

QUAN HỆ TRUY HỒI TRONG BÀI TOÁN ĐẾM

Nguyễn Thế Hiệp¹

Bài toán đếm trong tổ hợp là một bài toán khá thông dụng đặc biệt với học sinh chuyên toán. Việc đếm trực tiếp trong đa số các trường hợp là "bất khả thi", điều này hướng chúng ta tới một phương thức đếm khác: đếm gián tiếp. Cùng với phương pháp thiết lập song ánh hay sử dụng hàm Sinh, vận dụng số phức thì phương pháp thiết lập truy hồi cũng là một phương pháp khá hữu dụng và áp dụng rộng rãi, phổ biến đối với nhiều bài toán. Trong bài viết này chúng ta sẽ đề cập đến vấn đề đó.

1 Thiết lập quan hệ đơn truy hồi-một dãy truy hồi

Chúng ta sẽ mở đầu bằng một ví dụ đơn giản và khá quen thuộc từ bậc THCS. Đó là bài toán tháp cổ Hà Nội:

Ví dụ 1.1 (Bài toán tháp cổ Hà Nội). Lúc khai thiên lập địa, Phật tổ Như Lai đặt 64 chiếc đĩa có kích thước khác nhau lên một cái cọc, đĩa ở trên bé hơn đĩa ở dưới. Các nhà sư được yêu cầu chuyển đĩa từ cọc 1 sang cọc 2 theo nguyên tắc: Mỗi lần chỉ chuyển một đĩa; trong quá trình chuyển, đĩa lớn không được đặt lên trên đĩa nhỏ (cần sử dụng thêm một cọc nữa để thực hiện nguyên tắc này). tìm số lần chuyển đĩa để có thể chuyển tất cả đĩa ở cọc 1 sang cọc 2 ?

LỜI GIẢI. Gọi là a_n số lần chuyển n chiếc đĩa từ cọc 1 sang cọc số 2 theo các nguyên tắc trên. Để chuyển n chiếc đĩa từ cọc 1 sang cọc 2 ta phải thực hiện các công đoạn sau:

1. Chuyển $n - 1$ chiếc đĩa bên trên chiếc đĩa lớn nhất sang cọc số 3 sang nguyên tắc trên. Cần thực hiện a_{n-1} lần chuyển như vậy.
2. Chuyển chiếc đĩa lớn nhất sang cọc số 2
3. Chuyển $n - 1$ chiếc đĩa từ cọc số 3 sang cọc số 2. Cần thực hiện a_{n-1} lần chuyển.

Như vậy ta thu được hệ thức $a_n = 2a_{n-1} + 1$

Với chú ý rằng $a_1 = 1$ ta có $a_n = 2^n - 1$. Như vậy $a_{64} = 2^{64} - 1$. □

Ví dụ 1.2 (Bài toán chia kẹo Euler). Có bao nhiêu cách chia m cái kẹo cho n đứa trẻ ?

LỜI GIẢI. Bài toán tương đương với bài toán sau: tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình: $m = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Tương đương với phương trình: $m - x_1 = x_2 + \dots + x_n$

Gọi $S(m, n)$ là số nghiệm của phương trình (1). Khi đó với mỗi giá trị của x_1 ; ($0 \leq x_1 \leq m$) ta có số nghiệm của phương trình (2) là $S(m - x_1, n - 1)$.

Từ đó ta thu được hệ thức: $S(m, n) = \sum_{x=0}^m S(m - x, n - 1)$. Chú ý rằng:

$$S(m, 1) = 1; S(m, 2) = m + 1; S(m, 3) = \frac{(m+2)(m+1)}{2}$$

Bằng quy nạp ta có: $S(m, n) = C_{m+n-1}^{n-1}$.

Thật vậy: giả sử mệnh đề đúng với n , chứng minh nó đúng với $n + 1$:

¹Học sinh lớp Toán - K20, trường THPT chuyên Bắc Giang - mail: thehiep_kimsoeun@yahoo.com

$$\begin{aligned}
S(m, n+1) &= \sum_{x=0}^m S(m-x, n) = \sum_{x=0}^m C_{m-x+n-1}^{m-1} \\
&= \sum_{x=0}^m C_{x+n-1}^{n-1} = \sum_{x=0}^m (C_{x+n}^n - C_{x-1+n}^n) = C_{m+n}^n
\end{aligned}$$

□

Nhận xét 1. Đây là một bài toán khá đơn giản nhưng cũng có nhiều ứng dụng chẳng hạn trong bài thi VMO 2012 (bài số 6, ngày 2). Ngoài lời giải trên, ta cũng có thể giải này bằng phương pháp song ánh hoặc hàm Sinh.

Ví dụ 1.3 (Mở rộng Pro.3-Canada MO 1996). Tìm số hoán vị $a_1, a_2, \dots, a_n$ của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ |a_{i+1} - a_i| \leq 2 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

LỜI GIẢI.

□

Gọi x_n là số các hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn bài toán và A_n là tập hợp các hoán vị đó. Ta có: với $n \geq 5$ xét hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn tính chất đã cho.

Vì $|a_2 - a_1| = |a_2 - 1| < 2$ nên $a_2 = 2 \vee 3$ do đó chỉ xảy ra các trường hợp sau:

1. Nếu $a_2 = 2$ thì xét $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \equiv (a_2 - 1, \dots, a_n - 1)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ là một hoán vị của $\{1, 2, \dots, n-1\}$ mà $b_1 = 1, |b_{i-1} - b_i| = |a_i - a_{i+1}| \leq 2, i = 1, 2, \dots, n-1$.
Suy ra $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \in A_{n-1}$.
Hơn nữa, $(a_1, 2, a_3, \dots, a_n) \in A_n$ và phép tương ứng $(a_1, 2, a_3, \dots, a_n) \rightarrow (a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1)$ là một song ánh nên có x_{n-1} hoán vị mà $a_2 = 2$.

2. Nếu $a_2 = 3$ ta có các khả năng sau:

- Nếu $a_i = 2$ với mọi $3 < i < n$ thì $a_{i-1} = a_{i+1} = 4$, vô lí. Ta xét $a_3 = 2 \vee a_n = 2$
- Nếu $a_n = 2$ thì $a_{n-1} = 4; a_3 = 5$, có một bộ số thỏa mãn là

$$\left(1, 3, \dots, 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1, 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2, \dots, 2\right)$$

- Nếu $a_3 = 2$ thì $a_4 = 4$, mỗi bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tương ứng với một bộ số $(a_4 - 3, a_5 - 3, \dots, a_n - 3) \in A_{n-3}$. Vậy nên có x_{n-3} hoán vị như thế.

Ta có hệ thức: $x_n = x_{n-1} + x_{n-3} + 1, n \geq 5$. Chú rằng $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 4$, từ đây có thể tìm được số bộ thỏa mãn theo n .

Ví dụ 1.4 (Swedish MO 2005-2006). Một hàng gồm n người đứng trước một máy thu tiền. Sau đó máy thu tiền đóng lại vì một lí do kĩ thuật và n người đó được bố trí lại trong một hàng khác. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng mà nếu mỗi người trong hàng hoặc đứng nguyên vị trí ban đầu hoặc đứng ở vị trí liền trước hoặc đứng ở vị trí liền sau.

LỜI GIẢI. Gọi a_n là số hoán vị f của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa mãn tính chất: $k-1 \leq f(k) \leq k+1$ với $1 \leq k \leq n$, khi đó ta có $f(n) \in \{n-1, n\}$.
Với $n \geq 3$ nếu f có tính chất đó thì ta có:

1. Nếu $f(n) = n - 1$, thì $f(n - 1) = n$ các số $1, 2, \dots, n - 2$ có a_{n-2} hoán vị thỏa mãn tính chất nêu trên.
2. Nếu $f(n) = n$, các số $1, 2, 3, \dots, n - 1$ có a_{n-1} hoán vị thỏa mãn tính chất đó.

Ta có hệ thức sau: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Chú ý rằng $a_1 = 1, a_2 = 2$ ta được $a_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$.

Trường hợp $n = 12$ là bài toán gốc. □

Ví dụ 1.5 (Romanian MO 1995). Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các điểm nằm trên đường tròn. tìm số cách tô các điểm đó bằng $p \geq 2$ màu sao cho hai điểm liên tiếp được tô hai màu phân biệt.

LỜI GIẢI. Gọi $a_n, n \geq 2$ là số cách tô màu cần tìm. Xét tập hợp điểm: $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$.

1. Nếu A_1, A_n khác màu nhau thì có thể tô màu $A_1, A_2, \dots, A_n$ bởi a_n cách và tô màu A_{n+1} theo $p - 2$ cách. Do đó chúng ta thu được $(p - 2) a_n$ cách tô màu.
2. Nếu A_1, A_n được tô màu giống nhau thì đồng nhất $A_1 \equiv A_n$ ta thu được a_{n-2} cách tô màu các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$, trong khi có $(p - 1)$ cách tô màu A_{n+1} . Ta thu được $(p - 1) a_{n-2}$ cách tô màu.

Do đó ta có hệ thức: $a_{n+1} = (p - 2) a_n + (p - 1) a_{n-1}$ Chú ý rằng $a_2 = p(p - 1); a_3 = p(p - 1)(p - 2)$, ta được: $a_n = (p - 1)^n + (-1)^n (p - 1)$. □

Ví dụ 1.6 (Bulgarian MO 1998). Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Hãy tìm số các hoán vị $a_1, a_2, \dots, a_n$ của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số thỏa mãn $a_i > a_{i+1}$.

LỜI GIẢI. Gọi x_n là số các hoán vị thỏa mãn điều kiện bài toán. Mỗi hoán vị có $n + 1$ phần tử có thể tạo ra bằng một trong hai cách sau đây:

1. Bổ sung thêm $a_{n+1} = n + 1$ vào mỗi hoán vị có n phần tử thỏa mãn điều kiện bài toán, có tất cả x_n hoán vị như vậy.
2. Bổ sung thêm phần tử $a_j = n + 1$ vào giữa a_i, a_{i+1} mà $a_i > a_{i+1}$ của một hoán vị nào đó có n phần tử thỏa mãn bài toán.
3. Bổ sung thêm $a_j = n + 1, j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ vào hoán vị mà n phần tử được sắp thứ tự.

Do vậy thu được: $x_{n+1} = x_n + x_n + n = 2x_n + n$ Chú ý rằng $x_2 = 1$, từ đó ta có: $x_n = 2^n - n - 1$ □

Ví dụ 1.7. Có bao nhiêu số có n chữ số chia hết cho 5 và hai chữ số liên tiếp bất kì khác nhau.

LỜI GIẢI. Gọi A_n là tập hợp các số có n chữ số thỏa mãn bài toán. Đặt $a_n = \text{card}(A_n)$, mỗi số thuộc A_{n+1} được tạo ra bằng một trong hai cách sau đây:

1. Thêm vào trước mỗi số thuộc A_n một chữ số khác với chữ số đầu tiên của số đó, có tất cả 8 cách thêm như vậy.
2. Bỏ chữ số đầu tiên của của một số thuộc A_n (sau khi bỏ như thế chỉ còn a_{n-2} số phân biệt có $n-2$ chữ số là bội của 5 và các chữ số liên tiếp là khác nhau) và thêm vào trước đó hai chữ số 10, 20, 30, ..., 90; có tất cả 9 cách thêm như thế.

Do đó ta có hệ thức sau: $a_{n+2} = 8a_{n+1} + 9a_n$

Với chú ý rằng: $a_1 = 2, a_2 = 17$ ta thu được: $a_n = \frac{19}{90} \cdot 9^n - \frac{(-1)^n}{10}$ $\square$

Ví dụ 1.8. *Tìm số tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho trong mỗi tập con chứa đúng hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.*

LỜI GIẢI. Trước hết ta có bài toán phụ sau: tìm số tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho trong mỗi tập con không chứa hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.

Bài toán này xem như bài tập (giải bằng truy hồi hoặc song ánh). Số tập con thỏa mãn bài toán là:

$$x_n = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right)$$

Gọi A_n là tập hợp các tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán, đặt $a_n = \text{card}(A_n)$. Mỗi tập thuộc $A \in A_{n+2}$ được chia thành 3 loại: Loại 1 gồm các tập hợp chứa cả 2 phần tử: $n+1, n+2$, loại 2 gồm các tập hợp không chứa $n+2$, loại 3 gồm các tập hợp chứa $n+2$ nhưng không chứa $n+1$.

1. Nếu A là tập con loại 1 thì A không chứa n . Bỏ đi khỏi A hai phần tử $n+1, n+2$ ta được một tập con của tập $\{1, 2, \dots, n-1\}$ và không chứa hai số nguyên liên tiếp. Như vậy có $x_{n-1} = F_{n+1}$ tập con loại 1.
2. Mỗi tập con loại 2 là một tập con của A_{n+1} và ngược lại. Có a_{n+1} tập loại 2.
3. Nếu A là tập con loại 3 thì A không chứa $n+1$. Bỏ đi khỏi A phần tử $n+2$ ta được một tập con của A_n . Vậy có a_n tập con loại 3.

Do đó ta có hệ thức sau: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + F_{n+1}$

Chú ý rằng $a_2 = 1; a_3 = 2$ ta thu được: $a_n = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}$. $\square$

Ví dụ 1.9 (Colombia MO 1997). *Xét bảng ô vuông $m \times n$ được tô các viền bởi 3 màu. Chúng ta tô mỗi đoạn của đường viền bởi một trong số 3 màu sao cho mỗi hình vuông đơn vị có hai cạnh tô 1 màu và hai cạnh kia tô bởi hai màu còn lại. Có bao nhiêu cách tô màu có thể?*

LỜI GIẢI. Gọi 3 màu là A, B, C; đặt a_n là số cách tô màu đường viền của một bảng ngang $1 \times n$ khi đã biết màu của các đoạn viền phía trên bảng ngang đó. Với $n = 1$, không mất tính tổng quát giả sử viền trên được tô màu A. Sau đó sẽ có 3 cách chọn tô màu 3 đoạn kia bằng màu A, có hai cách chọn tô màu hai đoạn còn lại. Do vậy $a_1 = 6$.

Xét bảng $1 \times n$, không mất tính tổng quát giả sử đoạn cuối cùng bên phải tô màu A. Bổ sung thêm một hình vuông đơn vị vào bên phải bảng vừa rồi ta được một bảng $1 \times (n+1)$ với màu đoạn viền trên của hình vuông mới đã biết. Chúng ta có hai cách tô màu cho hình vuông đã biết màu hai cạnh này (cạnh bên trái và cạnh trên). Do đó $a_{n+1} = 2a_n, a_n = 3 \cdot 2^n$

Trở lại bài toán, có 3^n cách tô màu cho đường viền trên cùng và có $3 \cdot 2^n$ cách tô cho mỗi hàng kế tiếp. Vậy có tất cả $3^{m+n} \cdot 2^{mn}$ cách tô màu thỏa mãn bài toán. $\square$

Ví dụ 1.10 (Hungary-Israel Mathematical Competition 1997). *Có tất cả bao nhiêu dãy có độ dài bằng 1997 có thể lập được bằng cách sử dụng số lẻ lần các chữ cái A, B, C.*

LỜI GIẢI. Gọi x_n là số dãy có độ dài bằng $n = 2m + 1$. Với mỗi dãy có độ dài bằng $n = 2m + 1$ ta có:

1. Nếu dãy đó thỏa mãn điều kiện thì ta có 3 cách thêm hai chữ cái giống nhau vào cuối mỗi dãy để thu được các dãy có độ dài bằng $n + 2$.
2. Nếu dãy đó không phải là dãy thỏa mãn điều kiện bài toán, tuy nhiên số lần xuất hiện của A,B,C không thể đều là số chẵn nên sẽ có hai chữ cái xuất hiện số chẵn lần và một chữ cái xuất hiện số lẻ lần trong mỗi dãy này. Thành thử ta có hai cách thêm hai chữ cái vào cuối các dãy này để được dãy có độ dài bằng $n + 2$

Vì vậy: $x_{n+2} = 3x_n + 2(3^n - x_n) = x_n + 2 \cdot 3^n$, kết hợp với $x_3 = 6$ ta có $x_n = \frac{3}{4}(3^{n-1} - 1)$ hay:
 $x_{2m+1} = \frac{3}{4}(3^{2m} - 1)$, suy ra $x_{1997} = \frac{3}{4}(3^{1996} - 1)$. $\square$

Ý tưởng truy hồi đối với nhiều bài toán là rất rõ ràng, song thực hiện nó đôi khi không hề dễ dàng, chẳng hạn với bài IMO Shortlist 2008:

Ví dụ 1.11 (IMO Shortlist 2008). Với mỗi số nguyên dương n , hãy tìm số hoán vị của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ có tính chất: $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) : k$ với mọi số $k = 1, 2, \dots, n$.

LỜI GIẢI. Với mỗi số nguyên dương n đặt F_n là số hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn tính chất đã cho; ta gọi chúng là hoán vị đẹp.

Với $n = 1, 2, 3$ ta có số hoán vị đẹp là: $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 6$.

Với $n > 3$ xét hoán vị đẹp bất kì $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của $\{1, 2, \dots, n\}$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} n-1 &| 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \\ &= 2((1 + 2 + \dots + n) - a_n) \\ &= n(n+1) - 2a_n = (n+2)(n-1) + (2 - 2a_n). \end{aligned}$$

nên $(2a_n - 2) : n - 1$. Vì vậy $(2a_n - 2) = 0, n - 1, 2n - 2$. Điều đó đồng nghĩa với: $a = 1 \vee a = \frac{n+1}{2} \vee a = n$ Giả sử $a = \frac{n+1}{2}$, vì là một hoán vị đẹp nên khi cho $k = n - 2$ ta có:

$$n-1 | 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) = (n+1)n - (n+1) - 2a_{n-1} = (n+2)(n-2) + (3 - 2a_{n-1}).$$

Do đó $2a_{n-1} - 3 : n - 2$ nên $2a_{n-1} - 3 = 0, n - 2, 2n - 4$. . Loại trường hợp $2a_{n-1} - 3$ bằng 0, $2n - 4$ vì $2a_{n-1} - 3$ là số lẻ. Khả năng còn lại $2a_{n-1} - 3 = n - 2$ không thể xảy ra vì khi đó: $a_{n-1} = \frac{n+1}{2} = a_n$. Điều đó có nghĩa là $\frac{n+1}{2}$ không là giá trị mà a_{n-1} có thể nhận. Xét hai trường hợp sau:

1. Nếu $a_n = n$ thì $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ là một hoán vị đẹp của $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Có F_{n-1} hoán vị như thế. Bổ sung n vào cuối của mỗi hoán vị này ta được một hoán vị đẹp của tập $\{1, 2, \dots, n\}$.
2. Nếu $a_n = 1$ thì là $(a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_{n-1} - 1)$ một hoán vị đẹp của $\{1, 2, \dots, n-1\}$ vì $2((a_1 - 1) + \dots + (a_k - 1)) = 2(a_1 + \dots + a_k) - 2k : k, \forall k \leq n-1$. Mỗi hoán vị $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ trong số hoán vị đẹp của $\{1, 2, \dots, n-1\}$ cho ta một hoán vị đẹp của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ có phần tử cuối là 1: $(b_1 + 1, b_2 + 1, \dots, b_{n-1} + 1, 1)$.

Hai phép tương ứng song ánh mà chúng ta đã thiết lập ở trên cho chúng ta hệ thức: $F_n = 2F_{n-1}$. Với chú ý rằng $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 6$ ta thu được: $F_n = 3 \cdot 2^{n-2}, n \geq 3$. $\square$

Ví dụ 1.12 (IMO 2011). Giả sử n là một số nguyên dương. Cho một cái cân hai đĩa và n quả cân với trọng lượng là $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Ta muốn đặt lên cái cân một trong n quả cân, lần lượt từng quả một, theo cách để đảm bảo đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái. Ở mỗi bước ta chọn một trong các quả cân chưa được đặt lên cân, rồi đặt nó hoặc vào đĩa bên trái, hoặc vào đĩa bên phải, cho đến khi tất cả các quả cân đều đã được đặt lên cân. Xác định xem, có bao nhiêu cách khác nhau để thực hiện được mục đích đề ra.

LỜI GIẢI. Xét $n \geq 2$ ta có: Trước tiên, đĩa cân bên trái luôn phải nặng hơn đĩa cân bên phải ít nhất là 1. Vì vậy, nếu ở một bước nào đó ta đặt quả cân nặng là 1 lên một trong hai đĩa thì đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái. Do đó ta chỉ xét các quả cân: $1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$.

Nếu ta chia trọng lượng mỗi quả cân cho 2 thì đáp án không đổi nên có $f(n-1)$ cách đặt quả cân $n-1$ đó. Giờ xét quả cân 1:

1. Nếu đặt quả cân này trong lượt đặt đầu tiên thì ta chỉ có thể đặt vào đĩa bên trái.
2. Nếu đặt quả cân này trong các lượt đặt tiếp theo thì ta có thể đặt vào bên trái hay phải tùy ý. Có $2n-2$ cách đặt trong trường hợp này.

Như vậy ta thu được hệ thức sau: $f(n) = (2n-1)f(n-1)$

Với chú ý rằng $f(1) = 1$ ta có: $f(n) = (2n-1)!! = 1.3.5 \dots (2n-1)$. $\square$

Nhận xét 2. Nếu không xét riêng các khả năng của quả cân 1 như trên thì ta cũng có thể xét riêng các khả năng của quả cân 2^{n-1}

với chú ý rằng: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1 < 2^n$.

2 Thiết lập các dãy truy hồi lồng nhau

Đếm bằng hệ thức truy hồi khá hữu dụng nhưng đối với đa số bài toán thì việc đếm bằng một dãy truy hồi tỏ ra vô hiệu, ấy là khi ta phải nghĩ đến các dãy truy hồi lồng nhau (cũng giống như "DAC-Chia để trị" trong bất đẳng thức). Chúng ta sẽ bắt đầu "công cụ hữu hiệu" này bằng một ví dụ đã từng xuất hiện trong kì thi IMO năm 1979, đó là bài số 6 do Đức đề nghị.

Ví dụ 2.1 (IMO-1979). Cho A và E là hai đỉnh đối tâm của một hình bát giác đều. Một con ếch bắt đầu nhảy từ A . Tại bất cứ đỉnh nào trừ E , ếch có thể tới một trong hai đỉnh kề. Nếu ếch nhảy tới E thì nó dừng lại ở đó. Gọi a_n là số đường đi phân biệt của đúng n bước nhảy để ếch nhảy từ A đến E . Chứng minh rằng:

$$a_{2n-1} = 0; a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1} \right].$$

LỜI GIẢI. Rõ ràng $a_{2n-1} = 0$ là hiển nhiên. Gọi là số đường đi từ C tới E qua n bước nhảy. Qua hai bước nhảy đầu tiên, ếch có thể về A hoặc đến C hoặc G . Do đó $a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2} \forall n > 0$. Từ C (hoặc G), sau hai bước nhảy ếch có thể về lại C hoặc tới A , nếu $n > 2$.

Do đó ta có: $b_{2n} = 2b_{2n-2} + 2a_{2n-2} \forall n > 1$. Suy ra $a_{2n} = 4a_{2n-2} - 2a_{2n-2}$

Kết hợp với $a_2 = 0, a_4 = 2$ ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.2 (Austrian-Polish MC 1998). Cho n điểm $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ được xếp theo thứ tự đó trên một đường thẳng. Ta tô màu mỗi điểm bởi 1 trong năm màu: trắng, đen, đỏ, xanh và tím. Một cách tô màu được coi là hợp lệ nếu hai điểm liên tiếp P_i, P_{i+1} được tô màu giống nhau hoặc ít nhất một trong hai điểm được tô màu trắng. Có bao nhiêu cách tô màu hợp lệ như vậy?

LỜI GIẢI. Gọi a_n là số cách tô màu thỏa mãn bài toán mà điểm được tô màu trắng, là b_n số cách tô màu thỏa mãn bài toán mà điểm không được tô màu trắng và c_n là tổng số cách tô màu thỏa mãn bài toán.

Chúng ta thu được các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} a_n &= c_{n-1} \\ b_n &= 4a_{n-1} + b_{n-1} \\ c_n &= a_n + b_n \end{aligned}$$

Do đó ta có: $c_n = a_n + b_n = c_{n-1} + b_n = c_{n-1} + (a_{n-1} + b_{n-1}) + 3a_{n-1} = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$

Chú ý rằng $c_1 = 5, c_2 = 13$ ta thu được: $c_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{2}$. $\square$

Ví dụ 2.3. Tìm số các bộ số nguyên $(a_1, a_2, \dots, a_n), n > 1$ thỏa mãn $|a_i| \leq 1 \forall i = 1, 2, \dots, n$ và $|a_i - a_{i+1}| \leq 1 \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh. Gọi là số bộ số thỏa mãn điều kiện bài toán. Gọi A_n, B_n, C_n là tập hợp các bộ số bằng $-1, 0, 1$ tương ứng. Ta có: $|S_n| = |A_n| + |B_n| + |C_n|$

Mặt khác từ mỗi bộ số thuộc A_n hoặc B_n ta có thể bổ sung thêm phần tử $a_{n+1} = -1$ để được một bộ số thuộc A_{n+1} nên $|A_{n+1}| = |A_n| + |B_n|$.

Tương tự ta có $|C_{n+1}| = |C_n| + |B_n|; |B_{n+1}| = |A_n| + |B_n| + |C_n| = |S_n|$.

Do đó ta có: $|S_{n+1}| = |A_{n+1}| + |B_{n+1}| + |C_{n+1}| = (|A_n| + |B_n| + |C_n|) + |B_{n+1}| + |B_n| = 2|S_n| + |S_{n-1}|$

Chú ý rằng $|S_2| = 7; |S_3| = 17$ ta thu được: $|S_n| = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2}$. $\square$

Một bài toán có cùng tư tưởng như bài toán trên là:

Ví dụ 2.4 (Polish-Austrian Mathematical Competition). Xét tất cả các chuỗi kí tự gồm 3 chữ cái a, b, c . Có bao nhiêu chuỗi n kí tự thỏa mãn điều kiện sau:

1. Chuỗi kí tự phải bắt đầu và kết thúc bởi chữ a
2. Hai vị trí liên kế phải được viết bởi hai chữ cái khác nhau.

LỜI GIẢI. Xét chuỗi kí tự có độ dài bằng n bắt đầu bởi chữ a và thỏa mãn điều kiện ii). Đặt a_n, b_n, c_n lần lượt là số chuỗi kí tự tận cùng bởi a, b, c tương ứng.

Mỗi chuỗi kí tự kết thúc bởi a và có độ dài bằng $n + 1$ được tạo ra (và chỉ được tạo ra) bằng cách thêm a vào cuối các chuỗi kí tự tận cùng bởi b hoặc c và có độ dài bằng n , vì vậy ta thu được hệ thức sau: $a_{n+1} = b_n + c_n$

Tương tự ta có: $b_{n+1} = a_n + c_n, c_{n+1} = a_n + b_n$.

Vì kí hiệu b, c chỉ mang tính hình thức, chúng có vai trò bình đẳng nên ta có $c_n = b_n$

Từ đó suy ra: $a_{n+1} = 2b_n; b_{n+1} = a_n + b_n$

$\Rightarrow a_{n+2} - a_{n+1} = 2(b_{n+1} - b_n) = 2a_n$.

Ta thu được hệ thức truy hồi: $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

Với chú ý rằng $a_1 = 1, a_2 = 0$ ta có: $a_n = \frac{2}{3}(2^{n-2} + (-1)^{n-1})$. □

Ví dụ 2.5. Có bao nhiêu chuỗi gồm n kí tự được tạo ra từ tập hợp $\{a, b, c, d\}$ trong đó a, b không bao giờ đứng cạnh nhau.

LỜI GIẢI. Gọi y_n, x_n lần lượt là số các chuỗi kí tự có tận cùng là a, b, c, d (Do tính đối xứng, số chuỗi kí tự tận cùng bằng a bằng số chuỗi kí tự tận cùng bằng b và số chuỗi kí tự tận cùng bằng c bằng số chuỗi kí tự tận cùng bằng d) và S_n là số cách thành lập chuỗi n kí tự thỏa mãn bài toán.

Chúng ta thu được các hệ thức sau đây: $x_n = 2x_{n-1} + 2y_{n-1}, y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$.

Từ đó suy ra: $S_n = x_{n+1}$ và $x_{n+1} = 3x_n + 2x_{n-1}$

Với chú ý rằng $x_1 = 1, x_2 = 2$, ta thu được:

$$S_n = x_{n+1} = \left(\frac{7\sqrt{17}}{68} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right)^{n+1} + \left(-\frac{7\sqrt{17}}{68} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right)^{n+1}.$$

□

Bài toán sau đây là một bài toán đã được đăng trên tạp chí THPT năm 2011 (bài T12/410), tuy nhiên nó cũng đã xuất hiện trước đó rất lâu trong kì thi Romanian MO 2000.

Ví dụ 2.6 (Romanian MO 2000-T12/410 THPT). Với số nguyên dương n không nhỏ hơn 2, tìm số các hàm số $f : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và thỏa mãn tính chất $|f(k+1) - f(k)| \geq 3 \forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

LỜI GIẢI. Ta sử dụng nhận xét sau đây: Nếu hàm số f thỏa mãn điều kiện bài ra thì với mọi $n > 2$ cho trước ta luôn có $f(n) \neq 3$. Thật vậy, nếu $f(n) = 3$ thì suy ra $f(n-1) \leq 0$ hoặc $f(n-1) \geq 6$, điều này là vô lí.

Kí hiệu a_n, b_n, d_n, e_n là số các hàm $f : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ thỏa mãn tính chất đã cho ứng với $f(n)$ tương ứng bằng 1, 2, 4, 5.

Khi đó $a_2 = e_2 = 2$ và $b_2 = d_2 = 1$, nên với $n \geq 2$ có $a_{n+1} = d_n + e_n, b_{n+1} = e_n, e_{n+1} = a_n + b_n, d_{n+1} = a_n$

Ta cần tính tổng $S_n = a_n + b_n + d_n + e_n$.

Ta có $a_2 = e_2 = 2$ và $b_2 = d_2 = 1$.

Bằng phương pháp quy nạp, ta có $a_n = e_n, b_n = d_n$. Do vậy $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, S_n = 2a_{n+1}$.

$$\text{Suy ra: } S_n = \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n. \quad \square$$

Ví dụ 2.7 (Romanian TST 2006-Tạp chí AMM). Cho n là một số nguyên dương. Một tập $S \subset \{0, 1, \dots, 4n-1\}$ được gọi là "rời rạc" nếu với số k bất kì thỏa mãn điều kiện sau đây:

1. Tập hợp $S \cap \{4k-2, 4k-1, 4k, 4k+1, 4k+2\}$ có tối đa 2 phần tử.
2. Tập hợp $S \cap \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}$ có tối đa 1 phần tử.

Hỏi tập hợp $\{0, 1, \dots, 4n-1\}$ có chính xác bao nhiêu tập con "rời rạc"?

LỜI GIẢI. Đặt T_n là tổng số tập con "rời rạc" cần đếm, A_n là số tập con "rời rạc" bao gồm một trong hai phần tử $(4n-1, 4n-2)$ và B_n là số tập con không chứa phần tử nào trong hai phần tử đó (không có hai tập "rời rạc" có thể chứa cả 2 phần tử vì khi đó điều kiện ii) không thỏa mãn).

Ta thu được các hệ thức: $A_{n+1} = T_n + T_n + T_n + B_n = 2T_n + B_n$

Và: $B_{n+1} = T_n + T_n + T_n + B_n = 2T_n + B_n$

Suy ra: $T_{n+1} = 6T_n + 2B_n = 7T_n$

Với chú ý rằng $A_1 = B_1 = 4, T_1 = 8$ ta có: $T_n = 8 \cdot 7^{n-1}$. $\square$

Phép đếm bằng truy hồi cũng được áp dụng trong việc đếm số các sự phân hoạch của hình vẽ. Ngay sau đây chúng ta sẽ tiếp tục với một bài toán đã từng được đăng trên tạp chí *American Mathematical Monthly* do I. Tomescu đề xuất.

Ví dụ 2.8 (Tạp chí AMM). Có bao nhiêu cách chia hình chữ nhật $2n \times 3$ thành các hình chữ nhật 2×1 .

LỜI GIẢI. Gọi a_n là số cách chia hình chữ nhật $2n \times 3$ thành các hình chữ nhật 2×1 , b_n là số cách hình chữ nhật $2n \times 3$ bị khuyết một hình vuông 1×1 ở góc thành các hình chữ nhật 2×1 .

Với mỗi cách chia hình chữ nhật $2n \times 3$ mà không có hình vuông 1×1 nào bị khuyết ở góc ta có 3 cách thêm 3 hình chữ nhật để tạo thành một hình chữ nhật $2(n+1) \times 3$.

Và ta cũng có hai cách tạo hình chữ nhật $2(n+1) \times 3$ từ hai hình chữ nhật kích thước $2n \times 3$ bị khuyết hình vuông 1×1 ở góc. Do đó ta có: $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$

Tương tự ta cũng có: $b_{n+1} = a_n + b_n$.

Chú ý rằng $a_1 = 3, b_1 = 1, a_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$ ta thu được:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(\sqrt{3}+1) (2+\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}-1) (2-\sqrt{3})^n \right]$$

$\square$

Đối với bài toán đếm số cách phân hoạch hình vẽ bằng phương pháp truy hồi thì ta cũng cần chuyển nó về ngôn ngữ đại số để dễ "ăn nói" trong quá trình trình bày lời giải bài toán. Điều này được minh chứng trong bài toán 2.9:

Ví dụ 2.9 (Tukey TST 2006). Tìm số cách chia hình chữ nhật $n \times 2$ thành các hình chữ nhật có độ dài nguyên không vượt quá n . (Hai cách chia tạo bởi nhau bằng phép quay 180° được coi là hai cách chia phân biệt)

LỜI GIẢI. Xét hình chữ nhật với đỉnh $(0, 0), (0, 2), (n, 0), (n, 2)$ trong mặt phẳng Descartes. Một sự phân hoạch có thể biểu diễn bởi tập E các đoạn thẳng mà tạo thành những đường viền (khác với viền hình chữ nhật lớn) của hình chữ nhật nhỏ.

Ta gọi 1 sự phân hoạch là: Loại A nếu $[(n-1, 1), (n, 1)] \in E$ và là loại B nếu $[(n-1, 1), (n, 1)] \notin E$. Với mỗi sự phân hoạch đặt tập:

$$E' = E - \{[(k, n-1), (k, n)], [(n, j), (n, j+1)] \mid 0 \leq k \leq 2, 0 \leq j \leq 1\} \\ \cup \{[(n-1, 0), (n-1, 1)], [(n-1, 1), (n-1, 2)]\}$$

tạo thành một sự phân hoạch hình chữ nhật $2 \times (n-1)$ với đỉnh là $(0, 0), (0, 2), (n-1, 0), (n-1, 2)$

Nếu E' là tập loại A nghĩa là $[(n-1, 1), (n, 1)] \in E$, khi đó có 5 tập E tương ứng có thể bao gồm 4 tập loại A và 1 tập loại B.

Nếu E' là tập loại B nghĩa là $[(n-1, 1), (n, 1)] \notin E$, khi đó có 3 tập E tương ứng có thể bao gồm 1 tập loại A và 2 tập loại B.

Đặt $A_n = \text{card}(A), B_n = \text{card}(B), C_n = A_n + B_n$ ta có $A_n = 4A_{n-1} + B_{n-1}; B_n = A_{n-1} + 2B_{n-1}$ và $C_n = A_n + B_n = 6(A_{n-1} + B_{n-1}) - 7(A_{n-2} + B_{n-2}) = 6C_{n-1} - 7C_{n-2}$.

Với chú ý rằng $C_1 = 2, C_2 = 8$ ta thu được $C_n = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} (2 + \sqrt{3})^{n-1} + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 2)^{n-1}$. $\square$

Ví dụ 2.10 (Romanian MO 2003). Cho n là một số nguyên dương. Có bao nhiêu số có n chữ số từ tập hợp $\{2, 3, 7, 9\}$ và chia hết cho 3.

LỜI GIẢI. Gọi A_n là tập hợp các số có n chữ số lập từ tập $\{2, 3, 7, 9\}$ và chia hết cho 3, và B_n là tập hợp các số có n chữ số lập từ tập $\{2, 3, 7, 9\}$ và không chia hết cho 3. Cần tìm $a_n = \text{card}(A_n)$

Đặt $b_n = \text{card}(B_n)$. Ta thấy mỗi số thuộc A_{n+1} chỉ có thể thu được bằng hai cách sau:

- Lấy một số thuộc A_n rồi thêm 3 hoặc 9 vào phía sau (có 2 cách thêm)
- Lấy một số thuộc B_n rồi thêm 2 hoặc 7 vào phía sau nhưng chỉ có duy nhất một cách thêm với mỗi số.

Suy ra $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, tương tự ta có $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$.

Từ đó ta có $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$, với chú ý $a_1 = 2, a_2 = 6$ ta được: $a_n = \frac{4^n + 2}{3}$. $\square$

Ví dụ 2.11 (IMO Shortlist 1987). Có bao nhiêu số có n chữ số từ tập các số $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ thỏa mãn hai chữ số liên tiếp hơn kém nhau tối đa là 1 đơn vị.

LỜI GIẢI. Gọi x_n là số các số có n chữ số thỏa mãn điều kiện bài toán, và y_n, z_n, u_n, v_n lần lượt là số các số có n chữ số mà chữ số khởi đầu lần lượt là 0, 1, 2, 3, 4 (do tính đối xứng nên số các số bắt đầu bởi 0 bằng số các số bắt đầu bởi 4; số các số bắt đầu bởi 2 bằng số các số bắt đầu bởi 3).

Chúng ta thu được các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} (1) \quad y_n &= z_{n-1}; & (2) \quad z_n &= y_{n-1} + u_{n-1} \\ (3) \quad u_n &= 2z_{n-1}; & (4) \quad x_n &= 2y_n + 2z_n + u_n. \end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $z_n = z_{n-2} + 2z_{n-2} = 3z_{n-2}$, với $z_1 = 1, z_2 = 2$ ta thu được $z_{2n} = 2.3^{n-1}$ và $z_{2n+1} = 3^n$.

Vì vậy $y_{2n+1} = 2.3^{n-1}, y_{2n} = 3^n, u_{2n+1} = 4.3^{n-1}, u_{2n} = 2.3^{n-1}, x_{2n+1} = 14.3^{n-1}, x_{2n} = 8.3^{n-1}$ và $x_1 = 5$. $\square$

Ví dụ 2.12. Có bao nhiêu số có n chữ số từ tập các số $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ thỏa mãn hai chữ số liên tiếp hơn kém nhau 1 đơn vị.

LỜI GIẢI. Gọi A_n là số các số có n chữ số mà tận cùng là 0 hoặc 4; B_n là số các số có n chữ số mà tận cùng là 1 hoặc 2; C_n là số các số có n chữ số mà tận cùng là 3. Với n là số nguyên dương ta có:

- Mỗi số thuộc có thể tạo ra từ một số thuộc bằng cách xóa một số ở cuối nên: $A_{n+1} = B_n$
- Mỗi số thuộc có thể tạo ra 1 số thuộc bằng cách thêm 1 (trong trường hợp tận cùng bằng 0) hoặc thêm 3 (nếu tận cùng bằng 4) và mỗi số thuộc có thể tạo ra một số thuộc bằng cách thêm 1 hoặc 3 vào cuối. Do đó: $B_{n+1} = A_n + 2C_n$
- Mỗi số thuộc có thể tạo ra một số thuộc bằng cách xóa số 2 ở cuối, vì vậy: $C_{n+1} = B_n$

Chúng ta cần tính $S_n = A_n + B_n + C_n$. Công việc này khá đơn giản! $\square$

Ví dụ 2.13 (Romanian MO 1998). Gọi A_n là tập hợp các chữ có độ dài bằng n được thành lập từ các chữ cái a, b, c sao cho không có hai phần tử liên tiếp cùng bằng a hoặc cùng bằng b . Gọi B_n là tập hợp các chữ có độ dài bằng n , được thành lập từ các chữ a, b, c mà không có ba phần tử liên tiếp nào đôi một phân biệt. Chứng minh rằng: $\text{card}(B_n) = 3 \cdot \text{card}(A_n)$

LỜI GIẢI. Gọi X_n, Y_n, Z_n lần lượt là các tập con của có tận cùng bởi chữ a, b, c tương ứng.

Đặt $u_n = \text{card}(U_n)$. Với mỗi số nguyên n ta có các hệ thức sau đây:

$$\begin{aligned} |A_n| &= x_n + y_n + z_n \\ x_{n+1} &= y_n + z_n; \\ y_{n+1} &= x_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n + z_n = |A_n| \end{aligned}$$

Do đó: $|A_{n+2}| = x_{n+2} + y_{n+2} + z_{n+2} = 2x_{n+1} + 2y_{n+1} + 3z_{n+1} = 2|A_{n+1}| + |A_n|$ và $A_1 = 3, A_2 = 7$.

Gọi S_n là tập con của có tận cùng bởi chữ aa, bb, cc . Đặt $T_n = B_n - S_n$ thì T_n là tập hợp các số trong có tận cùng bởi ab, ac, ba, bc, ca, cb . Ta thu được các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} |B_n| &= s_n + t_n \\ |B_{n+1}| &= 3s_n + 2t_n \\ s_{n+1} &= |B_n| \end{aligned}$$

Vì vậy $|B_{n+2}| = s_{n+2} + t_{n+2} = 2|B_{n+1}| + |B_n|$ và $B_2 = 9, B_3 = 21$.

Thành thử ta có điều phải chứng minh. $\square$

Việc giải bài toán trên thực chất là đi giải hai bài toán nhỏ về phép đếm và cả hai bài toán ấy đều giải bằng cách thiết lập các dãy truy hồi lồng nhau.

Ví dụ 2.14 (Vietnam MO 2009). Cho số nguyên dương n . Kí hiệu T là tập hợp gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con S của T có tính chất: trong S không tồn tại các số a, b mà $|a - b| \in \{1, n\}$? (Tập rỗng được coi là tập có tính chất nêu trên).

LỜI GIẢI. Trước hết ta có bài toán sau: Cho 2 hàng điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ở trên và $B_1, B_2, \dots, B_n$ ở dưới. Các cặp điểm (A_i, A_{i-1}) ; (B_i, B_{i-1}) ; (A_i, B_i) được nối với nhau, ngoài ra A_n và cũng được nối với nhau. Tính số cách chọn ra một số điểm mà không có hai điểm nào được nối với nhau.

Gọi S_n là số cách chọn thỏa mãn điều kiện trên, nhưng có thể chứa cả A_i và B_i . Gọi x_n là số cách chọn thỏa mãn nhưng không chứa điểm nào trong 4 điểm A_i, A_n, B_i, B_n . Gọi y_n là số cách chọn thỏa mãn nhưng chứa đúng 1 điểm trong 4 điểm trên. Gọi z_n là số cách chia thỏa mãn nhưng chứa đúng 2 điểm A_i, A_n hoặc B_i, B_n . Gọi t_n là số cách chọn thỏa mãn nhưng chứa đúng 2 điểm A_i, B_n , hoặc B_i, A_n .

Khi đó ta có $S_n = x_n + y_n + z_n + t_n$ và số cách chọn thỏa mãn bài toán là $S_n - \frac{t_n}{2}$.

Dễ dàng lập công thức truy hồi cho S_n là : $S_0 = 1, S_1 = 3, S_{n+1} = 2S_n + S_{n-1}$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}x_n &= S_{n-2} \\y_n &= 2(S_{n-1} - S_{n-2}) \\z_n &= t_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} \\t_n &= z_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned}z_n + t_n &= S_n - S_{n-2} - 2(S_{n-1} - S_{n-2}) = 2S_{n-2} \\z_n - t_n &= -(z_{n-1} - t_{n-1}) \\t_n &= S_{n-2} + (-1)^n\end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } S_n - \frac{1}{2}t_n = \frac{2S_n - S_{n-2} + (-1)^{n-1}}{2}$$

Cuối cùng ta thu được kết quả là:

$$\frac{(5 + 4\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{n-1} + (5 - 4\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{4}$$

Trở lại bài toán nếu coi điểm A_i được gán với số $n + i$ và điểm B_i được gán với số i thì ta có kết quả của bài toán gốc. $\square$

3 Bài tập áp dụng

Để kết thúc bài viết này chúng tôi xin nêu ra một số bài toán đếm áp dụng phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi:

Bài tập 1. Xét tất cả các chuỗi gồm n kí tự từ tập hợp $\{0, 1, 2, 3\}$. Có bao nhiêu số có số chẵn các số:

1. 0
2. 0 và 1

Bài tập 2. Tìm số sâu nhị phân có độ dài bằng n và không có hai số 0 liên tiếp.

Bài tập 3 (ĐHQG Tp.HCM TST 2009). Cho số nguyên dương n . Có bao nhiêu số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc $\{3, 4, 5, 6\}$?

Bài tập 4. Chia một hình vuông làm n phần bằng nhau, ta được hình vuông nhỏ; trong mỗi hình vuông nhỏ kẻ các đường chéo. Hỏi trong hình đó có tất cả bao nhiêu hình vuông.

Bài tập 5. Cho $A = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad \forall n \geq 4$. Tìm số các tập con B của A có hiệu hai phần tử bất kì khác 1 và 3. Tập rỗng và tập có 1 phần tử được coi là các tập thỏa mãn điều kiện đó.

Bài tập 6 (St.Petersburg City MO 1995). Trên đường tròn cho 999 điểm. Có bao nhiêu cách đánh cho mỗi điểm bởi các chữ cái A, B và C sao cho trên cung nằm giữa hai điểm được viết cùng chữ cái, có số chẵn các chữ cái khác nhau từ hai chữ cái đó.

Bài tập 7 (Poland MO 1995-Thụy Sĩ 2006). Cho số nguyên dương n . tìm số tập con của tập $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ sao cho không tồn tại hai phần tử $x, y \in A$ thỏa mãn $x + y = 2n + 1$.

Bài tập 8 (IMO Longlist 1992). Cho a_n là ước số lớn nhất của n mà không chia hết cho 3. Xét dãy số $s_0 = 0, s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Đặt A_n là số các tổng s_k ($0 \leq k \leq 3^n, k \in \mathbb{N}_0$) chia hết cho 3. Chứng minh hệ thức:

$$A_n = 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bài tập 9. Tìm số số có n chữ số $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ mà $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n : 2$.

Bài tập 10. Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu dãy số $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n})$, thỏa mãn các điều kiện sau:

- 1/ $a_1 \in \{-1, 1\} \quad \forall n = 1, 2, \dots, 2n$
- 2/ $\left| \sum_{i=2k-1}^{2l} a_i \right| \geq 2, \forall l, k : 1 \leq k \leq l \leq n.$

Bài tập 11. Tìm số tập con của tập hợp n số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn: Mỗi tập có đúng 3 phần tử và tổng các phần tử chia hết cho 3.

Bài tập 12 (USA MO 1990). Cho n là một số nguyên dương. Tìm số các số nguyên dương mà trong biểu diễn hệ cơ số n của nó có các chữ số phân biệt và thỏa mãn tính chất: trừ chữ số đầu tiên bên trái, mọi chữ số đều khác các chữ số nào đó bên trái là ± 1

Bài tập 13. Cho số nguyên dương n . Đặt $S = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, với $x_i, y_i \in \{0, 1\}$. Gọi a_n, b_n lần lượt là số $2n$ -bộ $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ có S lẻ và chẵn tương ứng. Chứng minh hệ thức:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$$

Bài tập 14. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O được nối với các đỉnh của lục giác bởi các bán kính. Đếm số đường đi độ dài n xuất phát từ O và kết thúc ở O .

Bài tập 15 (IMO Shortlist-1996). Cho bảng ô vuông $n \times n$, $n > 1$. Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu các ô vuông trong mỗi hình vuông 2×2 có đúng 3 ô vuông được đánh dấu? (hai cách đánh dấu được coi là khác nhau nếu có một ô vuông nào đó mà trong cách này thì được đánh dấu còn trong cách kia thì không).

Bài tập 16. Tìm số hoán vị không có điểm cố định của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Bài tập 17 (ĐHKHTN Hà Nội TST 2010). tìm số hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1. $a_i \neq i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.
2. $a_{i+1} - a_i \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Bài tập 18. Tìm số các số nguyên dương N thỏa mãn các điều kiện:

1. N có 2012 chữ số;
2. Tất cả các chữ số của N là số lẻ;
3. Hiệu của hai số liên tiếp bất kì của N luôn bằng 2.

Bài tập 19 (Vietnam MO 1977). Trong mặt phẳng cho n đường tròn. Hai đường tròn bất kì cắt nhau tại hai điểm và không có điểm nào nằm trên 3 đường tròn. Hỏi có bao nhiêu miền mặt phẳng bị chia bởi các đường tròn nói trên.

Bài tập 20. Tìm số tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho trong mỗi tập con chứa ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.

Bài tập 21 (Bà Rịa - Vũng Tàu 2010). Cho số nguyên dương n . Có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số mà trong mỗi số, các chữ số đều lớn hơn 1 và không có hai chữ số khác nhau cùng nhỏ hơn 7 đứng liền kề nhau.

Bài tập 22 (Mở rộng Vietnam MO 2003A-Tạp chí THPT). Tìm số hoán vị $a_1, a_2, \dots, a_n$ của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa mãn: $1 \leq |a_i - i| \leq 2$; $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Bài tập 23. Tìm số tập con của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ mà hai phần tử bất kì hơn kém nhau ít nhất 3 đơn vị.

Bài tập 24 (Canadian MO 2009). Cho hình chữ nhật $3 \times n$ ô. Một quân xe xuất phát từ ô góc trên bên trái và đi đến ô góc dưới bên trái sao cho đường đi của nó tạo thành một đường gấp khúc không tự cắt. Hỏi có bao nhiêu cách đi như thế?

Bài tập 25 (Bulgarian MO 1999). Có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số mà trong biểu diễn nhị phân của chúng không có ba chữ số liên tiếp bằng nhau?

Bài tập 26. Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ vua sao cho không có con xe nào nằm trên đường chéo chính (đường chéo nối góc trên bên trái và góc dưới bên phải) và không có con nào ăn con nào?

Tài liệu

- [1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), **Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc**, NXB Giáo Dục, 2008.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), **Toán Rời rạc và một số vấn đề liên quan**, Tài liệu bồi dưỡng giáo viên hè 2007, Trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.
- [3] Titu Andreescu-Zuming Feng, **A path to combinatorics for undergraduates**, Birkhauser.
- [4] Iiri Herman-Radan Kucera-Jaromir Simsa, **Counting and Configurations**, Canadian Mathematical Society.
- [5] Titu Andreescu-Zuming Feng, **102 Combinatorial problems from the training of the USA IMO team**, Birkhauser 2002.
- [6] Titu Andreescu-Kiran S.Kedlaya-Paul Zeitz, **Mathematical Contests 1995-1996: Olympiad Problems from Around the World with Solutions**, American Mathematics Competitions 1997.
- [7] Titu Andreescu-Kiran S.Kedlaya, **Mathematical Contests 1996-1997: Olympiad Problems from Around the World with Solutions**, American Mathematics Competitions 1998.
- [8] Titu Andreescu-Kiran S.Kedlaya, **Mathematical Contests 1997-1998: Olympiad Problems from Around the World with Solutions**, American Mathematics Competitions 1999.
- [9] Titu Andreescu-Zuming Feng, **Mathematical Olympiad: Problems from Around the World 1998-1999**, Mathematical Association of America 2000.
- [10] Titu Andreescu-Răzvan Gelca, **Putnam and Beyond**, Springer.
- [11] Arthur Engel, **Problem-Solving Strategies**, Springer.
- [12] ME Kuczma- E Windischbacher, **Polish and Austrian Mathematical Olympiad 1981-1995**, An Australian Mathematics trust publication.
- [13] Trần Nam Dũng (chủ biên), **Chuyên đề toán học số 8**, Trường PTNK-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.
- [14] Le Hai Chau-Le Hai Khoi, **Selected Problems of the Vietnamese Mathematical Olympiad (1962-2009)**, World Scientific.
- [15] Dusan Djukic- Vladimir Jankovic- Ivan Matic- Nikola Petrovic, **The IMO Compendium A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004**, Springer.
- [16] Tạp chí **Toán học và tuổi trẻ - Việt Nam**, **Crux - Canada**, **AMM - USA**
- [17] Các website: Diendantoanhoc.net; Mathscope.org; Mathlink.ro; Maths.vn...
- [18] Một số tài liệu khác từ Internet.