điều kiện ii) ta suy ra: $f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y)$, $\forall x, y \in [0;1]$

Nếu ta xem $\frac{2x}{3}$ chính là x , $\frac{y}{3}$ chính là y , thử gán với phương trình hàm Côsi ta được:

$$f\left(\frac{2x}{3} + \frac{y}{3}\right) = f\left(\frac{2x}{3}\right) + f\left(\frac{y}{3}\right)$$

Như vậy, ta có thể giả thuyết:

$$\begin{cases} f\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{2}{3}f(x) \\ f\left(\frac{y}{3}\right) = \frac{1}{3}f(x) \end{cases}$$

Quay lại bài giải của phương trình hàm Côsi, ta phát hiện được điều giả thuyết là đúng.

Thật vậy, từ (*) ta có: $f(nx) = nf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

Thay x bởi $\frac{x}{n}$ ta được: $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ (1')

Từ (3) ta có: $f(mx) = mf(x)$, $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$

Kết hợp (1') và (3) ta được: $f(rx) = rf(x)$, $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu ta thay $f(x) = ax$ vào thì điều kiện bài toán được thỏa.

Như thế, giữa bài toán và phương trình hàm Côsi có mối quan hệ.

Bây giờ ta sẽ tổng quát bài toán trên :

Bài toán:(phương trình hàm Côsi mở rộng)

Cho bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \dots + a_nf(x_n) \quad (1)$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$$

Giải

Thay $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ vào (1) ta được:

$$f(0) \cdot [(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - 1] = 0$$

a) Nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1$ thì $f(0) = 0$ và khi đó từ (1) ta có:

$$f(a_1x_1) = a_1f(x_1); f(a_2x_2) = a_2f(x_2); \dots; f(a_nx_n) = a_nf(x_n), (\forall x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n})$$

$$\text{Hay: } f(a_ix_i) = a_if(x_i), \forall x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 2, \dots, n} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = f(a_1x_1) + f(a_2x_2) + \dots + f(a_nx_n)$$

$$\text{Hay: } f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

$$\text{Thay: } x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0 \text{ ta được: } f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Theo bài toán phương trình hàm Côsi ta có : $f(x) = bx$, $\forall b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$

b) Nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ thì $f(0)$ nhận giá trị tùy ý. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) - f(0) = a_1[f(x_1) - f(0)] + \dots + a_n[f(x_n) - f(0)]$$

$$(\forall x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n})$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$, $g(0) = 0$. Ta được:

$$g(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = a_1g(x_1) + a_2g(x_2) + \dots + a_ng(x_n)$$

Do $g(0) = 0$ nên theo kết quả phần a) ta có : $g(x) = cx$. Suy ra:

$$f(x) = cx + d ; c, d \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

Kết luận:

– Nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1$ thì $f(x) = bx$; $b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $\forall x \in \mathbb{R}$

– Nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ thì $f(x) = cx + d$; c, d tùy ý, $\forall x \in \mathbb{R}$

Nhận xét: Việc giải bài toán tổng quát trên cho ta kết quả rất hay. Tuy nhiên giả thiết của bài toán tổng quát là liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó, nếu miền liên tục của bài toán bị thu hẹp lại thì kết quả của bài toán tổng quát còn đúng không ?

Bây giờ ta quay lại phương trình hàm Côsi. Từ điều kiện (1) ta chỉ cần giả thiết $f(x)$ là hàm liên tục tại một điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ cho trước .

Thật vậy, theo giả thiết thì:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Và với mỗi $x_1 \in \mathbb{R}$ ta đều có:

$$f(x) = f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0), \forall x \in \mathbb{R}$$

Từ đó ta suy ra:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_1} [f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0)] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_1} f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0) = f(x_0) + f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) \end{aligned}$$

Suy ra, hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_1 \in \mathbb{R}$

Do đó, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Vì thế, kết quả phương trình hàm Côsi vẫn đúng khi hàm số liên tục trên miền D nào đó. Nên kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi vẫn đúng (Do $g(x) = f(x) - f(0)$)

Áp dụng phương trình hàm Côsi mở rộng để giải bài toán vấn đề.

Bài toán vấn đề: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục trên $[0;1]$ sao cho:

i) $f(0) = f(1) = 0$

ii) $2f(x) + f(y) = 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right) \quad ; \forall x, y \in [0;1]$

Chứng minh rằng: $f(x) = 0 \quad ; \forall x, y \in [0;1]$

Giải

$$\text{ii)} \Leftrightarrow f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2x+y}{3}\right) - f(0) = \frac{2}{3}[f(x) - f(0)] + \frac{1}{3}[f(y) - f(0)]$$

$$\text{Đặt: } g(x) = f(x) - f(0) \quad , \quad g(0) = 0$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{2x+y}{3}\right) = \frac{2}{3}g(x) + \frac{1}{3}g(y) \quad ; \forall x, y \in [0;1]$$

Lần lượt thay $x = 0, y = 0$ ta được :

$$g\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{2}{3}g(x); \quad g\left(\frac{y}{3}\right) = \frac{1}{3}g(y)$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{2x+y}{3}\right) = g\left(\frac{2x}{3}\right) + g\left(\frac{y}{3}\right) \quad ; \forall x, y \in [0;1]$$

$$\text{Hay: } g(x+y) = g(x) + g(y) \quad ; \forall x \in \left[0; \frac{2}{3}\right], \forall y \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$$

$$\Rightarrow g(x) = ax \quad , \quad a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý } , \quad \forall x \in [0;1]$$

$$\Rightarrow f(x) = ax + b \quad ; \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý } , \forall x, y \in [0;1]$$

$$\text{Từ điều kiện i) ta có : } \begin{cases} f(0) = b = 0 \\ f(1) = a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } f(x) = 0$$

- Nhận xét: Ở đây ta thấy ngay: $f\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{2}{3}f(x)$, $f\left(\frac{y}{3}\right) = \frac{1}{3}f(y)$

$$\text{Suy ra: } f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = f\left(\frac{2x}{3}\right) + f\left(\frac{y}{3}\right)$$

Nhưng ta làm theo các bước trên để áp dụng được cách giải tổng quát của dạng này.

Bài toán : Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Ta có: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) = \frac{1}{2} [f(x) - f(0)] + \frac{1}{2} [f(y) - f(0)]$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$, ta có: $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(0) = 0$.

$$\Rightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2} g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Lần lượt thay $x = 0, y = 0$ ta được:

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} g(x)$$

$$g\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} g(y)$$

Do đó, $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{y}{2}\right)$

Hay: $g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (i)

Vì $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên (i) là phương trình hàm Côsi và do đó $g(x) = ax$

Suy ra, $f(x) = ax + b, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy $f(x) = ax + b$ thoả mãn điều kiện đề bài.

Kết luận: $f(x) = ax + b, \forall a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Xác định hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn điều kiện:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y, x+y \in [0;1]$$

Giải

Giả sử $x_0 \in [0;1]$. Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \in [0;1]$ tức là:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Với mỗi $x_1 \in \mathbb{R}$ ta đều có:

$$f(x) = f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0), \forall x \in \mathbb{R}$$

Từ đó suy ra:

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} [f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0)] = f(x_0) + f(x_1) - f(x_0) = f(x_1)$$

Do đó, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Theo phương trình hàm Côsi, ta có: $f(x) = ax$, với $a \in \mathbb{R}, x \in [0;1]$

Thử lại, ta thấy $f(x) = ax$, với $a \in \mathbb{R}$ tuy ýthoả mãn điều kiện bài toán.

Kết luận: $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $\forall x \in \mathbb{R}$

Bài 2: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện :

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3}, \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$, $g(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(0) = 0$

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) - f(0) = \frac{1}{3}[f(x) - f(0)] + \frac{1}{3}[f(y) - f(0)] + \frac{1}{3}[f(z) - f(0)]$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{g(x) + g(y) + g(z)}{3}; \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Lần lượt thay $y = z = 0$; $x = z = 0$; $x = y = 0$ ta được:

$$g\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}g(x), \quad g\left(\frac{y}{3}\right) = \frac{1}{3}g(y), \quad g\left(\frac{z}{3}\right) = \frac{1}{3}g(z)$$

Thay vào (*) ta được: $g\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = g\left(\frac{x}{3}\right) + g\left(\frac{y}{3}\right) + g\left(\frac{z}{3}\right); \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Hay: $g(x + y + z) = g(x) + g(y) + g(z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Cho $z = 0$ ta được: $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Áp dụng phương trình hàm Côsi ta có : $g(x) = ax$, với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $f(x) = g(x) + f(0) = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$

Bài 3: Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

i) $f(x) \geq e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x + y) \geq f(x).f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Giải

Nhận xét: $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $g(x) = \ln f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ i) và ii) ta có:
$$\begin{cases} g(x) \geq x & (1) \\ g(x + y) \geq g(x) + g(y) & (2) \end{cases}$$

Ta chứng minh: $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Giả sử ngược lại tồn tại $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho: $g(x_0 + y_0) \neq g(x_0) + g(y_0)$

Từ (2) suy ra: $g(x_0 + y_0) > g(x_0) + g(y_0)$

Ta có: $g(x_0 + y_0 + 0) \geq g(x_0 + y_0) + g(0) > g(x_0) + g(y_0) + g(0) \geq x_0 + y_0 + g(0)$

$$\Leftrightarrow g(x_0 + y_0) - x_0 - y_0 > g(0) \quad (*)$$

Ta lại có: $g(0) = g(x_0 + y_0 - x_0 - y_0) \geq g(x_0 + y_0) + g(-x_0 - y_0)$

$$\Rightarrow g(0) \geq g(x_0 + y_0) - x_0 - y_0$$

Điều này mâu thuẫn với (*)

Do đó điều giả sử là vô lý.

Vậy: $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Theo phương trình hàm Côsi ta có; $g(x) = ax$, với $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $f(x) = e^{ax}$, với $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

Thay vào điều kiện i) : $e^{ax} \geq e^x$ suy ra $a = 1$

Vì nếu ngược lại $a \neq 1$, ta có: $e^{ax} \geq e^x \Leftrightarrow ax \geq x \Leftrightarrow (a-1)x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Điều này vô lý vì:

- Nếu $(a-1) > 0$ thì $\forall x < 0 \Rightarrow (a-1)x < 0$
- Nếu $(a-1) < 0$ thì $\forall x > 0 \Rightarrow (a-1)x < 0$

Do đó: $f(x) = e^x$

Thử lại thì hàm số trên thỏa yêu cầu bài toán.

Kết luận: $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

2.1.2. Các dạng bài tập áp dụng:

Dạng 1: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện :

$$i) f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) = [f(x_1)]^{a_1} \cdot [f(x_2)]^{a_2} \cdot \dots \cdot [f(x_n)]^{a_n}$$

$$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R})$$

$$ii) f(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

Giải

Nhận xét: Nếu tồn tại x_i để $f(x_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) thì:

$$f(a_1 x_1 + \dots + a_i x_i + \dots + a_n x_n) = [f(x_1)]^{a_1} \cdot \dots \cdot [f(x_i)]^{a_i} \cdot \dots \cdot [f(x_n)]^{a_n} = 0$$

$$(\forall a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R})$$

Tức là $f(x) \equiv 0$

Xét trường hợp $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$i) \Leftrightarrow \ln f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) = a_1 \ln f(x_1) + a_2 \ln f(x_2) + \dots + a_n \ln f(x_n) \quad (*)$$

$$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R})$$

$$\text{Hay: } g(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) = a_1 g(x_1) + a_2 g(x_2) + \dots + a_n g(x_n)$$

$$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R})$$

Trong đó: $g(x) = \ln f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

- Nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1$ thì $g(x) = ax$, với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$

- Nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ thì $g(x) = ax + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$

Do đó:

- $f(x) = e^{ax}$ nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1$, với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^{ax+b}$ nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, với $a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$

Kết luận:

$$f(x) \equiv 0$$

$$f(x) = e^{ax} \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{ax+b} \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1, \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x).f(y)} \quad , \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải

Từ điều kiện (1) suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu tồn tại x_0 để $f(x_0) = 0$ thì:

$$f\left(\frac{x_0+y}{2}\right) = \sqrt{f(x_0).f(y)} = 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

Tức là $f(x) \equiv 0$

Xét trường hợp $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \ln f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\ln f(x) + \ln f(y)}{2} \quad , \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Hay : } g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2} \quad , \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Trong đó: $g(x) = \ln f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Theo kết quả của bài toán của phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$f(x) = e^{ax+b}, \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

Thử lại thì hai hàm số trên thỏa yêu cầu bài toán.

Kết luận:

$$f(x) \equiv 0, \text{ với } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{ax+b}, \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

Bài 2: Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$\text{i) } f(x+2y+3z) = [f(x)] \cdot [f(y)]^2 \cdot [f(z)]^3, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Giải

Từ điều kiện ii) ta có: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ để $f(x_0) = 0$ thì:

$$f(x_0+2y+3z) = [f(x_0)] \cdot [f(y)]^2 \cdot [f(z)]^3 = 0, \forall y, z \in \mathbb{R}$$

Tức là $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét trường hợp $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$(i) \Leftrightarrow \ln f(x+2y+3z) = \ln f(x) + 2\ln f(y) + 3\ln f(z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\text{Hay: } g(x+2y+3z) = g(x) + 2g(y) + 3g(z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Trong đó: $g(x) = \ln f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$g(x) = ax, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

Do đó, $f(x) = e^{ax}$, với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$

Kết luận:

$$f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{ax}, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

Bài 3: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x+2y}{3}\right) = [f(x)]^{\frac{1}{3}} \cdot [f(y)]^{\frac{2}{3}}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải

Nhận xét:

+) Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = 0$, từ điều kiện (1) ta có:

$$f\left(\frac{x_0 + 2y}{3}\right) = [f(x_0)]^{\frac{1}{3}} \cdot [f(y)]^{\frac{2}{3}} = 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

Tức là: $f(x) \equiv 0$

+) Xét trường hợp $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có 2 trường hợp:

•) Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) > 0$, từ điều kiện (1) có:

$$f\left(\frac{x_0 + 2y}{3}\right) = [f(x_0)]^{\frac{1}{3}} \cdot [f(y)]^{\frac{2}{3}} > 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

Tức là: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

•) Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) < 0$, từ điều kiện (1) có:

$$f\left(\frac{x_0 + 2y}{3}\right) = [f(x_0)]^{\frac{1}{3}} \cdot [f(y)]^{\frac{2}{3}} < 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

Tức là: $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Như vậy, có thể xảy ra 3 trường hợp:

- $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét trường hợp $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$(1) \Rightarrow \left| f\left(\frac{x+2y}{3}\right) \right| = |f(x)|^{\frac{1}{3}} \cdot |f(y)|^{\frac{2}{3}}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left| f\left(\frac{x+2y}{3}\right) \right| = \frac{1}{3} \ln |f(x)| + \frac{2}{3} \ln |f(y)|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Hay: } g\left(\frac{x+2y}{3}\right) = \frac{1}{3} g(x) + \frac{2}{3} g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Trong đó $g(x) = |f(x)|$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Theo kết quả của bài toán của phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$g(x) = ax + b \quad ; \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |f(x)| = e^{ax+b} \quad ; \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

Kết hợp với nhận xét ta có:

$$f(x) = e^{ax+b} \quad ; \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = -e^{ax+b} \quad ; \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

Thử lại thì hàm số trên thỏa yêu cầu bài toán.

Kết luận:

$$f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{ax+b} \quad ; \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = -e^{ax+b} \quad ; \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}$$

Dạng 2: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:

$$i) \quad f(x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}) = [f(x_1)]^{a_1} \cdot [f(x_2)]^{a_2} \cdot \dots \cdot [f(x_n)]^{a_n}$$

$$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R})$$

$$ii) \quad f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Giải

Từ điều kiện ii) ta có: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Giả sử tồn tại $x_i \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_i) = 0$.

Từ (i) ta suy ra:

$$f(x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_i^{a_i} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}) = [f(x_1)]^{a_1} \cdot \dots \cdot [f(x_i)]^{a_i} \cdot \dots \cdot [f(x_n)]^{a_n} = 0$$

$$(\forall a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R})$$

Tức là $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét trường hợp $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Đặt $x_i = e^{u_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $f(e^{u_i}) = g(u_i)$. Khi đó $g(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $g(u) > 0$ với mọi $u \in \mathbb{R}$ và (i) có dạng:

$$g(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) = [g(u_1)]^{a_1} \cdot [g(u_2)]^{a_2} \cdot \dots \cdot [g(u_n)]^{a_n}$$

$$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R})$$

Hay: $h(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) = a_1 h(u_1) + a_2 h(u_2) + \dots + a_n h(u_n)$

$$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R})$$

Trong đó, $h(u) = \ln g(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}$; $h(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$\bullet h(u) = au \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1, u \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(u) = e^{au}, \forall a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = e^{a \ln x}, a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Hay: } f(x) = x^a, a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

Thử lại ta được: $f(x) = x^a, a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$ thỏa đề bài.

$$\bullet h(u) = au + b \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1, u \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(u) = e^{au+b} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Hay: } f(x) = cx^a, a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } c \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

Thử lại ta được: $f(x) = cx^a; c \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$ thỏa đề bài.

Kết luận:

$$f(x) \equiv 0$$

$$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1$$

$$f(x) = cx^a, a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } c \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{f(x)f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+. (1)$$

Giải

Từ điều kiện bài toán suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Nếu tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) = 0$ thì từ (1) suy ra

$$f(\sqrt{x_0 y}) = \sqrt{f(x_0)f(y)} = 0, \forall y \in \mathbb{R}^+$$

Tức là, $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Nếu $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ thì đặt $x = e^u, y = e^v, f(e^u) = g(u)$

Khi đó $g(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và (1) có dạng:

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \sqrt{g(u).g(v)}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad g(u) > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Hay: $h\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}h(u) + \frac{1}{2}h(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$

Trong đó: $h(u) = \ln f(u), \forall u \in \mathbb{R}$, $h(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Theo bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có: $h(u) = au + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $u \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = ax^b; \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

Thử lại, ta được: $f(x) = ax^b$; $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}^+$ thỏa đề bài.

Kết luận:

$$f(x) \equiv 0$$

$$f(x) = ax^b; \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

Bài 2: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:

i) $f(x.y^2.z^3) = [f(x)].[f(y)]^2.[f(z)]^3, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$

ii) $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Giải

Từ điều kiện ii) của bài toán ta có: $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}^+$ sao cho $f(x_0) = 0$ thì từ i) suy ra:

$$f(x_0.y^2.z^3) = [f(x_0)].[f(y)]^2.[f(z)]^3 = 0, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^+$$

Tức là: $f(x) \equiv 0$

Nếu $f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ thì đặt $x = e^u, y = e^v, z = e^w, f(e^u) = g(u)$.

Khi đó: $g(u) > 0$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và i) có dạng:

$$g(u + 2v + 3w) = [g(u)].[g(v)]^2.[g(w)]^3, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}$$

Hay: $h(u + 2v + 3w) = h(u) + 2h(v) + 3h(w); \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}$

Trong đó, $h(u) = \ln g(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}$, và $h(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$h(u) = au, \quad a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R}.$$

Suy ra: $f(x) = e^{a \ln x}$, $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Hay: $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Thử lại, thì $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thỏa yêu cầu bài toán.

Kết luận:

$$f(x) \equiv 0$$

$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Bài 3: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x.y^2.z^4) = [f(x)].[f(y)]^2.[f(z)]^4, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Giải

Nhận xét:

+) Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = 0$, từ điều kiện (1) ta có:

$$f(x_0.y^2.z^4) = [f(x_0)].[f(y)]^2.[f(z)]^4, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^+$$

Tức là: $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

+) Xét trường hợp $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Có thể xảy ra 2 trường hợp:

•) Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) > 0$, từ điều kiện (1) ta có:

$$f(x_0.y^2.z^4) = [f(x_0)].[f(y)]^2.[f(z)]^4 > 0, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^+$$

Tức là: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

•) Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) < 0$, từ điều kiện (1) ta có:

$$f(x_0.y^2.z^4) = [f(x_0)].[f(y)]^2.[f(z)]^4 < 0, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^+$$

Tức là: $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Như vậy: có thể xảy ra 3 trường hợp:

- $f(x) \equiv 0$
- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

$$- f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Bây giờ, ta xét trường hợp $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Từ điều kiện (1) suy ra:

$$|f(x.y^2.z^4)| = |f(x)| \cdot |f(y)|^2 |f(z)|^4, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \ln |f(x.y^2.z^4)| = \ln |f(x)| + 2 \ln |f(y)| + 4 \ln |f(z)|, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Hay: } g(x.y^2.z^4) = g(x) + 2g(y) + 4g(z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ \quad (*)$$

Trong đó, $g(x) = \ln |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}^+, g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$

Đặt: $x = e^u, y = e^v, z = e^w, g(e^u) = h(u), h(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Rightarrow h(u + 2v + 4w) = h(u) + 2h(v) + 4h(w), \forall u, v, w \in \mathbb{R}$$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$h(u) = au, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra: } |f(x)| = e^{a \ln x}, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Hay: } |f(x)| = x^a, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

Kết hợp với nhận xét ta có: $f(x) = x^a, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = -x^a, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

Thử lại thì 2 hàm số trên thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Kết luận:

$$f(x) \equiv 0$$

$$f(x) = x^a, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = -x^a, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$$

Dạng 3: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện:

$$f(x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n) \quad (1)$$

$$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+)$$

Giải

Vì $x_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) nên ta có thể đặt:

$$x_1 = e^{u_1}, x_2 = e^{u_2}, \dots, x_n = e^{u_n} \text{ và } f(e^u) = g(u)$$

Khi đó $g(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và (1) có dạng:

$$g(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) = a_1 \cdot g(u_1) + a_2 \cdot g(u_2) + \dots + a_n \cdot g(u_n) \\ \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \quad \forall u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$\begin{cases} g(u) = au + b, & a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } \forall u \in \mathbb{R} \text{ nếu } a_1 + \dots + a_n = 1 \\ g(u) = au, & a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } \forall u \in \mathbb{R} \text{ nếu } a_1 + \dots + a_n \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} f(x) = a \ln x + b; & a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + \dots + a_n = 1 \\ f(x) = a \ln x & ; a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + \dots + a_n \neq 1 \end{cases}$$

Thử lại ta được hai nghiệm trên thỏa yêu cầu bài toán.

$$\text{Kết luận: } \begin{cases} f(x) = a \ln x + b; & a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + \dots + a_n = 1 \\ f(x) = a \ln x & ; a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + \dots + a_n \neq 0 \end{cases}$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Giải

Vì $x > 0, y > 0$ nên có thể đặt $x = e^u, y = e^v$ và $f(e^u) = g(u)$

Khi đó $g(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và (1) có dạng:

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u) + g(v)}{2}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng thì:

$$g(u) = au + b; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R}$$

Hay: $f(x) = a \ln x + b; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$

Thử lại, thì nghiệm trên thỏa mãn điều kiện bài toán

Kết luận: $f(x) = a \ln x + b; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$

Bài 2: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thoả mãn các điều kiện:

$$f(x.y^2.z^3) = f(x) + 2f(y) + 3f(z) \quad , \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Giải

Vì $x > 0, y > 0, z > 0$ nên có thể đặt $x = e^u, y = e^v, z = e^w$ và $f(e^u) = g(u)$. Khi đó $g(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và (1) có dạng:

$$g(u + 2v + 3w) = g(u) + 2g(v) + 3g(w) \quad , \forall u, v, w \in \mathbb{R} .$$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$g(u) = au \quad ; \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R} .$$

Suy ra: $f(x) = a \ln x$; với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}^+$.

Thử lại thì hàm số trên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận: $f(x) = a \ln x$; với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}^+$.

Bài 3: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thoả mãn các điều kiện:

$$f(x^{-1}.y^{-3}.z^5) = -f(x) - 3f(y) + 5f(z) \quad , \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Giải

Vì $x > 0, y > 0, z > 0$ nên có thể đặt $x = e^u, y = e^v, z = e^w$ và $f(e^u) = g(u)$. Khi đó $g(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và (1) có dạng:

$$g(-u - 3v + 5w) = -g(u) - 3g(v) + 5g(w) \quad , \forall u, v, w \in \mathbb{R} .$$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$g(u) = au + b \quad ; \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+ .$$

Suy ra: $f(x) = a \ln x$; với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}^+$.

Thử lại thì hàm số trên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận: $f(x) = a \ln x + b$; với $a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}^+$.

Dạng 4: Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tìm các hàm $f \geq 0$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f[a_1 x_1^\alpha + \dots + a_n x_n^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} = [a_1 [f(x_1)]^\beta + \dots + a_n [f(x_n)]^\beta]^{\frac{1}{\beta}} \quad (1)$$

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+; \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

Giải

Vì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Nên

$$(1) \Leftrightarrow \left(f \left[(a_1 x_1^\alpha + \dots + a_n x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \right)^\beta = a_1 [f(x_1)]^\beta + \dots + a_n [f(x_n)]^\beta$$

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Hay: } g \left[(a_1 x_1^\alpha + \dots + a_n x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = a_1 g(x_1) + \dots + a_n g(x_n)$$

Trong đó : $g(x) = [f(x)]^\beta, g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$

Đặt: $x_i = u_i^{\frac{1}{\alpha}}, u_i \in \mathbb{R}^+, i = \overline{1, n}$. Ta được :

$$h(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = a_1 h(u_1) + \dots + a_n h(u_n) \\ \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^+$$

Trong đó : $h(u) = g(u^{\frac{1}{\alpha}}), \forall u \in \mathbb{R}^+, h(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$\begin{cases} h(u) = au + b; & a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý; } \forall u \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \\ h(u) = au & ; a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } \forall u \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1 \end{cases}$$

Nhưng vì $h(u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^+$ nên:

$$\begin{cases} h(u) = au + b; & a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý; } \forall u \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \\ h(u) = au & ; a \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý, } \forall u \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1 \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} f(x) = (ax^\alpha + b)^{\frac{1}{\beta}}; & a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý; } \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \\ f(x) = (ax^\alpha)^{\frac{1}{\beta}}; & a \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý, } \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1 \end{cases}$$

Thử lại nghiệm trên thỏa yêu cầu bài toán .

Kết luận:
$$\begin{cases} f(x) = (ax^\alpha + b)^{\frac{1}{\beta}}; & a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý; } \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \\ f(x) = (ax^\alpha)^{\frac{1}{\beta}}; & a \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý, } \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ nếu } a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 1 \end{cases}$$

Bài tập áp dụng :

Bài 1: Tìm các hàm $f(x) \geq 0$ xác định , liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn điều kiện :

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2}}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Giải

Theo giả thiết $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Suy ra:

$$(1) \Leftrightarrow \left[f\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}\right) \right]^2 = \frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Hay: $g\left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}\right) = \frac{g(\sqrt{u}) + g(\sqrt{v})}{2}, \forall u, v > 0. (u = x^2, v = y^2)$

Trong đó: $g(u) = [f(u)]^2 \geq 0, \forall u > 0, g(u)$ liên tục $\forall u \in \mathbb{R}^+$

Từ đó suy ra: $h\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{h(u) + h(v)}{2}, \forall u, v > 0$

Trong đó: $h(u) = g(\sqrt{u}), \forall u \in \mathbb{R}^+$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$h(u) = au + b, \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R}^+.$$

Do đó, $g(x) = ax^2 + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}^+$. Để $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ cần phải chọn $a \geq 0, b \geq 0$. Thử lại thì hàm số trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận: $f(x) = \sqrt{ax^2 + b}, \text{ với } a, b \geq 0 \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+$

Bài 2: Tìm các hàm $f(x) \geq 0$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\sqrt[3]{x_1^3 + 2x_2^3 + 3x_3^3}\right) = \sqrt[4]{[f(x_1)]^4 + 2[f(x_2)]^4 + 3[f(x_3)]^4} \quad (1)$$

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^+)$$

Giải

Vì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ nên :

$$(1) \Leftrightarrow \left[f\left(\sqrt[3]{x_1^3 + 2x_2^3 + 3x_3^3}\right) \right]^4 = [f(x_1)]^4 + 2[f(x_2)]^4 + 3[f(x_3)]^4, \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^+$$

Hay: $g\left(\sqrt[3]{x_1^3 + 2x_2^3 + 3x_3^3}\right) = g(x_1) + 2g(x_2) + 3g(x_3), \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^+$

Trong đó: $g(x) = [f(x)]^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$.

Đặt: $x_1 = \sqrt[3]{u_1}, x_2 = \sqrt[3]{u_2}, x_3 = \sqrt[3]{u_3}$ với $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^+$. Ta được:

$$h(u_1 + 2u_2 + 3u_3) = h(u_1) + 2h(u_2) + 3h(u_3), \forall u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^+$$

Trong đó: $h(u) = g(\sqrt[3]{u}), \forall u \in \mathbb{R}^+, h(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$.

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$h(u) = au, \text{ với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R}^+$$

Nhưng vì $h(u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^+$ nên:

$$h(u) = au, \text{ với } a \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R}^+$$

Suy ra: $f(x) = \sqrt[4]{(ax)^3}, \text{ với } a \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+.$

Hay: $f(x) = b\sqrt[4]{x^3}, \text{ với } b \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+.$

Thử lại thì hàm số trên thoả yêu cầu bài toán.

Kết luận: $f(x) = b\sqrt[4]{x^3}, \text{ với } b \in \mathbb{R}^+ \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}^+.$

Bài 3: Tìm các hàm $f(x) \geq 0$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\sqrt[7]{4x^7 - y^7 - 2z^7}\right) = \sqrt[5]{4[f(x)]^5 - [f(y)]^5 - 2[f(z)]^5} \quad (1)$$

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+)$$

Giải

Vì $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ nên :

$$(1) \Leftrightarrow \left[f\left(\sqrt[7]{4x^7 - y^7 - 2z^7}\right) \right]^5 = 4[f(x)]^5 - [f(y)]^5 - 2[f(z)]^5, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$$

Hay: $g\left(\sqrt[7]{4x^7 - y^7 - 2z^7}\right) = 4g(x) - g(y) - 2g(z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$

Trong đó: $g(x) = [f(x)]^5 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$

Đặt: $x = \sqrt[7]{u}$, $y = \sqrt[7]{v}$, $z = \sqrt[7]{w}$ với $u, v, w \geq 0$. Ta được:

$$h(4u - v - 2w) = 4h(u) - h(v) - 2h(w), \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^+$$

Trong đó: $h(u) = g(\sqrt[7]{u})$, $\forall u \in \mathbb{R}^+$, $h(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$.

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$h(u) = au + b; \text{ với } a, b \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^+.$$

Nhưng vì $h(u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^+$ nên:

$$h(u) = au + b; \text{ với } a, b \in \mathbb{R}^+, u \in \mathbb{R}^+.$$

Suy ra: $f(x) = \sqrt[5]{ax^7 + b}$; với $a, b \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+$.

Thử lại, ta được hàm số trên thỏa yêu cầu bài toán.

Kết luận: $f(x) = \sqrt[5]{ax^7 + b}$; với $a, b \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+$.

Bài 4: Tìm các hàm $f(x) \geq 0$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{4}f(x) + \frac{1}{4}f(y) + \frac{1}{2}\sqrt{f(x).f(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}}{2} \right)^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

Vì $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ nên:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{f\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{f(x)} + \frac{1}{2}\sqrt{f(y)} \quad , \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Hay: $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2} \quad , \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

Trong đó: $g(x) = \sqrt{f(x)} \geq 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}^+ , g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$g(x) = ax + b \quad , \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R}.$$

Nhưng vì $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ nên:

$$g(x) = ax + b \quad , \text{ với } a, b \in \mathbb{R}^+ , x \in \mathbb{R}^+$$

Suy ra: $f(x) = (ax + b)^2 \quad , \text{ với } a, b \in \mathbb{R}^+ , x \in \mathbb{R}^+$

Thử lại ta thấy hàm số trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận: $f(x) = (ax + b)^2 \quad , \text{ với } a, b \in \mathbb{R}^+ , x \in \mathbb{R}^+$

Bài 5: Tìm các hàm $f(x) \geq 0$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn điều kiện :

$$f(\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}) = f(x) + 2f(y) + 3f(z) \quad , \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Giải

Ta có: $f(\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}) = f(x) + 2f(y) + 3f(z) \quad , \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$

Đặt: $x = \sqrt{u} \quad , y = \sqrt{v} \quad , z = \sqrt{w} \quad , \text{ với } u, v, w \in \mathbb{R}^+ \text{ và } g(u) = f(\sqrt{u}) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^+ ;$
 $g(u)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}^+$. Ta được:

$$g(u + 2v + 3w) = g(u) + 2g(v) + 3g(w) \quad , \forall u, v, w \in \mathbb{R}^+$$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$g(u) = au \quad , \text{ với } a \in \mathbb{R}^+ , u \in \mathbb{R}^+$$

Suy ra: $f(x) = ax^2 \quad , \text{ với } a \in \mathbb{R}^+ , x \in \mathbb{R}^+.$

Thử lại, ta được hàm số trên thỏa yêu cầu bài toán .

Kết luận: $f(x) = ax^2 \quad , \text{ với } a \in \mathbb{R}^+ , x \in \mathbb{R}^+.$

Bài 6: Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải

Thay $x = y$ vào (1) ta có: $f(x) = f(|x|)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt: $|x| = \sqrt{u}$, $|y| = \sqrt{v}$, ($u, v \geq 0$). Khi đó:

$$(1) \Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}\right) = \frac{f(\sqrt{u})+f(\sqrt{v})}{2}, \forall u, v \geq 0$$

Đặt $f(\sqrt{u}) = g(u)$, với $u \geq 0$ ta được:

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u)+g(v)}{2}, \forall u, v \geq 0$$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$g(u) = au + b, \text{ với } a, b \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^+$$

Suy ra: $f(x) = f(|x|) = ax^2 + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy hàm số trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận: $f(x) = ax^2 + b$; với $a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x \in \mathbb{R}$

Bài 7: Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \frac{2}{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải

Từ giả thiết suy ra: $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)} = \frac{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Đặt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có: $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và:

$$g\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Thay $x = y$ vào (2) ta được:

$$g(x) = g(|x|), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt: $|x| = \sqrt{u}, |y| = \sqrt{v}$ trong đó $u, v \geq 0$ và $h(u) = g(\sqrt{u}) \neq 0$, $h(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$. Ta được:

$$h\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{h(u) + h(v)}{2}, \forall u, v \in \mathbb{R}^+$$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có:

$$h(u) = au + b, \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R}^+$$

Vì $h(u) \neq 0, \forall u \in \mathbb{R}^+$ nên:

$$h(u) = au + b, \text{ trong đó: } a.b \geq 0, b \neq 0, \forall u \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = \frac{1}{ax^2 + b}, \text{ với } a.b \geq 0, b \neq 0$$

Thử lại thì hàm số trên thỏa yêu cầu bài toán.

$$\text{Kết luận: } f(x) = \frac{1}{ax^2 + b}, \text{ với } a.b \geq 0, b \neq 0, x \in \mathbb{R}$$

Bài 8: Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}\right) = \frac{2}{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}}, \forall x, y, x+y \neq 0 \quad (1)$$

Giải

Vì $x \neq 0, y \neq 0$ nên ta đặt: $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v$ ($u, v \neq 0$) và $g(u) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{u}\right)} \neq 0$ với $\forall u \neq 0$,

$g(u)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Khi đó (1) có dạng:

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u) + g(v)}{2}, \forall u, v, u+v \neq 0.$$

Theo kết quả bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng, ta suy ra :

$$g(u) = au + b, \text{ với } a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Nhưng hàm $g(u) \neq 0, \forall u$ nên ta có :

$$\begin{cases} g(u) = au, & a \neq 0 \\ g(u) = b, & b \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} f(x) = \frac{x}{a}, & a \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ f(x) = \frac{1}{b}, & b \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

$$\text{Hay : } \begin{cases} f(x) = cx, & c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ f(x) = d, & d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Thử lại, hàm số trên thỏa mãn yêu cầu bài toán .

$$\text{Kết luận : } \begin{cases} f(x) = cx; & c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ f(x) = d; & d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Bài 9 : Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x, y, x + y \neq 0 \quad (1)$$

Giải

Vì $x \neq 0, y \neq 0$ nên ta có thể đặt :

$$\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v, f\left(\frac{1}{u}\right) = g(u) \text{ xác định và liên tục trên } \mathbb{R} \setminus \{0\}, (1) \text{ có dạng :}$$

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u) + g(v)}{2}, \forall u, v, u + v \neq 0$$

Theo kết quả của bài toán phương trình hàm Côsi mở rộng ta có :

$$g(u) = au + b; a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\text{Suy ra : } f(x) = \frac{a}{x} + b; a, b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý, } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Thử lại: Hàm số trên thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Kết luận : $f(x) = \frac{a}{x} + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ tùy ý , $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.2. KHAI THÁC BÀI TOÁN:

2.2.1. Bài toán :

Tìm tất cả các hàm số $f: [1; +\infty) \rightarrow [1; +\infty)$ sao cho :

$$f(x.f(y)) = y.f(x)$$

với $\forall x, y$ thuộc $[1; +\infty)$

Giải

Cho $x = y = 1$ thì $f(f(1)) = f(1)$

Cho $y = f(1)$ thì $f(x.f(f(1))) = f(1).f(x)$ hay $f(x.f(1)) = f(1).f(x)$ (1)

Mặt khác: $y = 1 \Rightarrow f(x.f(1)) = f(x)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $f(1) = 1$

Cho $x = 1$ thì $f(f(y)) = y$

Nếu $f(y) = 1$ thì $f(f(y)) = 1$ hay $y = 1$.

Suy ra $f(y) > 1$ với mọi $y > 1$.

Cho $x > y \geq 1$ thì :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y} f(f(y))\right) = f(y).f\left(\frac{x}{y}\right) > f(y)$$

Ta sẽ chứng minh $f(x) = x$ với mọi x thuộc $[1; +\infty)$

Thấy vậy , giả sử ta có x_0 thuộc $[1; +\infty)$ sao cho $f(x_0)$ khác x_0 . Khi đó ta xét các trường hợp :

– Nếu $f(x_0) > x_0$ thì $f(f(x_0)) > f(x_0)$, suy ra $x_0 > f(x_0)$ (Điều này vô lí).

– Nếu $f(x_0) < x_0$ thì $f(f(x_0)) < f(x_0)$, suy ra $x_0 < f(x_0)$ (Điều này vô lí).

Vậy : $f(x) = x$ với mọi x thuộc $[1; +\infty)$

*** Nhận xét :** Trong quá trình giải thì đã sử dụng giả thiết của bài toán để chứng minh $f(x) = x$. Nếu xét về phương diện điểm bất động thì hàm số trên có vô số điểm bất động.

Bây giờ ta sẽ thay đổi điều kiện của bài toán để vận dụng lý thuyết điểm bất động để giải.

2.2.2. Khi thay đổi điều kiện bài toán:

Tìm tất cả những hàm $f: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau :

$$\text{i) } f(x.f(y)) = y.f(x), \quad \forall x, y \in (0; \infty)$$

$$\text{ii) } f(x) \rightarrow 0 \text{ khi } x \rightarrow \infty$$

Giải

Ta có : $f[f(y)] = y.f(1)$, và do $f(1) \neq 0$ nên f là một song ánh. Từ đó, tồn tại y để $f(y) = 1$

Kết hợp điều này với (i) khi cho $x = 1$ ta được :

$$f(1.1) = f(1) = y.f(1).$$

Và từ $f(1) > 0$, ta có $y = 1$ suy ra $f(1) = 1$

Cho $y = x$ trong (1) ta có $f(x.f(x)) = x.f(x)$ với mọi $x > 0$

Suy ra $x.f(x)$ là điểm bất động của f .

Bây giờ, nếu cả x và y là các điểm bất động của f thì cũng từ (1) ta được $f(x.y) = y.x$, do đó $x.y$ cũng là điểm bất động.

Nếu x là điểm bất động, ta có :

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{x}.x\right) = f\left(\frac{1}{x}.f(x)\right) = x.f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nên : $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$, nghĩa là $\frac{1}{x}$ cũng là điểm bất động.

Như vậy, ngoài điểm 1 ra, nếu f có điểm bất động khác thì hoặc điểm này lớn hơn 1, hoặc nghịch đảo của nó lớn hơn 1. Do đó :

Nếu gọi $x_0 > 1$ là điểm bất động thì từ (1) thay $y = x_0$ ta được :

$$f(x_0.f(x_0)) = x_0.f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0^2) = x_0^2$$

Dùng quy nạp ta có :

$$f(x_0^n) = x_0^n \quad \text{và} \quad x_0^n \rightarrow \infty \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0^n = +\infty$$

Hay : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0) = +\infty$, điều này trái với điều kiện (ii)

Vậy : 1 là điểm bất động duy nhất của f , và do $x f(x)$ là điểm bất động với mọi $x > 0$ nên $x.f(x)$ phải bằng 1 ($x.f(x) = 1$, $\forall x > 0$).

$$\text{Suy ra : } f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$$

Thử lại , ta có hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$ thỏa đề bài

$$\text{Kết luận : } f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$$

2.2.3. Mở rộng vấn đề :

► **Nhận xét:** Điều mấu chốt của chứng minh trên là dựa vào các điều kiện đề bài để chứng tỏ hàm f cần tìm có điểm bất động duy nhất . Bây giờ ta cũng vận dụng điểm bất động duy nhất để giải bài toán sau :

Bài 1: Gọi S là tập những số thực lớn hơn 1. Hãy tìm tất cả các hàm $f: S \rightarrow S$ thỏa điều kiện :

$$\text{i) } f(x + f(y) + x.f(y)) = y + f(x) + y.f(x) \quad , \quad \forall x, y \in S$$

$$\text{ii) Hàm số } \frac{f(x)}{x} \text{ tăng thực sự trên các khoảng } -1 < x < 0, 0 < x < \infty$$

Giải

Điều kiện ii) cho ta phương trình điểm bất động $f(x) = x$ có nhiều nhất là 3 nghiệm , một nghiệm (nếu có) nằm trong $(-1; 0)$, một nghiệm bằng 0 và một nghiệm nằm trong $(0; \infty)$.

Giả sử $u \in (-1; 0)$ là một điểm bất động của f . Trong phương trình hàm (1) , cho $x = y = u$, ta được :

$$f(2u + u^2) = 2u + u^2 .$$

Hơn nữa $2u + u^2 \in (-1; 0)$, suy ra: $2u + u^2 = u$, nhưng khi ấy $u = -u^2 \notin (-1; 0)$, mâu thuẫn .

Hoàn toàn tương tự, không có điểm bất động nằm trong $(0; \infty)$. Như thế, 0 là điểm bất động duy nhất có thể có .

Đặt $x = y$ trong phương trình hàm i) ta có:

$$f(x + f(x) + x.f(x)) = x + f(x) + x.f(x), \forall x \in S.$$

Như thế, $\forall x \in S, x + (1 + x).f(x)$ là điểm bất động, do vậy :

$$\forall x \in S, x + (1 + x).f(x) = 0.$$

Suy ra: $f(x) = \frac{-x}{1+x}$ với mọi $x > -1$.

Thử lại, hàm số trên thỏa yêu cầu bài toán.

➤ **Chú ý:**

Khái niệm điểm bất động là một khái niệm quan trọng trong chương trình toán chuyên ngành bậc Đại học và sau Đại học, khái niệm này thường xuyên xuất hiện trong các môn như Hình học giải tích, hình học afin, hình học Ôclit, hình học xạ ảnh (điểm kép), giải tích hàm, ...

Tuy nhiên, ở bậc phổ thông chúng ta đã gặp một số bài toán có liên quan đến điểm bất động như :

Bài 2: Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \leq b$ và $f: [a; b] \rightarrow [a; b]$ liên tục.

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [a; b]$ sao cho $f(x_0) = x_0$

Giải

Đặt $g(x) = f(x) - x$, $\forall x \in [a; b]$, $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ Nếu: } \begin{cases} g(a) = 0 \\ g(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \end{cases}$$

Nên $x_0 = a$ hoặc $x_0 = b$

$$\blacksquare \text{ Trường hợp: } \begin{cases} g(a) > 0 \\ g(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow g(a).g(b) < 0$$

Theo định lý Bôxanô – Côsi thứ nhất ta có :

$$\exists x_0 \in (a; b) \text{ sao cho } g(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0) = x_0$$

Do đó $\exists x_0 \in [a; b]$ sao cho $f(x_0) = x_0$

➤ **Nhận xét** : Thực chất của bài toán trên là ta chứng minh hàm số $f(x)$ có tồn tại điểm bất động trên $[a;b]$

Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy cho phép biến hình f biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho :

$$x' = \frac{x+y}{2} ; y' = \frac{y-x}{2}$$

Tìm điểm bất động của phép biến hình f ?

Giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm bất động của phép biến hình f . Tức là: $f(M) \equiv M$

Suy ra $(x'_0; y'_0) = (x_0; y_0)$ (với $(x'_0; y'_0)$ là tọa độ của $f(M)$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_0 = x_0 \\ y'_0 = y_0 \end{cases}$$

Tọa độ của M tương ứng với nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_0 + y_0}{2} \\ y_0 = \frac{y_0 - x_0}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 = 0 \\ x_0 + y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy: Điểm bất động của phép biến hình f là $M(0;0)$

➤ **Nhận xét** : Bài toán tìm điểm bất động của phép biến hình f là một dạng bài toán quen thuộc trong hình học phẳng. Nhưng học sinh cần phải nắm vững để dễ làm quen hơn trong hình học cao cấp.

KẾT LUẬN CHƯƠNG II:

Phần này giới thiệu bài toán phương trình hàm Côsi, phương trình hàm Cô si mở rộng và việc áp dụng chúng để giải một số dạng phương trình hàm khác. Đồng thời, giới thiệu bài toán phương trình hàm dùng phương pháp điểm bất động để giải. Khái niệm điểm bất động là một khái niệm quan trọng trong toán học, tuy nhiên chưa được đề cập nhiều trong toán phổ thông. Từ đó góp phần trang bị cho học sinh một số dạng phương trình hàm quan trọng và cách giải chúng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1. Bộ Giáo dục và đào tạo – Hội toán học Việt Nam.** Tuyển tập 30 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ. Nxb Giáo dục, 2000.
- 2. PGS.TS Nguyễn Quý Dy** (Chủ biên)- Ths Nguyễn Văn Nho- TS Vũ Văn Thoả. Tuyển tập 200 bài thi vô địch - tập 3: Giải tích. Nxb Giáo dục.
- 3. Trần Bá Hà.** Toán khó 11 Đại số- Giải tích. Nxb Hà Nội, 2001.
- 4. GS Phan Huy Khải.** Các bài toán về hàm số. Nxb Hà Nội, 2000.
- 5. Nguyễn Văn Mậu.** Phương trình hàm. Nxb Giáo dục, 2001.
- 6. Jean – Marie Monier** (Người dịch: Lý Hoàng Tú). Giáo trình Toán- tập 1: Giải tích 1, Nxb Giáo dục, 2001.
- 7. Ths Nguyễn Văn Nho.** Olympic toán học Châu Á Thái Bình Dương. Nxb Giáo dục, 2003.
- 8. PGS.TS Vũ Dương Thụy** (Chủ biên)- Ths Nguyễn Văn Nho- TS Vũ Văn Thoả. 40 năm Olympic toán học quốc tế. Nxb Giáo dục, 2002.
- 9. Khoa toán cơ – tin học** trường Đại học Khoa học tự nhiên – ĐHQGHN. Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp. Nxb ĐHQGHN, 2001.