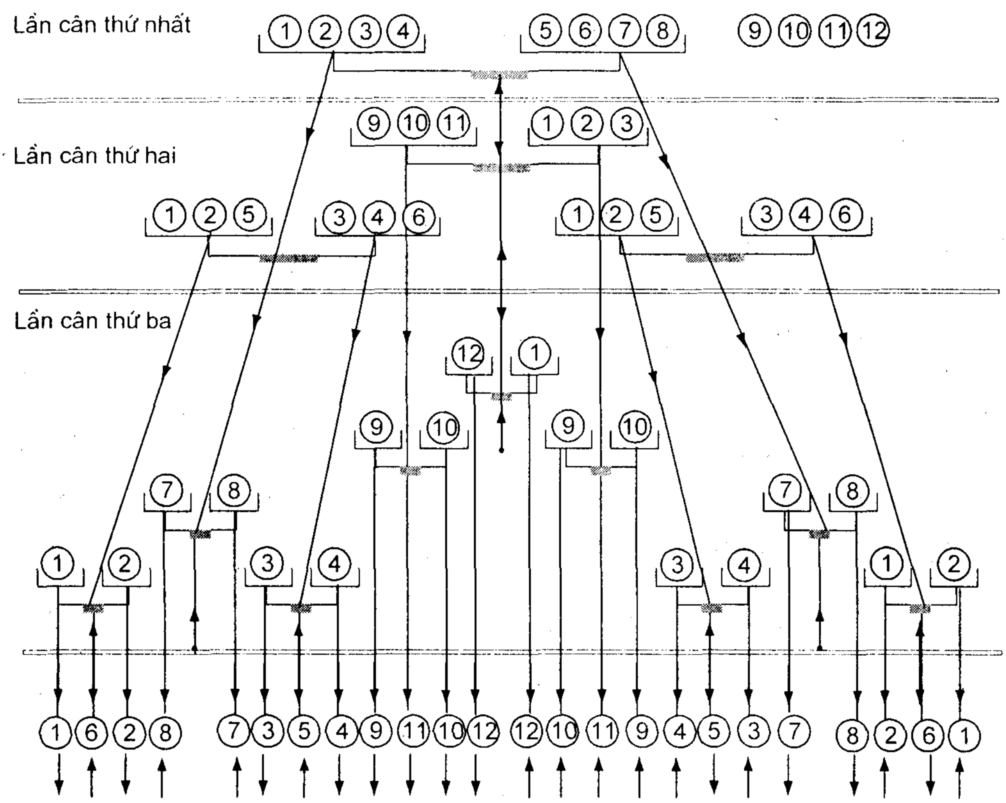
VỀ BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐỒNG XU GIẢ

Bài toán tổng quát

Giả sử có m đồng xu ($m \geq 3$) trông hoàn toàn giống nhau. Tất cả chúng có trọng lượng như nhau, ngoại trừ một đồng xu giả, nó chỉ khác với đồng xu thật về trọng lượng, nhưng không cho biết trước, nó nặng hay nhẹ hơn đồng xu thật. Bài toán đặt ra là : Với một chiếc cân đĩa không có quả cân : hỏi tối thiểu cần thực hiện bao nhiêu lần cân để xác định được đồng xu giả và phân loại nó nặng hay nhẹ hơn đồng xu thật?

Có lẽ, nhiều bạn đã giải bài toán này với số đồng xu m = 12. Hình 1.1 minh họa một trong số các lời giải. Ở đây mũi tên xuất phát từ đĩa cân phải chỉ rằng đĩa cân bên phải nặng hơn bên trái. Mũi tên xuất phát từ đĩa cân trái – là đĩa cân trái nặng hơn, còn mũi tên giữa là cân thăng bằng.



Hình 1.1

Kí hiệu ①↓ chỉ rằng đồng xu số 1 là giả và nặng hơn đồng xu thật. ①↑ nghĩa là đồng xu 1 giả và nhẹ hơn. Trong trường hợp này, sau ba lần cân là xác định được đồng xu giả. *Ta để ý rằng :* Việc chọn những đồng xu nào đặt lên đĩa cân phải hay trái *phụ thuộc vào kết quả của lần cân trước đó.*

Bài toán đồng xu giả đã lôi cuốn sự chú ý của nhiều nhà toán học (nhất là ở Anh, Mĩ). Đến năm 1945 tạp chí toán học của Anh "The Mathematical Gazette" đã đăng lời giải của tác giả P.L Gudstein, sau này ông trở thành một chuyên gia có tên tuổi trong lĩnh vực lôgic toán. Theo phương pháp Gudstein với n ($n > 3$) lần cân có thể tìm và xác định đồng xu giả (nặng hay nhẹ hơn đồng xu thật) có lẫn trong số m đồng xu, trong đó :

$$m \leq \frac{1}{2}(3^n - 2n + 3). \qquad (*)$$

(Để ý rằng nếu $n = 3$ thì $m \leq 12$).

Bài toán vẫn được tiếp tục nghiên cứu và một số người (độc lập với nhau) đã chỉ ra rằng : Với n lần cân hoàn toàn có thể xác định được đồng xu giả với số đồng xu :

$m < \frac{1}{2}(3^n - 3)$ (**) nhiều hơn so với phương pháp Gudstein (*).

(Vì với $n > 3$ thì $\frac{1}{2}(3^n - 3) > \frac{1}{2}(3^n - 2n + 3)$).

Vào năm 1946 cũng chính "The Mathematical Gazette" đã công bố một danh sách dài những người có thành tích (với mức độ khác nhau) trong việc giải bài toán tìm đồng xu giả và đăng lời giải được xem là hay nhất của Daison (sau này trở thành nhà vật lí lí thuyết).

Daison đã sử dụng hệ đếm cơ số 3 để đánh số các đồng xu tạo nên sự ưu việt đặc biệt của phương pháp này là : Việc chọn các đồng xu để cân được tiến hành theo một *quy tắc xác định* và *không phụ thuộc vào kết quả* các lần cân trước đó. Tuy vậy, rất tiếc là phương pháp Daison đã bị lãng quên vào những năm sau đó, trong lúc một số lời giải khác vẫn tiếp tục được công bố.

Sau đây ta sẽ xét cụ thể phương pháp Daison gồm hai bước tuỳ thuộc vào số đồng xu m.

Bước 1 : Trường hợp với $m = \frac{1}{2}(3^n - 3)$;

Bước 2 : Trường hợp với $m < \frac{1}{2}(3^n - 3)$.

Daison chứng tỏ rằng trong cả hai trường hợp, với n lần cân, hoàn toàn đủ để xác định đồng xu giả.

Bước 1

Giả sử số đồng xu $m = \frac{1}{2}(3^n - 3)$.

Xét các số gồm n chữ số cơ số 3 :

000...0, 000...1, ..., 222...2. Tất cả gồm 3n số nếu loại trừ 3 số gồm toàn các chữ số giống nhau là 000...0, 111...1 và 222...2 thì còn lại đúng $3^n - 3$ số và ta sẽ dùng các số này để gắn nhãn cho các đồng xu. Ta ghép các nhãn thành từng cặp sao cho tổng hai số của mỗi cặp đều bằng 222...2 (ví dụ với n = 4 thì hai số : 1012 và 1210 tạo thành một cặp).

Ta phân các nhãn thành hai loại : nhãn phải và nhãn trái với quy ước nhãn phải là nhãn có hai chữ số khác nhau đầu tiên tính từ trái là 01, 12, 20. Trường hợp ngược lại là nhãn trái. Dễ thấy, mỗi cặp nhãn nêu trên gồm một nhãn phải và một nhãn trái.

Ta đánh số các đồng xu từ 1 đến m và gắn cho mỗi đồng xu một cặp nhãn (vì $m = \frac{1}{2}(3^n - 3)$, tổng số nhãn là $(3^n - 3)$ hay $\frac{1}{2}(3^n - 3)$ cặp nhãn, nên vừa vặn để gắn một đồng xu một cặp nhãn).

Ví dụ, trường hợp m = 12, n = 3 có thể gắn nhãn như sau :

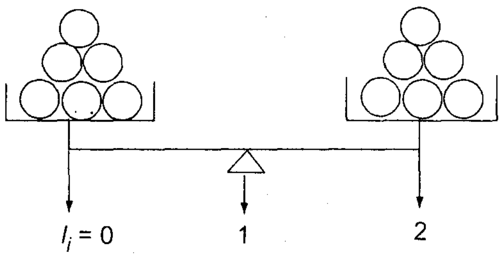
Số TT đồng xu	***Nhãn trái***	***Nhãn phải***
1	211	011
2	100	122
3	022	200
4	212	010
5	101	121
6	020	202
7	210	012
8	102	120
9	021	201
10	221	001
11	110	112
12	002	220

Ta kí hiệu M(i, 0), M(i, 1), M(i, 2) là tập hợp các đồng xu, sao cho *nhãn phải* của chúng có hàng thứ i tương ứng bằng 0, 1, 2 (ví dụ m = 12 như trong bảng thì M(1, 1) = (122, 121, 120, 112) = (2, 5, 8, 11)).

Rõ ràng số đồng xu trong mỗi tập hợp trên đều bằng nhau và chúng không có phần tử chung.

Quy tắc tiến hành cân kiểm tra

Để thực hiện lần cân thứ i, ta cho tất cả các đồng xu của tập M(i, 0) lên đĩa cân trái, các đồng xu của tập M(i, 2) lên đĩa cân phải và ghi kết của lần cân thứ i : $l_i = 0$ nếu cân lệch trái (đĩa cân trái nặng hơn), $l_i = 2$ nếu cân lệch phải và $l_i = 1$ nếu cân thăng bằng (h.1.2). Kí hiệu l_i là kết quả của lần cân thứ i, dễ thấy rằng các số $l_1, l_2, ..., l_n$ không thể cùng bằng 0, cùng bằng 1 hay cùng bằng 2, vì vậy số $l = l_1l_2...l_n$ là nhãn của một đồng xu nào đó.



Hình 1.2

Ta chứng minh rằng : l là nhãn của đồng xu giả F cần tìm ; hơn nữa nếu l là nhãn phải thì F nặng hơn đồng xu thật, nếu l là nhãn trái thì F nhẹ hơn.

Thật vậy, với lần cân thứ i, có hai khả năng xảy ra : hoặc cân thăng bằng, hoặc lệch về một bên. Ta xét hai khả năng này :

1. Nếu cân thăng bằng thì đồng xu giả F ∈ (M(i, 1), tức là nhãn phải của nó có hàng thứ i bằng 1, mặt khác vì cân thăng bằng nên kết quả phép thử l_i = 1 mà l_i là hàng thứ i của nhãn l, vậy l_i đúng là hàng thứ i của nhãn của đồng xu giả F.

2. Giả sử cân lệch phải, khi đó kết quả của phép cân $l_i = 2$ và đồng xu giả F có trong số M(i, 0) hoặc M(i, 2).

   Nếu F∈M(i, 0) thì F nhẹ hơn, vì F∈M(i, 0) ⇒ hàng thứ i của nhãn phải bằng 0. Do đó hàng thứ i nhãn trái bằng 2 trùng với kết quả $l_i = 2$.

   Trường hợp cân lệch trái cũng lí luận tương tự.

Tóm lại : $l = l_1 l_2 \ldots l_n$ đúng là nhãn của đồng xu giả F, nếu nó là nhãn phải thì F nặng hơn, nếu là nhãn trái thì F nhẹ hơn.

Thực ra khi gặp hai chữ số khác nhau của l ta đã xác định được đồng xu giả nặng hay nhẹ hơn rồi !

Trong ví dụ n = 3, m = 12, nếu đánh số các đồng xu như trong bảng, phương pháp Daison chỉ rõ cần tiến hành ba lần cân với các đồng xu sau :

1) (1, 4, 7, 10) và (3, 6, 9, 12) ;

2) (3, 6, 9, 10) và (2, 5, 8, 12) ;

3) (3, 4, 8, 12) và (2, 6, 7, 11).

Bước 2

Giả sử số đồng xu $m < \frac{1}{2}(3^n - 3)$.

Trong trường hợp này sẽ không dùng hết $3^n - 3$ nhãn để gắn cho các đồng xu. Vì vậy nếu không cẩn thận có thể số đồng xu của tập M(i, 0) và M(i, 2) không bằng nhau. Nhưng có thể khắc phục điều này bằng cách chia số đồng xu theo nhóm, mỗi nhóm 3 đồng xu và chia số nhãn thành các nhóm, mỗi nhóm có 6 nhãn sao cho các nhãn phải trong mỗi nhóm có được bằng cách luân phiên thay các chữ số 0 → 1, 1 → 2, 2 → 0. Như thế, sẽ có 3 nhãn phải cùng với 3 nhãn trái tương ứng lập thành 3 cặp nhãn của 1 nhóm.

Ví dụ : 0120 → 1201 → 2012 là 3 nhãn phải của 1 nhóm (n = 4).

Nhóm đặc biệt có các nhãn phải là 000...01, 111...12, 222...20 ta dành cho mục đích riêng.

Sau khi phân các đồng xu thành từng nhóm ba đồng xu và gắn cho chúng ba cặp nhãn trong cùng một nhóm nhãn, cuối cùng nếu thừa một đồng xu thì gắn cho nó nhãn phải 111...12, còn nếu thừa hai đồng xu thì gắn các nhãn phải 000...01, 222...20 (cùng với các nhãn trái tương ứng). Với cách gắn nhãn và đánh số các đồng xu như trên việc *thực hiện n – 1 lần cân vẫn theo quy tắc* giống như ở bước 1, riêng lần cân thứ n phải làm thế nào, bạn thử nghĩ xem?

Bây giờ ta chứng tỏ phương pháp Daison là "tối ưu" theo nghĩa trong trường hợp tổng quát, khả năng tồi nhất nếu *dùng n lần cân vẫn đảm bảo đủ* để xác định đồng xu giả thì số đồng xu m phải không vượt quá $\frac{1}{2}(3^n - 3)$.

Ta nói khả năng tồi nhất vì có trường hợp "gặp may" chỉ cần hai lần cân cũng có thể tìm được đồng xu giả dù số đồng xu rất lớn (chẳng hạn với 1002 đồng xu, lần đầu ta cân 1000 đồng xu mỗi bên 500 xu và cân thăng bằng, lần thứ hai lấy một trong số hai đồng xu còn lại và một đồng xu trong số 1000 đồng xu đã cân và cân lệch một phía).

Chứng minh

Thật vậy giả sử với n lần cân là hoàn toàn đủ để xác định đồng xu giả. Ta chứng minh rằng số đồng xu m không vượt quá $\frac{1}{2}(3^n - 3)$.

Đánh số các đồng xu từ 1 đến m. Cắt sẵn 2m mẩu giấy con và lần lượt ghi lên từng mẩu giấy nội dung : đồng xu số 1 nhẹ hơn, đồng xu số 1 nặng hơn, ..., đồng xu số m nhẹ hơn, đồng xu số m nặng hơn. Như vậy ta đã sử dụng hết 2m mẩu giấy và không một khả năng nào (đối với các đồng xu) bị bỏ qua.

Kết quả của mỗi lần cân vẫn được quy ước ghi như trong bước 1 bằng các số 0, 1, 2.

Tuỳ theo kết quả của mỗi lần cân sẽ phân các đồng xu làm hai phần : một phần chắc chắn không chứa đồng xu giả, phần khác chứa nó gọi là "tập hợp các đồng xu nghi vấn". Ta ghi kết quả của lần cân thứ nhất lên tất cả các mẩu giấy thuộc tập "nghi vấn".

Như vậy trên mỗi mẩu giấy đều có ghi một trong các số : 0, 1, 2 và trường hợp tồi nhất tập nghi vấn chứa không dưới $\frac{2m}{3}$ mẩu giấy. Tương tự sau lần cân thứ hai, số mẩu giấy nghi vấn có thể không dưới $\frac{2m}{9}$... và sau n lần cân tập nghi vấn có thể chứa không dưới $\frac{2m}{3^n}$ mẩu giấy. Do đó nếu $\frac{2m}{3^n} > 1$ thì n lần cân không đủ để xác định đồng xu giả. Bởi vậy, bắt buộc $\frac{2m}{3^n} \le 1$ hay là $2m \le 3^n$. Nhưng ta cần chứng minh $m \le \frac{3^n - 3}{2}$ tức $2m \le 3^n - 3$, cho nên cần phải xét các trường hợp :

$$2m = 3^n - 2,\ 2m = 3^n - 1,\ 2m = 3^n.$$

Vì $3^n - 2$ và 3^n là các số lẻ $\Rightarrow 2m = 3^n - 2$, $2m = 3^n$ không xảy ra. Vậy nên chỉ cần xét trường hợp $2m = 3^n - 1$ là đủ.

Ta xét cụ thể lần cân thứ nhất, rõ ràng số mẩu giấy có ghi số 0 đúng bằng số mẩu giấy có ghi số 2.

Giả sử có p mẩu giấy ghi số 0 thì cũng có p mẩu giấy ghi số 2. Khi đó, số mẩu giấy có ghi số 1 là $2m - 2p$. Ngoài ra, nếu mỗi đĩa cân phải và trái đều có k đồng xu thì $p = 2k$.

Vậy p là số chẵn. Nếu $p > 3^{n-1}$ hoặc $2m - 2p > 3^{n-1}$ thì $n - 1$ lần cân (tiếp theo sau lần cân thứ nhất) có thể không đủ để xác định đồng xu giả. Do đó, ta có :

$$p = 2k \leq 3^{n-1},\ 2m - 2p \leq 3^{n-1}.$$

Vì p, $2m - 2p$ là các số chẵn, 3^{n-1} là số lẻ $\Rightarrow p \leq 3^{n-1} - 1,\ 2m - 2p \leq 3^{n-1} - 1$

$$\Rightarrow 2m = (2m - 2p) + 2p \leq 3^n - 3.$$

BÀI TẬP

Áp dụng phương pháp Daison có thể giải một số bài toán sau :

1. Giả sử có hai túi : túi thứ nhất có m_1 đồng xu, túi thứ 2 có m_2 đồng xu. Biết trong số đó có 1 đồng xu giả và nếu đồng xu giả nằm trong túi thứ nhất thì nó nhẹ hơn, trong túi thứ hai thì nặng hơn. Hỏi tối thiểu cần bao nhiêu lần cân để xác định đồng xu giả?

2. Cũng điều kiện như bài 1, nếu có thêm 1 túi thứ ba gồm m_3 đồng xu thật, không chứa đồng xu giả nào, thì cần bao nhiêu lần cân?

3. Giả sử có một đồng xu giả lẫn trong số m đồng xu không cho biết nó nặng hay nhẹ hơn, ngoài ra còn có thêm một đồng xu thật nữa. Nếu $m = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ với n lần cân có thể xác định được đồng xu giả hay không?

Nếu $m \neq \frac{1}{2}(3^n - 1)$ thì cần bao nhiêu lần cân?

4. Giả sử có m đồng xu. Biết rằng trong số đó có không quá 1 đồng xu giả. Cần bao nhiêu lần cân để xác định đồng xu giả hoặc chứng tỏ tất cả m đồng xu đều thật?

5. Trong trường hợp $2m < 3^n - 3$, nói chung lần cân cuối phụ thuộc vào kết quả của các lần cân trước đó. Hãy tìm cách làm giảm thiểu số lần cân trước có ảnh hưởng đến lần cân cuối.

TỔNG QUÁT HOÁ BÀI TOÁN ĐỒNG XU GIẢ

Bài toán cổ điển

Giả sử có N túi đựng một số lượng lớn các đồng xu. Trong số đó có một túi đựng toàn đồng xu giả. Các túi khác đựng toàn xu thật. Số đồng xu thật ở mỗi túi là bằng nhau. Cho biết trọng lượng của đồng xu thật và biết nó nặng hơn đồng xu giả 1 gam. Hãy tìm túi đựng xu giả bằng một lần cân (dùng loại cân có quả cân).

Đây là một bài toán lí thú và rất phổ biến, có thể tìm thấy trong nhiều cuốn sách toán học đại chúng. Người ta còn đồn rằng, trong thế chiến thứ II người Anh đã rải truyền đơn với nội dung bài toán cổ điển này để gây rối loạn trong binh lính phát xít Đức.

Lời giải

Đánh số các túi từ 1 đến N ; lấy ra từ mỗi túi một số đồng xu bằng số thứ tự của túi đó, rồi đem cân tất cả số đồng xu được lấy ra. Nếu kết quả thiếu hụt mất i gam so với trường hợp giả thiết là tất cả các đồng xu được cân đều là thật, khi đó túi thứ i đựng toàn xu giả.

Nhận xét

Bài toán nêu trên vẫn giải được (bằng cách khác) nếu không cho biết trọng lượng đồng xu thật và chỉ được phép dùng loại cân không có quả cân ! Bạn thử nghĩ xem !

Từ bài toán cổ điển trên, người ta đã phức tạp hoá nó để được *bài toán về một số túi đựng xu giả* sau, với điều kiện và yêu cầu cũng gần giống như bài toán cổ điển, chỉ khác là số túi chứa đồng xu giả nhiều hơn 1, nhưng không cho biết cụ thể là bao nhiêu!

Tiếp tục phức tạp hoá bài toàn này sẽ được *bài toán về các đồng xu nặng và nhẹ* như sau :

Trong số N túi đựng xu có một số túi đựng toàn xu giả loại nhẹ (biết rằng mỗi đồng xu loại này nhẹ hơn đồng xu thật 1 gam) và một số túi đựng toàn xu giả loại nặng (biết rằng nó nặng hơn đồng xu thật 1 gam). Số lượng túi đựng xu giả loại nhẹ và loại nặng không cho biết trước chỉ cho biết trọng lượng mỗi đồng xu thật. Bằng một lần cân (dùng cân có quả cân) hãy xác định những túi nào chứa từng loại xu thật, xu nặng, xu nhẹ?

Cuối cùng có thể khái quát và đi đến bài toán tổng quát sau :

Giả sử có N túi đựng một số lượng lớn đồng xu. Có nhiều loại đồng xu, chúng chỉ khác nhau về trọng lượng. Mỗi túi chỉ đựng một loại đồng xu. Số lượng túi đựng xu mỗi loại là tuỳ ý và không cho biết trước. Biết trọng lượng một đồng xu từng loại và biết chúng hơn kém nhau một số nguyên gam.

Được phép dùng loại cân với các quả cân và bằng một lần cân hãy xác định mỗi túi đồng xu thuộc loại nào?

Lời khuyên

Trước khi tìm hiểu lời giải bài toán tổng quát, các bạn thử tự giải các bài toán nêu ra trước đó.

Lời giải

Đánh số lần lượt các túi từ 0 đến N – 1 ; kí hiệu trọng lượng của một đồng xu loại nhẹ nhất là m (gam). Giả sử túi số j đựng các đồng xu với trọng lượng mỗi đồng xu là m + Δ_j (gam). Như vậy chính Δ_j sẽ xác định loại xu nào đựng trong túi số j.

Giả sử Δ_j có thể nhận các giá trị 0, 1, 2, ..., k – 1 ; như vậy có nhiều nhất là k loại đồng xu khác nhau. Lấy từ túi số j k^j đồng xu tức là lấy ở túi số 0 một đồng xu, ở túi số 1 k đồng xu, ..., cuối cùng ở túi số (N –1), k^{N-1} đồng xu. Số lượng các đồng xu được lấy ra để cân là

$$M = \sum_{j=0}^{N-1} k^j = 1 + k + \ldots + k^{N-1} = (k^{N-1} - 1) : (k - 1)$$

Tổng trọng lượng của chúng mà ta cân được theo chỉ số trên cân là :

$$S = \sum_{j=0}^{N-1} (m + \Delta_j)k^j = m\sum_{j=0}^{N-1} k^j + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta_j k^j = m.M + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta_j k^j . \qquad (*)$$

Vì $\Delta_j \le k - 1$ nên tổng thứ hai ở vế phải đẳng thức (*) :

$$\Delta = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta_j k^j = \Delta_0 + \Delta_1 k + \Delta_2 k^2 + \ldots + \Delta_{N-1} k^{N-1}$$

chính là biểu thức chuyển đổi số Δ từ hệ đếm thập phân sang hệ đếm cơ số k và có thể viết :

$$\Delta_{(10)} = \Delta_{N-1}\Delta_{N-2} \ldots \Delta_2\Delta_1\Delta_{0(k)}. \qquad (**)$$

Ta thấy mỗi chữ số của số Δ trong hệ đếm cơ số k là gia số xác định loại đồng xu theo thứ tự ngược lại với thứ tự đánh số các túi. Đây *chính là điểm mấu chốt* thực chất của cách giải được được trình bày!

Cuối cùng ta có thể tóm tắt *quy tắc xác định các túi đựng xu* :

– Chọn M đồng xu để cân.

– Tiến hành cân để biết S.

– Đổi số $\Delta = S - m.N$ từ số thập phân sang hệ đếm cơ số k để tìm

$$\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{N-1}.$$

Ví dụ minh hoạ

Giả sử số túi N = 5, có k loại đồng xu khác nhau, k = 3, đồng xu loại nhẹ nhất có trọng lượng m = 10 (gam), ta lập bảng để ghi dữ liệu và kết quả tìm được :

Dòng đầu tiên để đánh số thứ tự các túi.

Dòng thứ hai là số lượng các đồng xu lấy từ các túi để cân, nó bằng 3^j.

Dòng thứ ba ghi gia số xác định loại đồng xu Δ_j.

Dòng thứ tư là trọng lượng của một xu có trong túi số j.

Ta có $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121 \Rightarrow M.m = 121 \times 10 = 1210$ (g)

Giả sử cân 121 đồng xu lấy ra được S = 1351 (g)

Khi đó $\Delta = S - Mm = 1351 - 1210 = 141$ (g)

Đổi số 141 sang hệ đếm cơ số 3 được :

$$\Delta = 1.3^4 + 2.3^3 + 0.3^2 + 2.3^1 + 0.3^0$$

$\Leftrightarrow \Delta = 12020_{(3)} \Rightarrow \Delta_0 = 0, \Delta_1 = 2, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 2, \Delta_4 = 0$

và ta có bảng sau :

Đánh số túi	4	3	2	1	0
Số xu lấy để cân k^j	81	27	9	3	1
Gia số Δ_j	1	2	0	2	0
Trọng lượng đồng xu mỗi loại	11	12	10	12	10

Nhận xét

– Trường hợp k = 3 trong ví dụ minh hoạ có thể giải theo cách khác. Bạn tìm hiểu xem!

– Nếu k = 10 thì hiển nhiên không cần thực hiện bước đổi cơ số.

Chú ý

– Trong bài toán tổng quát có điều kiện : "Cho biết trọng lượng một đồng xu từng loại", liệu có thể thay đổi điều kiện này hay không?

– Bài toán cổ điển về đồng xu giả được ứng dụng trong lí thuyết mã hoá thông tin, dùng để phát hiện sai sót các cod mã.