SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẮC NINH
TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG YÊN PHONG SỐ 2

NGUYỄN VĂN XÁ

ĐỀ TÀI

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

(BỘ MÔN TOÁN)

Năm học 2011 – 2012

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẮC NINH
TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG YÊN PHONG SỐ 2

NGUYỄN VĂN XÁ

<u>ĐỀ TÀI</u>

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

(BỘ MÔN TOÁN)

Năm học 2011 – 2012

MỤC LỤC

PHẦN MỘT --

MỞ ĐẦU

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Đạo hàm là một nội dung quan trọng của toán học bậc THPT. Nó vừa là đối tượng, nhưng hơn thế nó là công cụ hữu hiệu để giải quyết nhiều vấn đề phức tạp của toán THPT.

Vận dụng đạo hàm để giải toán THPT là một nội dung trọng tâm của chương trình ôn thi Tốt nghiệp THPT, luyện thi Đại học, và bồi dưỡng học sinh giỏi.

Qua việc thực hiện đề tài này, tác giả mong muốn làm rõ các khía cạnh có thể khai thác đạo hàm để giải các bài toán thường gặp trong chương trình, qua đó xây dựng cho học sinh những phương pháp chủ đạo và hình thành những kĩ năng cơ bản trong việc giải quyết các bài toán này, phục vụ tốt cho việc dạy và học môn toán THPT.

2. MỤC ĐÍCH, NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU

Qua đề tài này, tác giả cố gắng làm sáng tỏ mối liên hệ giữa đạo hàm với một số dạng toán cơ bản trong chương trình THPT, từ đó một cách tự nhiên hình thành cho học sinh phương pháp giải các dạng toán đó, cũng làm tiền đề để các em có thể tự đọc các tài liệu liên quan tới vấn đề này.

3. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Các bài toán ở bậc THPT thường gặp trong kì thi Tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh Đại học, thi Học sinh giỏi.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Phân tích, tổng hợp từ các tài liệu liên quan, hướng dẫn học sinh chia nhóm nghiên cứu theo từng chủ đề cụ thể, từ đó đúc rút ra các nhận xét cơ bản và xúc tích, trình bày các nhận xét theo một hệ thống logic.

PHẦN HAI ---

NỘI DUNG

-- **CHƯƠNG MỘT**

CƠ SỞ LÍ LUẬN ĐỀ TÀI

1.1. Định nghĩa đạo hàm

❖ Cho hàm số y = f(x) xác định trên tập D và điểm $x_0 \in D$. Giả sử tồn tại khoảng (a; b) sao cho $x_0 \in (a;b) \subset D$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$ thì số A được gọi là đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$, khi đó $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 (nếu có) là một hằng số. Hàm số có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại x_0.

❖ Khi giải toán cần lưu ý

$$f'(x_0) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A.$$

❖ Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng K thì ta nói f(x) có đạo hàm trên K và hàm số $f'(x),\ x \in K,$ được gọi là (hàm) đạo hàm của f(x) trên K. Đạo hàm của hàm số (nếu có) trên một khảng (có thể mở rộng trên một tập) là một hàm số.

❖ Đạo hàm cấp cao $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))'$.

VD. Cho hàm số f(x) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f\left(2x\right) = 4\left(\cos x\right).f\left(x\right) - 2x$ với mọi x. Tính $f'(0)$ bằng định nghĩa.

1.2. Các tính chất của đạo hàm (*những công thức này được giả sử là hai vế đều có nghĩa*)

1) $(c)'=0;\ (x)'=1;\ (x^n)'=n.x^{n-1};\ (\sqrt[n]{x})=\dfrac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$

2) $(\sin x)'=\cos x;\ (\cos x)'=-\sin x;\ (\tan x)'=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(\cot x)'=-1-\cot^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

3) $(a^x)'=a^x.\ln a;\quad (\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x.\ln a}.$

4) $(u+v-w)'=u'+v'-w';\ (k.u)'=k.u';\ (uv)'=u'v+uv';\ (\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2};$

$(u(v(x)))'=u'(v).v'(x).$

GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

2.1. Ứng dụng đạo hàm để tính tổng và tìm hệ số của đa thức

❖ Nhờ đạo hàm ta có thể tính được một số tổng (hoặc chứng minh đẳng thức) mà các số hạng thường có dạng $(k+1)x^k a_k$.

❖ Đối với đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ta dễ thấy $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, trong đó qui ước đạo hàm cấp 0 của hàm số f(x) là chính hàm số f(x); và $a_0 + a_1 + ... + a_n = f(1),\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n = f(-1).$

VD1. Cho đa thức $f(x) = (1 + x - x^{12})^{2011} + (1 - x + x^{11})^{2012}$.

1. Tìm hệ số của số hạng chứa x trong đa thức.
2. Tính tổng tất cả các hệ số bậc lẻ trong đa thức.
3. Tính tổng các hệ số bậc lớn hơn hay bằng 2 trong đa thức.

HD. 1. Ta có

$$f'(x) = 2011(1 + x - x^{12})^{2010}.(1 - 12x^{11}) + 2012(1 - x + x^{11})^{2011}.(-1 + 11x^{10}).$$

Để cho tiện ta kí hiệu $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ (với n = 12×2011 = 24132). Hệ số của số hạng chứa x trong đa thức f(x) là $a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 2011 - 2012 = -1.$

2. Do $a_0 + a_1 + ... + a_n = f(1) = 2,\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n = f(-1) = 0$ nên tổng các hệ số bậc lẻ của f(x) là $a_1 + a_3 + ... + a_{24131} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = 1.$

3. Ta có $a_0 = f(0) = 2$, vậy

$$a_2 + a_3 + ... + a_n = (a_0 + a_1 + ... + a_n) - a_0 - a_1 = 2 - 2 - (-1) = 1.$$

VD2. Chứng minh $C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2.$

HD. Ta có

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \Rightarrow n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1} \Rightarrow nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^k$$

$\Rightarrow n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 x^{k-1},$ thay x = 1 vào đẳng thức cuối cùng này sẽ thu được $C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2.$

Nhận xét. Ta cũng có

$$n^2C_n^0+(n-1)^2C_n^1+...+2^2C_n^{n-2}+1^2C_n^{n-1}=n(n+1)2^{n-2},\forall n\in\mathbb{N},n\ge 2.$$

Bài tập.

1. Khai triển $f(x) = (1 - x + x^2)^{2011} + (1 + x^3)^{2012}$ thành dạng $f(x)=a_0+a_1x+...+a_{6030}x^{6030}$. Tính tổng

$$A = a_1-2a_2+3a_3+...+6029a_{6029}-6030a_{6030}.$$

2. Giả sử $(1+x)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Biết rằng tồn tại số nguyên dương k $(1\le k\le n)$ sao cho $\frac{a_{k-1}}{2}=\frac{a_k}{9}=\frac{a_{k+1}}{24}$.
Tính tổng $2.1.a_2+3.2.a_3+4.3.a_4+...+n.(n-1).a_n$.

3. a) Chứng minh rằng $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n<(n!.n),\forall n\in\mathbb{N},n>2$.
b) Chứng minh rằng $nC_n^0-(n-1)C_n^1+...+(-1)^{n-2}C_n^{n-2}+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}=0,\forall\in\mathbb{N}^*$.

4. Cho $y=a_0x+a_1x^3+a_2x^5+...+a_nx^{2n+1}+...$ thoả mãn $(1-x^2)y'-xy=1,\forall x\in(-1;1)$. Tìm các hệ số $a_0,a_1,...,a_n$.

5. Cho số nguyên dương n≥ 3 thoả mãn đẳng thức $A_n^3+C_n^3=35(n-1)(n-2)$. Tính các tổng sau đây
$S_1=C_n^1+2C_n^2+...+nC_n^n$; $S_2=2^2C_n^2-3^2C_n^3+...+(-1)^nn^2C_n^n$; $S_3=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$;
$S_4=\sin x+\sin 2x+...+\sin nx$; $S_5=\cos x+2\cos 2x+...+n\cos nx$; $S_6=C_n^0+2C_n^1+...+(n+1)C_n^n$.

6. Chứng minh rằng $n2^nC_n^0+(n-1)2^{n-1}C_n^1+...+2C_n^{n-1}=2n.3^{n-1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

7. Tìm n biết
$C_{2n+1}^1-2.2.C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+...+(2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2005$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

8. Cho khai triển $(1+2x)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Biết rằng $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}...+\frac{a_n}{2^n}=4096$. Gọi a_k là số lớn nhất trong các số a_0, a_1, ..., a_n, $(a_k=\max\{a_i,i=\overline{0,n}\})$.
Tính tổng $S=a_0+a_1+2a_2+3a_3+...+(k-1)a_{k-1}+(k+1)a_{k+1}+...+na_n$
(Tức là $S=a_0+(\sum_{i=1}^{n}i.a_i)-ka_k$).

9. Cho khai triển $(1-2x)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Biết rằng $a_0+a_1+a_2=71$.
Tính tổng $S=1^2a_1+2^2a_2+3^2a_3+4^2a_4+(5^2-1)a_5+6^2a_6+...+n^2a_n$.

10. Cho $C_n^0+C_n^1+C_n^2=211$. Tính tổng $S=\frac{1^2C_n^0}{A_1^1}+\frac{2^2C_n^1}{A_2^1}+\frac{3^2C_n^2}{A_3^1}+...+\frac{(n+1)^2C_n^n}{A_{n+1}^1}$.

11. Tìm số nguyên dương n thoả mãn $C_n^1+3C_n^2+3^2C_n^3+...+3^{n-1}C_n^n=\frac{2^{200}-1}{3}$.

12. Chứng minh rằng

$$100.C_{100}^{0}.(\frac{1}{2})^{99}-101.C_{100}^{1}.(\frac{1}{2})^{100}+...-199.C_{100}^{99}.(\frac{1}{2})^{198}+200.C_{100}^{100}.(\frac{1}{2})^{199}=0.$$

13. Cho $\frac{1}{A_2^2}+\frac{1}{A_3^2}+\frac{1}{A_4^2}+...+\frac{1}{A_n^2}=\frac{2011}{2012}$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$ Tính tổng tất cả các hệ số bậc lớn hơn 2 của đa thức $f(x)=(1-2x).(x^2+1)^n.$

2.2. Ứng dụng đạo hàm để tính giới hạn

❖ Dựa vào định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm và các tính chất của đạo hàm ta có thể tính được một số gới hạn ở dạng vô định.

❖ Để tính giới hạn $\frac{0}{0}$ có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x}$, $f(0)=0,$ ta vận dụng trực tiếp định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm, thu được $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x}=f'(0).$

❖ Nếu các hàm f(x) và g(x) có đạo hàm trên một lân cận của điểm x_0 và $f(x_0)$ = $g(x_0)$ = 0, $g'(x_0)\neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$ (dạng vô định $\frac{0}{0}$). Các dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, ∞-∞, 1^{∞}, 0^0... ta biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ để áp dụng tính chất trên.

VD3. Tính giới hạn

$$1)A=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt[3]{1-x+x^3}}{\tan(x-1)};\ 2)B=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt[3]{1+x^3});\ 3)C=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

HD. 1) Xét $f(x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt[3]{1-x+x^3}$, $g(x)=\tan(x-1)$ trên một lân cận của điểm x_0 = 1. Nhận thấy

$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{1-x+x^2}}-\frac{3x^2-1}{3\sqrt[3]{(1-x+x^3)^2}}$, $g'(x)=1+\tan^2(x-1)$, $f(1) = g(1) = 0$, $f'(1)=-\frac{1}{6}$, $g'(1)=1\neq 0$, nên

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{g(x)}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-0}{x-1}}{\frac{g(x)-0}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=-\frac{1}{6}.$$

2)B= $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt[3]{1+x^3}) = \lim\limits_{x\to-\infty} x(-\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1+(\frac{1}{x})^3})$. Đặt $t=\frac{1}{x}$ thì $t\to 0$ khi $x\to-\infty$. Ta có B= $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+t^3}-\sqrt{1+t^2}}{t}$. Xét $f(t)=\sqrt[3]{1+t^3}-\sqrt{1+t^2}$, có $f'(t)=\frac{t^2}{\sqrt[3]{(1+t^3)^2}}-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, f(0) = 0, $f'(0)=0$, nên
B= $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+t^3}-\sqrt{1+t^2}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)-0}{t-0}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)=0.$

3) Ta luôn có thể chọn được một lân cận của điểm $x_0 = 0$ sao cho trên lân cận đó 1 + sinx > 0. Đặt $M=(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$, $N=\ln(M)=\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$. Xét hàm $f(x)=\ln(1+\sin x)$, có $f'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$, f(0) = 0, $f'(0)=1$. Như vậy $\lim\limits_{x\to 0} N=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1.$ Suy ra $C=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0} M=\lim\limits_{x\to 0} e^N=e^{\lim\limits_{x\to 0} N}=e^1=e.$ Vậy $C=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e.$

<u>Bài tập.</u>

14. Tính các giới hạn sau đây

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin 2x-\cos 3x}{\ln|1+4x|-\tan 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+2x^2}}{1-\cos x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+4}-x-2}{1-\sqrt{2x+1}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2x}{\sin(1-x)}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x.2^x-1}{x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}.\sqrt[m]{1+bx}-1}{x}$ $(a,b\neq 0; m,n\in\mathbb{N}^*)$; 7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$;9) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{\sin x}{\sin a})^{\frac{1}{x-a}}$ $(a\neq k\pi)$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$; 11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$;

12) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})^x$;13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+2005)\sqrt[9]{1-5x}-2005}{x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{3x(1+\sqrt{1+4x})}-\frac{1}{2x(\sqrt[3]{(1+6x)^2}+\sqrt[3]{1+6x}+1)}\right]$; 15) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{\sin(x+1)}$;

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x-\sqrt[3]{x^3+3x}}$;17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2011x}{x+\sin 2012x}$;

19) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$ $(a\in\mathbb{R}; m,n\in\mathbb{N}^*)$.

2.3. Ứng dụng đạo hàm để viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

❖ Nếu hàm số y = f(x) (C) có đạo hàm tại $x = x_0$ thì tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ có phương trình là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.
❖ Nếu tiếp tuyến của (C) y = f(x) có hệ số góc k thì hoành độ tiếp điểm thoả mãn PT $k = f'(x)$.
❖ Đường thẳng y = ax + b là tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) khi hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} ax + b = f(x) \\ a = f'(x) \end{cases}$, và nghiệm x_0 của hệ này chính là hoành độ tiếp điểm.

VD4. Tìm a, b để hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \le 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ và khi đó hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

HD. Để hàm số có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ thì trước hết nó phải liên tục tại điểm này. Ta phải có

$$y(2) = \lim_{x \to 2^+} y(x) = \lim_{x \to 2^-} y(x) \Leftrightarrow y(2) = \lim_{x \to 2^+} (x^3 - x^2 - 8x + 10) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + ax + b)$$

$\Leftrightarrow 4 + 2a + b = -2 \Leftrightarrow b = -2a - 6.$

Lúc này ta viết lại $y = \begin{cases} x^2 + ax - 2a - 6 & \text{khi } x \le 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Hàm số này có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ thì $\lim_{x \to 2^+} \frac{y(x) - y(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{y(x) - y(2)}{x - 2} \Leftrightarrow \lim_{x \to 2^+} \frac{(x^3 - x^2 - 8x + 10) - (-2)}{x - 2} =$

$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x^2 + ax - 2a - 6) - (-2)}{x - 2} \Leftrightarrow 0 = a + 4 \Leftrightarrow a = -4 \Rightarrow b = 2.$ Vậy với a = –4, b = 2 thì hàm số đã cho có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ và $y'(2) = 0.$ Khi đó tiếp tuyến cần tìm là $y = 0.(x - 2) + (-2) \Leftrightarrow y = -2.$

VD5. Viết phương trình tiếp tuyến của (C): $y = x^4 - 2x^2$ biết tiếp tuyến đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của (C).

HD. Dễ thấy (C) có ba điểm cực trị là A(–1;–1), B(1;–1), O(0;0). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB thì I(0; m) với –1 < m < 0. Các đường thẳng OA, OB, AB lần lượt có phương trình x – y = 0, x + y = 0, y + 1 = 0. Có d(I, OA) = d(I, OB) = d(I, AB) $\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}} = |m + 1| \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{2}$ (do $-1 < m < 0$). Vậy

$I(0;2-\sqrt{2})$. Đường thẳng đi qua I có hệ số góc a có phương trình $y = ax + 2 - \sqrt{2}$ (d) (tiếp tuyến của đồ thị hàm số là đường thẳng có hệ số góc). Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị (C) khi hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - 2x^2 = ax + 2 - \sqrt{2} & (1) \\ 4x^3 - 4x = a & (2) \end{cases}$ có nghiệm. Thế (2) vào (1) ta được $3x^4 - 6x^2 + 2 - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3\pm 3\sqrt{2}}{3}}$. Tương ứng ta tìm được 4 giá trị của a là $a = \pm\frac{4\sqrt{3+3\sqrt{2}}}{3}\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{3+3\sqrt{2}}}{3}}$. Do đó tìm được 4 tiếp tiếp thoả mãn yêu cầu bài toán $y = \pm\frac{4\sqrt{3+3\sqrt{2}}}{3}\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{3+3\sqrt{2}}}{3}}.x + 2 - \sqrt{2}$.

Bài tập.

15. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng x – 3y + 2 = 0.

16. Cho $y = \frac{x+2}{2x+3}$(C). a) Viết PTTT của (C) biết tiếp tuyến tạo với hai trục toạ độ một tam giác cân.
b) Viết PTTT của (C) tại các điểm có toạ độ nguyên của (C).
c) Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua điểm $I(-\frac{3}{2};-2)$.

17. Tìm m biết rằng tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C): $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ là một đường thẳng tạo với hai trục toạ độ tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{6}$.

18. Viết PTTT của đồ thị (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$
a) Biết tiếp tuyến đi qua điểm A(3; 0).
b) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng 9x + 12y – 2 = 0.

19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - 3x^2 + 3$ (C) và tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M(–1;1).

20. Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng y = x + m với đồ thị $y = \frac{-x+1}{2x-1}$(C) và k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A, B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

21. a) Tìm trên trục Oy những điểm mà từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = x^4$ sao cho 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

b) Tìm trên đường thẳng y = 6 những điểm có thể kẻ được 3 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ sao cho 2 trong số 3 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

22. Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 2(m + 4)x^3 + (8m + 7)x^2 - 2(3m+2)x+3$ tiếp xúc với trục Ox.

23. Viết PTTT của đồ thị $(C): y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ tại giao điểm của đồ thị này với trục tung.

24. a) Viết PTTT của $y = \dfrac{x}{x-1}(C)$ biết khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) tới tiếp tuyến là lớn nhất.

b) Viết PTTT của $y = \dfrac{4x-3}{x-1}(C)$ biết tiếp tuyến hợp với trục hoành góc 45^0.

c) Chứng minh đồ thị $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x^2+1}}(C)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B. Tính cosin của góc tạo bởi hai tiếp tuyến của (C) tại A và tại B.

d) Giả sử A, B, C là ba điểm thẳng hàng trên đồ thị $y = x^3 - 3x + 2(T)$. Các tiếp tuyến của (T) tại A, B,
C lần lượt cắt (T) tại các điểm A’, B’, C’ tương ứng khác A, B, C. Chứng minh A’, B’, C’ thẳng hàng .

25. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x \le 1 \\ ax^2 + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại x_0 = 1, khi đó hãy viết PTTT của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ x_0 = 1.

2.4. Ứng dụng đạo hàm để xét tính đơn điệu của hàm số

❖ Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng (a; b) thì hàm số này đồng biến (tương ứng nghịch biến) trên đoạn [a; b].

❖ Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm trên khoảng K và phương trình $f'(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm trên K thì: + f(x) đồng biến trên K $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0, \forall x \in K$.

+ f(x) nghịch biến trên K $\Leftrightarrow f'(x) \le 0, \forall x \in K$.

Lưu ý: nếu thay khoảng K bởi một nửa khoảng hoặc một đoạn thì kết luận trên vẫn đúng, nhưng nếu thay K bởi một tập bất kì thì kết luận đó không đúng nữa.

VD6. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + x - 2m^3$

a. Đồng biến trên $\mathbb{R}$.
b. Đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
c. Khoảng nghịch biến của hàm số có độ dài lớn hơn $2\sqrt{3}$.

HD. a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = x^2 - 2mx + 1 \ge 0\ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 1.$

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' = x^2 - 2mx + 1 \ge 0\ (\forall x > 0) \Leftrightarrow m \le \dfrac{x^2+1}{2x} (\forall x > 0).$ Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$ với $x > 0$, có $f'(x) = \dfrac{2x^2-2}{4x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, với $x > 0$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Trên khoảng $(0;+\infty)$ dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào dấu của tam thức $2x^2 - 2$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm f(x) như sau

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		–	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \le \dfrac{x^2+1}{2x} (\forall x > 0) \Leftrightarrow m \le 1.$ Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi $m \le 1.$

c) Để hàm số có khoảng nghịch biến thì trước hết y’ phải có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' > 0.$ Khi đó gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của y’ ($x_1 < x_2$) thì hàm số có khoảng nghịch biến là (x_1 ; x_2). Độ dài khoảng này (khoảng cách giữa 2 nghiệm của một phương trình bậc hai) là $|x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \dfrac{\sqrt{4\Delta'}}{|a|}$. Vậy để khoảng nghịch biến của hàm số đã cho có độ dài lớn hơn $2\sqrt{3}$ ta cần điều kiện đối với tam thức $y' = x^2 - 2mx + 1$ là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \dfrac{\sqrt{4\Delta'}}{|a|} > 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ 2\sqrt{m^2-1} > 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 1 > 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right..$$

VD7. Chứng minh hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định nhưng trên tập xác định thì nó không đồng biến và cũng không nghịch biến.

HD. Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty;0) \cup (0;+\infty).$ Đạo hàm $y' = -\dfrac{1}{x^2} < 0, \forall x \in D.$ Vì $y' = -\dfrac{1}{x^2} < 0, \forall x \in (-\infty;0)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$, vì $y' = -\dfrac{1}{x^2} < 0, \forall x \in (0;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta chọn $x_1 = -1$ thì $y_1 = -1$, $x_2 = 1$ thì $y_2 = 1$, ta thấy $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ nên hàm số không nghịch biến trên D. Tương tự nếu chọn giá trị $x_1 = 2$ thì $y_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ thì $y_2 = \frac{1}{3}$, do $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ nên hàm số không đồng biến trên D. Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $(-\infty; 0), (0; +\infty),$ nhưng nó không đồng biến và cũng không nghịch biến trên tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$

Bài tập.

26. Xác định các khoảng đơn điệu của hàm số $1) y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2;\ 2) y = \frac{x}{2-x};\ 3) y = -x^4 + 2x^2.$

27. Tìm m để hàm số: a) $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

c) $y = -3x^3 - mx^2 - x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. d) $y = 3x + \frac{m}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

28. Tìm m để đồ thị hàm số y = x^3 + mx + 2 cắt trục Ox tại đúng một điểm.

29. Lập bảng biến thiên của hàm số $a) y = x - \sin^2 x;\ b) y = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x;\ c) y = \frac{2x^2 + 3x}{x+1}.$

2.5. Ứng dụng đạo hàm để tìm cực trị của hàm số

❖ Giả sử hàm số y = f(x) liên tục trên khoảng (a; b), điểm $x_0 \in (a; b),$ và có đạo hàm trên các khoảng (a; x_0), (x_0; b). Ta có:

+ Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; x_0); f'(x) < 0, \forall \in (x_0; b)$ thì f(x) đạt cực đại bằng f(x_0) tại điểm x = x_0.

+ Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_0); f'(x) > 0, \forall \in (x_0; b)$ thì f(x) đạt cực tiểu bằng f(x_0) tại điểm x = x_0.

Chú ý: – Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định.

– Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên (a; b) thì f(x) không có cực trị trên (a; b).

– Nếu x_0 là ***điểm cực trị*** của hàm số y = f(x) (C) thì f(x_0) được gọi là (giá trị) ***cực trị*** của hàm số, và M(x_0; f(x_0)) được gọi là ***điểm cực trị*** của đồ thị (C).

❖ Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp 2 trên khoảng (a; b) và điểm $x_0 \in (a; b).$ Ta có:

+ Nếu $f'(x_0) = 0; f''(x_0) < 0$ thì f(x) đạt cực đại bằng f(x_0) tại điểm x = x_0.

+ Nếu $f'(x_0) = 0; f''(x_0) > 0$ thì f(x) đạt cực tiểu bằng f(x_0) tại điểm x = x_0.

Chú ý: Nếu $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ thì chưa thể kết luận được hàm số có đạt cực trị tại x_0 hay không (chẳng hạn với f(x) = x^3 thì $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ và hàm số không đạt cực trị tại x = 0, với f(x) = x^4 thì $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ và hàm số đạt cực tiểu tại x = 0, với f(x) = $-x^4$ thì $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ và hàm số đạt cực đại tại x = 0).

VD8. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$.
a) Tìm m để hàm số đại cực tiểu tại x = 1.
b) Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị dương.
c) Tìm m để hàm số có hai cực trị có tích nhỏ hơn $\frac{31}{27}$.

HD. a) Ta có $y' = 3x^2 - 4x + m,\ y'' = 6x - 4,$ và $y''(1) = 2 > 0$ nên hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x = 1 khi $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy với m = 1 thì hàm số có điểm cực tiểu x = 1.

b) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị dương khi phương trình $3x^2 - 4x + m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, tức là $\begin{cases} \Delta' = 4 - 3m > 0 \\ S = \frac{4}{3} > 0 \\ P = \frac{m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$. Vậy với $0 < m < \frac{4}{3}$ thì hàm số có hai điểm cực trị dương.

c) Hàm số đã cho có hai cực trị có tích nhỏ hơn $\frac{31}{27}$ khi phương trình $3x^2 - 4x + m = 0$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $y(x_1).y(x_2) < \frac{31}{27}$. Trước hết, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$. Theo định lí Viet thì $x_1 + x_2 = \frac{4}{3},\ x_1x_2 = \frac{m}{3}$.
Lúc này ta có

$$y(x_1) = x_1^3 - 2x_1^2 + mx_1 + 1 = (3x_1^2 - 4x_1 + m)(\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{9}) + (\frac{2m}{3} - \frac{8}{9})x_1 + \frac{11}{9} = (\frac{2m}{3} - \frac{8}{9})x_1 + \frac{11}{9}$$

(do $3x_1^2 - 4x_1 + m = 0$). Tương tự $y(x_2) = (\frac{2m}{3} - \frac{8}{9})x_2 + \frac{11}{9}$. Do đó

$$y(x_1).y(x_2) < \frac{31}{27} \Leftrightarrow ((\frac{2m}{3} - \frac{8}{9})x_1 + \frac{11}{9})((\frac{2m}{3} - \frac{8}{9})x_2 + \frac{11}{9}) < \frac{31}{27}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{2m}{3} - \frac{8}{9})^2 x_1x_2 + \frac{11}{9}(\frac{2m}{3} - \frac{8}{9})(x_1 + x_2) + \frac{121}{81} < \frac{31}{27}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{2m}{3} - \frac{8}{9})^2 \frac{m}{3} + \frac{11}{9}(\frac{2m}{3} - \frac{8}{9})\frac{4}{3} + \frac{121}{81} < \frac{31}{27}$$

$\Leftrightarrow 3m^3 - 8m^2 + 22m - 17 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ (thoả mãn $m < \frac{4}{3}$). Vậy m < 1 là các giá trị cần tìm.

Bài tập.

30. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại x = 0: $a) y = x^3 - mx^2 + (m+1)x;\ b) y = x^4 + mx^3.$

31. Tìm m để hàm số y = x^3 – (m+2)x +m đạt cực đại tại x = 1.

32. Tìm m để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số y = $-x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ cách đều điểm O.

33. Tìm m để đồ thị (C) $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh một tam giác đều.

34. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ biết rằng tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng –1 là một đường thẳng song song với d: 5x – y = 0.

35. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ a)Có hai điểm cực trị trái dấu. b)Có hai cực trị trái dấu.

36. Tìm m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số y = $x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ đối xứng với nhau qua đường thẳng y = x.

37. Tìm m để hàm số y = $x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$ có hai điểm cực trị dương.

38. Tìm m để đường thẳng y = $x + m^2 - m$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số y = $x^3 - 6x^2 + 9x$.

39. Tìm m để đồ thị hàm số y = $x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có 3 điểm cực trị A, B, C (A là điểm cực trị nằm trên Oy) sao cho OA = BC.

40. Chứng minh đồ thị hàm số sau luôn có hai điểm cực trị và viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó: $a) y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m;\ b) y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}.$

41. a) Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + 2x - 3$ có 1 điểm cực trị.

b) Chứng minh hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$(C) có duy nhất một điểm cực trị và đó là điểm cực tiểu.

42. Tìm a, b, c, d để y = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu bằng 0 tại x = 0, đạt cực đại bằng 1 tại x = 1.

43. Tìm a, b, c để hàm số y = $x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng – 3 tại x = 1, và đồ thị của nó cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 2.

44. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (C).

a) Chứng minh với mọi m đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị có khoảng cách không đổi.

c) Tìm m để các điểm cực trị của hàm số đã cho thoả mãn $2x_{CĐ} - x_{CT} = -5$.
d) Tìm m để các điểm cực trị của hàm số đã cho thoả mãn $2y_{CT} + y_{CĐ} = 16$.
e) Chứng minh đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có phương không đổi.

2.6. Ứng dụng đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

❖ Bảng biến thiên của hàm số có thể giúp ta tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số hoặc chứng minh bất đẳng thức.
❖ Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số y = f(x) trên đoạn [a; b] ta có thể làm theo sơ đồ sau:
– Tính $f'(x)$, tìm các giá trị $x_1, x_2, ... \in [a;b]$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc không xác định.
– Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(a), f(b)$.
– Khi đó $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = \max\{f(x_1), f(x_2), ..., f(a), f(b)\}$, $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = \min\{f(x_1), f(x_2), ..., f(a), f(b)\}$.

VD9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 6x + \sqrt{10-4x^2}$.

HD. Tập xác định của hàm số là $D = \left[-\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$. Ta có

$$y' = 6 - \frac{4x}{\sqrt{10-4x^2}}; 6 - \frac{4x}{\sqrt{10-4x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2},$$

và $y(\frac{\sqrt{10}}{2}) = 3\sqrt{10}$; $y(-\frac{\sqrt{10}}{2}) = -3\sqrt{10}$; $y(\frac{3}{2}) = 10$.

Vậy $\max\limits_{x\in D} y = y(\frac{3}{2}) = 10$; $\min\limits_{x\in D} y = y(-\frac{\sqrt{10}}{2}) = -3\sqrt{10}$.

VD10. a) Cho a, b không đồng thời bằng 0, chứng minh $\frac{ab^3}{a^4+3b^4} + \frac{a^3b}{3a^4+b^4} \le \frac{1}{2}$.

b) Cho hai số dương x, y. Chứng minh rằng $e^{\frac{y}{2x+y}} < \sqrt{\frac{x+y}{x}}$.

HD. a) Xét hàm số f(x) = $x^4 - 4xb^3 + 3b^4$ với $x \in \mathbb{R}$. Có $f'(x) = 4x^3 - 4b^3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = b$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > b$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < b$. Bảng biến thiên của f(x) như sau

x	$-\infty$		b		$+\infty$
f '(x)		–	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Suy ra $f(x) = x^4 - 4xb^3 + 3b^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó ta được $a^4 - 4ab^3 + 3b^4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{ab^3}{a^4 + 3b^4} \leq \frac{1}{4}$

(do a, b không đồng thời bằng 0 nên $a^4 + 3b^4 > 0$). Tương tự ta có $\frac{a^3b}{3a^4 + b^4} \leq \frac{1}{4}$.
Cộng hai bất đẳng

thức này, vế với vế tương ứng, ta được $\frac{ab^3}{a^4 + 3b^4} + \frac{a^3b}{3a^4 + b^4} \leq \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b.

b) Với x, y dương ta có $e^{\frac{y}{2x+y}} < \sqrt{\frac{x+y}{x}}$ (1) $\Leftrightarrow 2 < (\frac{2x}{y} + 1)\ln(1 + \frac{y}{x})$. Đặt $t = 1 + \frac{y}{x}$ thì t > 1 và $\frac{x}{y} = \frac{1}{t-1}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $(t+1)\ln t - 2t + 2 > 0$ (2), với t > 1. Ta xét hàm

số $f(t) = (t+1)\ln t - 2t + 2,\ \forall t \in [1; +\infty)$. Có $f'(t) = \frac{t\ln t - t + 1}{t}$. Đặt $g(t) = t\ln t - t + 1 \Rightarrow g'(t) = \ln t$. Bảng biến thiên:

t	1		$+\infty$
g '(t)	0	+	
g(t)	0	↗	$+\infty$

Suy ra $f'(t) > 0, \forall t > 1$, và $f'(1) = 0$. Do đó f(t) đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$. Dẫn tới f(t) > f(1) hay $(t+1)\ln t - 2t + 2 > 0$ với mọi t > 1. Tức là (2) được chứng minh. Vậy (1) được chứng minh.

Bài tập.

45. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số y = $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$.
46. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geq ab^3 + a^3b$ với mọi a, b.

47. Chứng minh rằng a) $x.e^{x+1} + 1 \geq 0$ với mọi x; b) $(a^x + b^x)^y < (a^y + b^y)^x,\ \forall a, b > 0, x > y > 0.$

48. Chứng minh

a) $x > \ln(1+x), \forall x > 0$; b) $2\sin x + \tan x > 3x, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$; c) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

c) $3 \leq 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \leq 2^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$ d) $a^b < b^a, \forall a > b \geq e.$ e) $\cos x + \cos y \leq 1 + \cos(xy),$ với mọi số thực x, y thoả mãn $x^2 + y^2 \leq \pi.$

49. Chứng minh $\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{9}{10}, \forall x, y, z \geq -\frac{3}{4}, x + y + z = 1.$

50. Cho $a > 0,\ b > 0,\ 2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2).$ Tìm GTNN của $P = 4(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}) - 9(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}).$

51. Cho $a, b, c \in [1; 4], a \geq b, a \geq c.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{2a+3b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$

52. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{2x^2} - x;\ x \in (-\infty; 0).$

2.7. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số

Bài tập.

53. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số a) $y = \frac{2x-1}{x-1}$; b) $y = x^3 - 3x^2$; c) $y = -x^4 - x^2 + 6.$

2.8. Ứng dụng đạo hàm để giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

❖ Nếu f(x) là hàm số đồng biến hoặc là hàm hằng trên D, g(x) là hàm nghịch biến hoặc là hàm hằng trên D thì phương trình f(x) = g(x) có không quá 1 nghiệm trên D.

❖ Nếu f(x) là hàm đơn điệu trên D thì f(a) = f(b) $\Leftrightarrow a = b\ (a, b \in D).$ Nếu f(x) đồng biến trên D thì $f(a) > f(b) \Leftrightarrow a > b\ (a, b \in D).$ Nếu f(x) nghịch biến trên D thì $f(a) > f(b) \Leftrightarrow a < b\ (a, b \in D).$

❖ Nếu $a = \min\limits_{x \in D} f(x),\ A = \max\limits_{x \in D} f(x)$ thì bất phương trình $m \geq f(x)$ có nghiệm trên D khi $m \geq a,$ và bất phương trình này nghiệm đúng với mọi $x \in D$ khi $m \geq A.$

❖ Rất nhiều bài toán được giải quyết dựa vào bảng biến thiên của hàm số.

VD11. Gải phương trình

$$3\sin^{13}x-3\cos^{13}x+\sin^3 x+\sin^3(\frac{3\pi}{2}-x)+3\cos 2x+3\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=0.$$

HD.

PT $\Leftrightarrow 3\sin^{13}x+\sin^3 x-3\sin^2 x+3\sin x=3\cos^{13}x+\cos^3 x-3\cos^2 x+3\cos x$ (1).

Xét hàm số $f(t)=3t^{13}+t^3-3t^2+3t,$ có $f'(t)=39t^{12}+3t^2-6t+3=39t^{12}+3(t-1)^2>0,\forall t\in\mathbb{R},$ nên f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow f(\sin x)=f(\cos x)\Leftrightarrow \sin x=\cos x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

VD12. Tìm m để hệ sau đây có nghiệm

$$\begin{cases}\left|4x+3y+2.\sqrt{x+y}+1\right|=2\sqrt{3x^2+5xy+2y^2}+2.\sqrt{3x+2y} & (1)\\ \sqrt{x+y}+x-y\ge m^3-3m^2+3m+\frac{37}{12} & (2)\end{cases}.$$

HD. Ta đặt $\begin{cases}u=\sqrt{3x+2y}\ge 0\\ v=\sqrt{x+y}\ge 0\end{cases}$ thì hệ đã cho được viết thành

$$\begin{cases}\left|u^2+v^2+2v+1\right|=2uv+2u\\ v+2u^2-5v^2\ge m^3-3m^2+3m+\frac{37}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2+2v+1=2uv+2u \text{ (do } u,v\ge 0)\\ v+2u^2-5v^2\ge m^3-3m^2+3m+\frac{37}{12}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\ -3v^2+5v+2\ge m^3-3m^2+3m+\frac{37}{12}\end{cases}$. Ta xét hàm số $f(v)=-3v^2+5v+2$ với $v\ge 0,$ có $f'(v)=-6v^2+5,$ và có bảng biến thiên

v	0		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
f '(v)		+	0	−	
f(v)	5	↗	$\frac{49}{12}$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên và hệ cuối cùng ta thấy hệ đã cho có nghiệm khi $m^3-3m^2+3m+\frac{37}{12}\le\frac{49}{12}\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow(m-1)^3\le 0\Leftrightarrow m\le 1.$ Vậy hệ đã cho có nghiệm khi $m\le 1.$

VD13. Biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases}$.

HD. $\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{-x^4+2x^3-x}{2x^2-2x+1} \\ y=x^2+x+2m-1 \end{cases}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x^4+2x^3-x}{2x^2-2x+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$,

có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{-4x^5+10x^4-12x^3-8x^2-1}{(2x^2-2x+1)^2}=\dfrac{(2x-1)(4x^2-4x+2-2\sqrt{3})(-8x^2+8x-4-4\sqrt{3})}{(2x^2-2x+1)^2}$,

và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{2\sqrt{3}-1}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{2\sqrt{3}-1}}{2}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	0	+	0	–	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\frac{5}{8}$	↗	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$

Nhận thấy số nghiệm của hệ phương trình ban đầu bằng số nghiệm của phương trình m = f(x). Căn cứ vào bảng biến thiên trên ta có kết luận:

– Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi $m>\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

– Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm khi $m=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ hoặc $m<-\frac{5}{8}$.

– Hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm khi $m=-\frac{5}{8}$.

– Hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm khi $-\frac{5}{8}<m<\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

VD14. Giải bất phương trình

$$a)\sqrt{x+12}+\log_5^2(3+\sqrt{x})\ge 7-\sqrt[3]{x+4};\ b)x^5+4x\sqrt{2x-1}>2(2x^2+1)\sqrt{2x-1}-x.$$

HD.

a) $\sqrt{x+12}+\log_5^2(3+\sqrt{x})\ge 7-\sqrt[3]{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{x+12}+\log_5^2(3+\sqrt{x})-7+\sqrt[3]{x+4}\ge 0$ (1).

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+12}+\log_5^2(3+\sqrt{x})-7+\sqrt[3]{x+4}$ với tập xác định $D=[0;+\infty)$. Hàm số liên tục trên D và có đạo hàm là

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+12}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}+\frac{\log_5(3+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})\ln 5}>0,\forall x\in(0;+\infty),$ nên f(x) đồng biến trên D. Hơn nữa f(4) = 0 nên $(1)\Leftrightarrow f(x)\ge f(4)\Leftrightarrow x\ge 4.$ Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 4$.

b) $x^5+4x\sqrt{2x-1}>2(2x^2+1)\sqrt{2x-1}-x\Leftrightarrow x^5+x>(\sqrt{2x-1})^5+\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow f(x)>f(\sqrt{2x-1})$

(với hàm f(x) = x^5 + x đồng biến trên $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x>\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\ x\ne 1\end{cases}$. Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left[\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

VD15. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases}2^x-2^y=(y-x)(xy+2)\\ x^2+y^2=2\end{cases}$; b) $\begin{cases}\sqrt{x+y+1}+1=4(x+y)^2+\sqrt{3(x+y)}\\ 2x-y=\frac{3}{2}\end{cases}$;

c) $\begin{cases}\tan x-\tan y=(1+\sqrt{x+y})^y-(1+\sqrt{x+y})^x\\ 3^{\sqrt{1-x}}+5^{\sqrt{1-y}}=2(1+\sqrt{9-10x+y})\end{cases}$.

HD. a) Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}2^x-2^y=(y-x)(xy+x^2+y^2)\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x+x^3=2^y+y^3 & (1)\\ x^2+y^2=2 & (2)\end{cases}$. Xét hàm $f(x)=2^x+x^3$ có đạo hàm $f(x)=2^x\ln 2+3x^2>0,\forall x\in\mathbb{R},$ nên f(x) đồng biến trên $\mathbb{R}$. Như vậy $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\ \Leftrightarrow x=y,$ thế vào (2) ta được x^2 = 1. Do đó x = y = ±1. Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm (1; 1), (–1; –1).

b) Đặt t = x + y thì phương trình đầu tiên của hệ phương trình đã cho trở thành $\sqrt{t+1}+1=4t^2+\sqrt{3t}\Leftrightarrow 4t^2+\sqrt{3t}-\sqrt{t+1}-1=0$ (3). Xét hàm $f(t)=4t^2+\sqrt{3t}-\sqrt{t+1}-1$ liên tục trên $[0;+\infty)$, có $f'(t)=8t+\frac{\sqrt{9t+9}-\sqrt{3t}}{2\sqrt{3t^2+3t}}>0,\forall t\in(0;+\infty),$ nên f(t) đồng biến trên $[0;+\infty)$. Lại có $f(\frac{1}{2})=0$ nên $(3)\Leftrightarrow f(t)=f(\frac{1}{2})\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Rightarrow x+y=\frac{1}{2}$. Suy ra hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases}x+y=\frac{1}{2}\\ 2x-y=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=-\frac{1}{6}\end{cases}$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(\frac{2}{3};-\frac{1}{6})$.

Nhận xét. Cũng có thể rút $y = 2x - \frac{3}{2}$ từ phương trình thứ hai rồi thế vào phương trình thứ nhất của hệ, sau đó xét hàm số $f(x) = 72x^2 - 72x + 16 + 3\sqrt{4x-2} - \sqrt{12x-2}$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, y \ne \frac{\pi}{2} + m\pi;\ k, m \in \mathbb{Z} \\ x + y \ge 0, x \le 1, y \le 1, 9 - 10x + y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \ge 0, x \le 1, y \le 1 \\ 9 - 10x + y \ge 0 \end{cases}$ (*). Từ điều kiện này, dễ thấy nếu $x < -1$ thì x + y < 0 (mâu thuẫn), do đó $x \ge -1$, tương tự $y \ge -1$. Vậy ta có $x, y \in [-1;1] \subset (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Hàm số $f(t) = \tan t$ có $f'(t) = 1 + \tan t > 0$ nên f(t) đồng biến trên từng khoảng xác định. Suy ra f(t) đồng biến trên đoạn $[-1;1]$. Ta cũng lưu ý thêm rằng $1 + \sqrt{x+y} \ge 1$. Như vậy:

- Với $-1 \le x < y \le 1$ và thoả mãn điều kiện (*) thì $\tan x - \tan y < 0$, còn $(1+\sqrt{x+y})^y - (1+\sqrt{x+y})^x \ge 0$ nên phương trình đầu của hệ đã cho không nghiệm đúng.
- Với $-1 \le y < x \le 1$ và thoả mãn điều kiện (*) thì $\tan x - \tan y > 0$, còn $(1+\sqrt{x+y})^y - (1+\sqrt{x+y})^x \le 0$ nên phương trình đầu của hệ đã cho không nghiệm đúng.
- Với $x = y \in [-1;1]$ và thoả mãn điều kiện (*) thì phương trình đầu của hệ đã cho nghiệm đúng. Vậy phương trình đầu của hệ đã cho tương đương với x = y.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$\begin{cases} x = y \in [0;1] \\ 3^{\sqrt{1-x}} + 5^{\sqrt{1-x}} = 2(1 + \sqrt{9-9x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \in [0;1] \\ 3^{\sqrt{1-x}} + 5^{\sqrt{1-x}} = 2 + 6\sqrt{1-x}\ (1) \end{cases}$. Ta đặt $t = \sqrt{1-x}$ thì $0 \le t \le 1$ và phương trình (1) trở thành $3^t + 5^t = 6t + 2$ (2). Xét hàm $g(t) = 3^t + 5^t - 6t - 2$ trên đoạn [0; 1], có $g'(t) = 3^t \ln 3 + 5^t \ln 5 - 6$, $g''(t) = 3^t \ln^2 3 + 5^t \ln^2 5 > 0$. Suy ra hàm $g'(t)$ đồng biến trên [0;1]. Lại có $g'(0) = \ln 3 + \ln 5 - 6 < 0$, $g'(1) = 3\ln 3 + 5\ln 5 - 6 > 0$, $g'(t)$ liên tục, nên tồn tại duy nhất $t_0 \in (0;1)$ sao cho $g'(t_0) = 0$. Hơn nữa $g'(t) < 0, \forall t \in (0; t_0)$; $g'(t) > 0, \forall t \in (t_0; 1)$. Lập bảng biến thiên ta suy ra được $g(t) \le 0, \forall t \in [0;1]$, dấu "=" chỉ xảy ra khi t = 0 hoặc t = 1. Do đo (2) có nghiệm t = 0, t = 1. Tức là (1) có nghiệm x = 0, x = 1. Thử lại thấy các cặp giá trị x = y = 0, x = y = 1 thoả mãn hệ phương trình đã cho. Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: (0; 0), (1; 1).

Bài tập.

54. Tìm m để cả hai hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{1+x} + \sqrt{4-y} = m \\ \sqrt{1+y} + \sqrt{4-x} = m \end{cases}$, $\begin{cases} \sqrt{2+x} + \sqrt{3-y} = m \\ \sqrt{2+y} + \sqrt{3-x} = m \end{cases}$ cùng có nghiệm.

55. Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

a) $\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy+1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (\sqrt{3x+4} - \sqrt{5-x}).2^y = 2(\frac{19}{x} - 3x + 8) \\ y + \log_2 x = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2009^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+2010}{y^2+2010} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 1 + 2\log_2(x+y+2) \end{cases}$; d) $\begin{cases} e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\ e^y = x + \sqrt{x^2+1} \end{cases}$; e) $\begin{cases} x + \sqrt{x^2-2x+2} = 1 + 3^{y-1} \\ y + \sqrt{y^2-2y+2} = 1 + 3^{x-1} \end{cases}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^2-2x+3}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} - x^2 + 3x - 2 = 0$; g) $\log_{2012}(\dfrac{x^4+x^2+2x+5}{x^4+2x^2+4x+2}) = x^2 + 2x - 3$;

h) $\sin^{11} x - \cos^{2011} x = \cos^{11} x - \sin^{2011} x$; i) $\log_3(x+1) \ge \log_2 x$; j) $e^{\sqrt{x}} - x \le 3\sqrt{x} + 2 - e^{2\sqrt{x}}$;

k) $(5x-6)^2 - \dfrac{1}{\sqrt{5x-7}} = x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; l) $2^x + 3^x + 4^x = 6x + 3$; m) $e^x - e^{-x} 2.\ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

n) $\tan x - \tan\sqrt{1-x^2} = 1 - x\sqrt{2}$; o) $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$.

56. Tìm m để phương trình, bất phương trình, hệ phương trình có nghiệm

a) $(x^3+3x^2+1) \le m(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^{2011}$; b) $\log(x^3 + x^2 - 2m) = \log(1-2x)$; c) $\left|x^3\right| - 2x\left|x-1\right| = m$;

d) $2^{x+2\sqrt{1+x}} - 2^{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+m} = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + m - x$; e) $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$;

f) $\sqrt{x^2+mx+2} = 2x+1$; g) $m(1+\sqrt{5})^x + (m+2)(\sqrt{5}-1)^x = (2m+1)2^x$; h) $6\sin x - 4\sin^3 x + m = 0$;

i) $\begin{cases} 3x^2y - 2y^2 - m = 0 \\ 3y^2x - 2x^2 - m = 0 \end{cases}$; j) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4,\ x \ge 9 \\ \sqrt{x+7} + \sqrt{y+7} \le m \end{cases}$; k) $\begin{cases} x + y = 3,\ x \ge 2 \\ \sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+5} = m \end{cases}$; l) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = m \end{cases}$;

m) $\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+1} = m$; n) $\sin x + \sqrt{1-\sin 2x} = m - \cos x$.

57. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, phương trình $x^{2n+1} + 2011x + 2012 = 0$ luôn có nghiệm duy nhất.

58. a) Tìm m để bất phương trình $\left|x(4x^2+m)\right| \le 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0;1]$.

b) Tìm m để bất phương trình $4^{\log_5(5x)} - 6^{\log_5 x} \le m.3^{\log_5(25x^2)}$ nghiệm đúng với mọi x > 1.

59. Chứng minh với $m \ne 0$ phương trình $x^4 - (m^2+10)x^2 + 9 = 0$ luôn có 4 nghiệm phân biệt, trong đó có 2 nghiệm thuộc khoảng (-3; 3), 2 nghiệm còn lại nằm ngoài đoạn [-3; 3].

60. a) Chứng minh phương trình $\sqrt{x} - \sqrt[5]{x+1} = 0$ có nghiệm duy nhất.

b) Chứng minh phương trình $(x+1)^x = x^{x+1}$ có nghiệm dương duy nhất.

c) Tìm nghiệm dương của phương trình

$$x\ln(1+\frac{1}{x})^{1+\frac{1}{x}} - x^3\ln(1+\frac{1}{x^2})^{1+\frac{1}{x^2}} 1 - x.$$

PHẦN BA ---

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Tác giả cho rằng, việc khai thác tốt các kiến thức về đạo hàm để giải toán THPT là một yêu cầu quan trọng về cả kiến thức lẫn kĩ năng đối với các học sinh ôn thi Đại học và các học sinh trong đội tuyển thi Học sinh giỏi các cấp. Giáo viên khi dạy cũng nên chú ý tới việc hình thành thói quen phân tích bài toán, thói quen đặt ra đòi hỏi phải giải quyết bài toán theo nhiều hướng khác nhau, ... nhằm phát triển tư duy cho học sinh.

Liên quan tới đề tài này, hiện nay có rất nhiều tài liệu tham khảo, tuy không phải tài liệu nào cũng trọn vẹn mọi bề, nhưng có nhiều tài liệu đã tỏ ra rất hữu ích và rất đáng quan tâm. Vì vậy tác giả kiến nghị Nhà trường tạo điều kiện cho thư viện của trường mua bổ sung một số tài liệu này (có liệt kê trong mục Tài liệu tham khảo) để phục vụ cho việc dạy và học môn Toán trong trường, đực biệt là phân môn Giải tích.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[01] **Bộ Giáo dục và Đào tạo**, *Sách Giáo khoa, Sách Giáo viên, Sách bài tập, Tài liệu hướng dẫn thực hiện chuẩn kiến thức – kĩ năng Toán 10, 11, 12,* Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011.

[02] **Phan Đức Chính** (chủ biên), *Các bài giảng luyện thi môn Toán, tập ba,* Nhà xuất bản Giáo dục, 2001.

[03] **Nguyễn Thuỷ Thanh**, *Phương pháp giải các dạng toán cơ bản THPT, tập hai: Giải tích,* Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011.

[04] *Các đề thi Tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng, thi Học sinh giỏi các năm.*

[05] *Tạp chí Toán học và tuổi trẻ,* Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.