MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP

NGUYỄN ANH DŨNG

Trong bài này chúng tôi xin giới thiệu một số dạng toán về tìm số cách chọn một nhóm phần tử từ các tập hợp đã cho, hoặc tìm số cách phân chia các phần tử của một tập hợp thành các tập hợp con.

DẠNG 1. *Chọn một nhóm phần tử từ các tập hợp*

★**Thí dụ 1.** *Tổ một có 10 người, tổ hai có 9 người. Có bao nhiêu cách chọn một nhóm gồm 8 người sao cho mỗi tổ trên có ít nhất là 2 người ?*

Lời giải. Giả sử ta chọn k người của tổ một và $8-k$ người của tổ hai. Vì mỗi tổ có ít nhất 2 người nên $2 \le k \le 6$.

• Số cách chọn k trong số 10 người của tổ một là C_{10}^{k}. Ứng với một cách chọn trên, ta có số cách chọn $8-k$ người trong 9 người của tổ hai là C_9^{8-k}. Theo quy tắc nhân, ta được số cách chọn nhóm 8 người như trên là $S_k = C_{10}^{k}.C_9^{8-k}$.

• Cho k lần lượt bằng 2, 3, .., 6 và áp dụng quy tắc cộng, ta được số cách chọn nhóm 8 người thỏa mãn bài toán là

$$S = S_2 + S_3 + \dots + S_6 = C_{10}^2 C_9^6 + C_{10}^3 C_9^5 + \dots + C_{10}^6 C_9^2 = 74088. \square$$

✪**Bài toán tổng quát 1.** *Cho tập hợp A có n phần tử, tập hợp B có m phần tử. Tính số cách chọn p phần tử từ hai tập hợp trên ($p < m + n$) và thỏa mãn một điều kiện nào đó.*

Cách giải chung

1) *Tính trực tiếp.* Giả sử ta chọn k phần tử của tập hợp A và $p-k$ phần tử của tập hợp B (trường hợp giả thiết cho nhiều tập hợp hơn, ta làm tương tự). Số cách chọn là $S_k = C_n^k.C_m^{p-k}$. Cho k thay đổi phù hợp với giả thiết của bài toán và lấy tổng của tất cả các số hạng S_k tương ứng, ta được kết quả cần tìm.

2) *Tính gián tiếp.* Số cách chọn k phần tử từ A, B một cách bất kì là C_{n+m}^{k}. Kết quả phải tìm là hiệu của C_{n+m}^{k} với tổng các số hạng S_k, tương ứng với mỗi giá trị k không thỏa mãn giả thiết của bài toán.

★**Thí dụ 2.** *Người ta sử dụng ba loại sách gồm : 8 cuốn sách về Toán, 6 cuốn sách về Lí và 5 cuốn sách về Hóa. Mỗi loại đều gồm các cuốn sách đôi một khác loại nhau. Có bao nhiêu cách chọn 7 cuốn sách trong số sách trên để làm giải thưởng sao cho mỗi loại có ít nhất một cuốn ?*

Lời giải. (Sử dụng cách tính gián tiếp).

Số cách chọn 7 trong số 19 cuốn sách một cách bất kì là C_{19}^7.

Các cách chọn không đủ cả ba loại sách là :

- Số cách chọn 7 trong số 11 cuốn sách Lí và Hóa là C_{11}^7 (không có sách Toán).
- Số cách chọn 7 trong số 13 cuốn sách Hóa và Toán là C_{13}^7 (không có sách Lí).
- Số cách chọn 7 trong số 14 cuốn sách Toán và Lí là C_{14}^7 (không có sách Hóa).
- Số cách chọn 7 trong số 8 cuốn sách Toán là C_8^7 (không có sách Lí và Hóa).

Vì mỗi cách chọn chỉ có sách Toán, tức là không có sách Lí và Hóa thuộc cả hai phép chọn : không có sách Lí và không có sách Hóa, nên số cách chọn phải tìm là

$$C_{19}^7 - C_{11}^7 - C_{13}^7 - C_{14}^7 + C_8^7 = 44918. \ \square$$

Lưu ý. Khi tính theo phương pháp gián tiếp, mỗi số hạng ứng với trường hợp không thỏa mãn bài toán được đặt sau dấu trừ. Số hạng đồng thời thuộc hai trường hợp không thỏa mãn bài toán được đặt sau dấu cộng (bạn đọc tự suy luận cho số hạng đồng thời thuộc ba trường hợp không thỏa mãn bài toán...).

DẠNG 2. *Sắp xếp thứ tự các phần tử từ các tập hợp*

★**Thí dụ 3.** *Có 5 viên bi xanh giống nhau, 4 viên bi trắng giống nhau và 3 viên bi đỏ đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách xếp số bi trên vào 12 ô theo một hàng ngang sao cho mỗi ô có một viên bi ?*

Lời giải. Nếu tất cả 12 viên bi đều khác nhau thì số hoán vị chúng tạo thành là $P_{12} = 12!$. Nhưng các hoán vị của 5 bi xanh và các hoán vị của 4 bi trắng cho cùng một cách sắp xếp đối với 12 viên bi nên số cách sắp xếp phải tìm là

$$\frac{P_{12}}{P_5.P_4} = \frac{12!}{5!4!} = 166320. \ \square$$

✪**Bài toán tổng quát 2.** *Có tất cả n vật, trong đó có m vật giống nhau trong hộp A ; k vật giống nhau trong hộp B (m + k < n) ; các vật còn lại đôi một khác nhau. Khi đó số cách sắp xếp n vật thành một hàng ngang là* $\dfrac{n!}{m!k!}$.

★**Thí dụ 4.** *Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn sao cho không có hai học sinh nữ nào cạnh nhau ? (nếu có hai cách xếp mà cách xếp này khi quay quanh tâm vòng tròn được cách xếp kia thì ta coi chỉ là một cách xếp).*

Lời giải. Giả sử đã xếp chỗ cho 5 học sinh nam. Vì 3 học sinh nữ không ngồi cạnh nhau nên họ được chọn 3 trong 5 vị trí xen kẽ giữa các học sinh nam, số cách chọn là A_5^3. Vì hai cách xếp vị trí cho 8 người với cùng một thứ tự quanh bàn tròn được coi là một nên ta có thể chọn trước vị trí cho một học sinh nam nào đó, số hoán vị của 4 học sinh nam còn lại vào các vị trí là 4!.

Theo quy tắc nhân, số khả năng phải tìm là $4!A_5^3 = 1440$ (cách). □

✪**Bài toán tổng quát 3.** *Cho tập hợp A có m phần tử, tập hợp B có k phần tử ($m \geq k$). Số cách xếp m + k phần tử trên theo vòng tròn sao cho không có 2 phần tử của B xếp cạnh nhau là* $(m-1)!A_m^k$.

DẠNG 3. *Phân chia tập hợp các phần tử thành các tập hợp con*

★**Thí dụ 5.** *Có bao nhiêu cách chia 100 đồ vật giống nhau cho 4 người sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật ?*

Lời giải. Giả sử 100 đồ vật được xếp thành một hàng ngang, giữa chúng có 99 khoảng trống. Đặt một cách bất kì 3 vạch vào 3 trong số 99 khoảng trống đó, ta được một cách chia 100 đồ vật ra thành 4 phần để lần lượt gán cho 4 người. Khi đó mỗi người được ít nhất một đồ vật và tổng số đồ vật của 4 người bằng 100, thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Vậy số cách chia là $C_{99}^3 = 156849$ (cách). □

Lưu ý. Bằng cách giải tương tự như trên, ta có thể chứng minh rằng, phương trình

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m \qquad (1)$$

có tính chất :

• Với $1 \leq n \leq m$; $m, n \in \mathbb{N}$ thì số nghiệm của phương trình (1) trong tập hợp các số nguyên dương là C_{m-1}^{n-1}.

• Với $n \geq 1$; $m, n \in \mathbb{N}$ thì số nghiệm của phương trình (1) trong tập hợp các số tự nhiên là C_{m+n-1}^{n-1}.

Hướng dẫn giải. Trong phương trình (1) đặt $y_i = x_i + 1$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ ta chuyển về phương trình $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = m + n$ với $y_i \geq 1$, rồi áp dụng kết quả nêu trên.

★**Thí dụ 6.** *Có bao nhiêu cách chia 8 đồ vật đôi một khác nhau cho ba người sao cho có một người được 2 đồ vật và hai người còn lại mỗi người được 3 đồ vật ?*

Lời giải. Giả sử có ba người là *A*, *B*, *C*.

• Với cách chọn người *A* được 2 đồ vật, ta có :

Số cách chọn 2 trong 8 đồ vật cho người *A* được 2 đồ vật là C_8^2 ; sau đó, số cách chọn 3 trong 6 đồ vật còn lại cho người *B* được 3 đồ vật là C_6^3 ; 3 đồ vật còn lại dành cho người C. Chú ý rằng đổi thứ tự người B và người C không cho cách chọn mới. Như vậy sẽ có $C_8^3.C_6^3$ cách chọn mà người A được 2 đồ vật, mỗi người B, C được 3 đồ vật.

• Lần lượt cho người B, người C được 2 đồ vật thì theo quy tắc nhân, số cách chia phải tìm là $3.C_8^2.C_6^3 = 1680$ (cách). □

Lưu ý. Khi giải bài toán trên, nhiều bạn cho đáp số sai là $C_8^2.C_6^3$ hoặc $3!C_8^2.C_6^3$.

Trường hợp thứ nhất, bạn đã coi vai trò của người được 2 đồ vật và người được 3 đồ vật như nhau(!). Trường hợp thứ hai, bạn đã coi vai trò của hai người cùng được 3 đồ vật khác nhau(!).

BÀI TẬP

1. Phương trình $x + y + z = 100$ có bao nhiêu nghiệm trong tập hợp các số tự nhiên ?

Đáp số. $C_{102}^2 = 5151$.

2. Có bao nhiêu cách chia 10 đồ vật đôi một khác nhau cho hai người, sao cho mỗi người được ít nhất 1 đồ vật ?

Đáp số. $2^{10} - 2 = 1022$.

3. Có 5 cuốn sách Toán giống nhau, 7 cuốn sách Lí giống nhau và 8 cuốn sách Hóa giống nhau, được đem làm giải thưởng cho 10 học sinh sao cho mỗi người được 2 cuốn sách khác loại. Tính số cách nhận giải thưởng của 10 học sinh trên.

Hướng dẫn. Có 2 học sinh nhận sách (Toán ; Lí), 3 học sinh nhận sách (Toán ; Hoá), 5 học sinh nhận sách (Lí ; Hoá).

Đáp số. $C_{10}^2.C_8^3.C_5^5 = 2520$.

4. Có 5 cuốn sách giáo khoa giống nhau và 3 cuốn sách tham khảo đôi một khác nhau được dem làm giải thưởng cho 8 học sinh sao cho mỗi người được 1 cuốn sách. Tính số cách nhận giải thưởng của các học sinh trên.

Đáp số. $C_8^5.3! = 336$.

5. Có bao nhiêu cách chia 6 người ra thành 3 nhóm, mỗi nhóm 2 người, trong mỗi trường hợp sau :

a) Phân biệt thứ tự các nhóm là : nhóm 1, nhóm 2, nhóm 3 ;

b) Không biệt thứ tự của các nhóm ?

Đáp số. a) $C_6^2.C_4^2.C_2^2 = 90$; b) $\dfrac{C_6^2.C_4^2.C_2^2}{3!} = 15$.

6. Có bao nhiêu cách chia 6 đồ vật đôi một khác nhau cho 3 người sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật ?

Hướng dẫn

TH1. Mỗi người được 2 đồ vật : $C_6^2.C_4^2$.

TH2. Một người được 1, một người được 2, một người được 3 đồ vật : $C_6^1.C_5^2.3!$.

TH3. Hai người mỗi người được 1, một người được 4 đồ vật : $C_6^1.C_5^1.3$.

Sử dụng quy tắc cộng, ta được 540 cách chia.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN VỀ TẠO SỐ

NGUYỄN ANH DŨNG

Trong bài này ta quy ước :

• Khi nói cho tập hợp gồm *n* chữ số, thì đó là các chữ số đôi một khác nhau thuộc tập hợp {0, 1, ..., 9} với $n \le 10$.

• Một số có *m* chữ số thì đó là số tự nhiên có *m* chữ số và chữ số đầu khác 0.

Khi giải các bài toán loại này ta thường áp dụng các mệnh đề sau đây :

Mệnh đề 1. *Giả sử ta viết các chữ số theo hàng ngang và m, n là các số nguyên dương với $m \le n$ thì*

1.1) *Số cách viết m chữ số trong n chữ số khác nhau vào m vị trí định trước bằng* A_n^m.

1.2) *Số cách viết m chữ số phân biệt đã cho vào m vị trí trong n vị trí định trước bằng* A_n^m *(ở n − m vị trí còn lại chưa xét sự thay đổi chữ số).*

1.3) *Số cách viết m chữ số giống nhau vào m vị trí trong n vị trí định trước bằng* $C_n^{n-m} = C_n^m$.

Mệnh đề 2. *Cho tập hợp gồm n chữ số, trong đó có chữ số* 0, *số các số có m chữ số khác nhau tạo thành từ chúng bằng* $(n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

Sau đây là một số dạng toán thường gặp.

DẠNG 1. *Số tạo thành chứa các chữ số định trước*

★**Thí dụ 1.** *Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau sao cho trong đó có mặt đồng thời ba chữ số* 0, 1, 2 ?

Lời giải. Gọi số tạo thành là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

Số tạo thành có 5 chữ số ở 5 vị trí : ta có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 0 ; số cách chọn 2 trong 4 vị trí còn lại cho hai chữ số 1 và 2 là A_4^2 ; số cách chọn 2 trong 7 chữ số còn lại (khác 0, 1, 2) cho 2 vị trí còn lại là A_7^2 .

Theo quy tắc nhân, ta được số các số tạo thành là $4.A_4^2.A_7^2 = 2016$. □

★**Thí dụ 2.** *Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau sao cho trong đó có mặt các chữ số 1 và 2 ?*

Lời giải. Gọi số tạo thành là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Xét các trường hợp :

Trường hợp 1. Trong số tạo thành có chữ số 0. Theo kết quả thí dụ 1, ta có

Số số là $4.A_4^2.A_7^2 = 2016$.

Trường hợp 2. Trong số tạo thành không có chữ số 0.
Số tạo thành có 5 chữ số ở 5 vị trí : số cách chọn 2 trong 5 vị trí cho hai chữ số 1 và 2 là A_5^2 ; số cách chọn 3 trong 7 chữ số còn lại (khác 0, 1, 2) cho 3 vị trí còn lại là A_7^3 .

Theo quy tắc nhân, số các số tạo thành trong trường hợp 2 là $A_5^2.A_7^3 = 4200$.

Theo quy tắc cộng, ta được số số phải tìm là $2016 + 4200 = 6216$. □

✪**Bài toán tổng quát 1.** *Cho tập hợp gồm n chữ số khác nhau $(n \le 10)$, trong n chữ số đã cho có chữ số 0. Từ chúng có thể viết được bao nhiêu số tự nhiên có m chữ số khác nhau sao cho trong đó có mặt k chữ số định trước (thuộc n chữ số trên) với $k < m \le n$?*

Cách giải. Số tạo thành gồm *m* chữ số có dạng $\overline{a_1a_2...a_m}$. Gọi tập hợp *k* chữ số định trước là *X*.

Trường hợp 1. X chứa chữ số 0

Ta có $m - 1$ cách chọn vị trí cho chữ số 0 ; số cách viết $k - 1$ chữ số khác 0 thuộc *X* vào $k - 1$ vị trí trong $m - 1$ vị trí còn lại bằng A_{m-1}^{k-1} (theo Mệnh đề 1.2) ; số cách viết $m - k$ trong số $n - k$ chữ số không thuộc *X* vào $m - k$ vị trí còn lại bằng A_{n-k}^{m-k} (theo Mệnh đề 1.1).

Theo quy tắc nhân, ta được số các số tạo thành trong trường hợp 1 bằng :

$$S = (m-1).A_{m-1}^{k-1}.A_{n-k}^{m-k}.$$

Trường hợp 2. X không chứa chữ số 0

Ta tính theo các bước :

Bước 1. Tính số các số tạo thành chứa chữ số 0.

Lần lượt có $m-1$ cách chọn vị trí cho chữ số 0 ; số cách viết k chữ số thuộc X vào k vị trí trong $m-1$ vị trí còn lại bằng A_{m-1}^{k} (theo Mệnh đề 1.2) ; số cách viết $m-k-1$ trong số $n-k-1$ chữ số khác 0 mà không thuộc X vào $m-k-1$ vị trí còn lại bằng A_{n-k-1}^{m-k-1} (theo Mệnh đề 1.1).

Theo quy tắc nhân, ta được số các số tạo thành chứa chữ số 0 bằng :

$$S_1 = (m-1).A_{m-1}^{k}.A_{n-k-1}^{m-k-1}.$$

Bước 2. Tính số các số tạo thành không chứa chữ số 0.

Số cách viết k chữ số thuộc X vào k vị trí trong m vị trí bằng A_m^k (theo Mệnh đề 1.2) ; số cách viết $m-k$ trong số $n-k-1$ chữ số khác 0 mà không thuộc X vào $m-k$ vị trí còn lại bằng A_{n-k-1}^{m-k} (theo Mệnh đề 1.1).

Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó bằng $S_2 = A_m^k.A_{n-k-1}^{m-k}$.

Bước 3. Theo quy tắc cộng, ta được số các số tạo thành trong trường hợp thứ hai bằng $S = S_1 + S_2 = (m-1).A_{m-1}^{k}.A_{n-k-1}^{m-k-1} + A_m^k.A_{n-k-1}^{m-k}$ □

DẠNG 2. *Số tạo thành chứa hai chữ số định trước không cạnh nhau*

★**Thí dụ 3.** *Cho tập hợp gồm 6 chữ số* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Từ chúng viết được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau sao cho hai chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau ?

Lời giải. Gọi số tạo thành là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

Trước hết ta tính số số tạo thành bất kì.

Số cách chọn chữ số cho a_1 là 5 ; số cách chọn 3 trong 5 chữ số còn lại cho 3 vị trí còn lại của số tạo thành là A_5^3. Theo qui tắc nhân, ta được số số là $5.A_5^3 = 300$.

Bây giờ ta tính số số tạo thành sao cho trong đó có hai chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau.

• Giả sử 1 và 2 xếp theo thứ tự 12.

Nếu $\overline{a_1a_2} = 12$: Số cách chọn 2 trong 4 chữ số còn lại cho 2 vị trí còn lại của số tạo thành là A_4^2.

Nếu $\overline{a_1a_2} \neq 12$: Số cách chọn vị trí cho 12 là 2 ($\overline{a_2a_3}$ hoặc $\overline{a_3a_4}$) ; số cách chọn chữ số cho a_1 là 3 ; số cách chọn 1 trong 3 chữ số cho vị trí còn lại của số tạo thành là $A_3^1 = 3$; ta được số số là 2.3.3 = 18.

Theo quy tắc cộng, số số tạo thành sao cho trong đó có chứa 12 là 12 + 18 = 30.

• Tương tự, số số tạo thành sao cho trong đó có chứa 21 là 30.

Vậy số số tạo thành sao cho không có hai chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau là

$$300 - 2.30 = 240. \square$$

✪Bài toán tổng quát 2. *Cho tập hợp gồm n chữ số khác nhau* $2 \leq n \leq 10$. *Từ chúng viết được bao nhiêu số tự nhiên có m (m ≤ n) chữ số khác nhau sao cho trong đó có hai chữ số định trước không đứng cạnh nhau ?*

Cách giải. Số tạo thành có dạng $\overline{a_1a_2...a_m}$ và hai chữ số định trước là x, y (thuộc n chữ số đã cho). Ta xét các trường hợp của giả thiết về chữ số x, y và chữ số 0 như sau :

Trường hợp 1. Giả thiết n chữ số đã cho chứa chữ số 0 và hai chữ số định trước x, y khác 0.

Bước 1. Tính số các số tạo thành chưa xét đến hai chữ số định trước : Có $n - 1$ cách chọn chữ số cho a_1 ; số cách chọn $m - 1$ trong $n - 1$ chữ số còn lại cho $m - 1$ vị trí còn lại là A_{n-1}^{m-1} (Mệnh đề 1.1). Do đó số các số tạo thành là

$$S_1 = (n-1)\mathrm{A}_{n-1}^{m-1}.$$

Bước 2. Tính số các số có hai chữ số x, y cạnh nhau theo thứ tự $\overline{xy}$ và $\overline{yx}$.

• Xét trường hợp x, y cạnh nhau theo thứ tự $\overline{xy}$.

Với $\overline{a_1a_2} = \overline{xy}$. Khi đó mỗi số $\overline{a_3...a_m}$ ứng với một chỉnh hợp chập $m - 2$ của $n - 2$ chữ số khác x, y. Theo Mệnh đề 1.1, số các số đó bằng $S_2 = \mathrm{A}_{n-2}^{m-2}$.

Với $\overline{a_1a_2} \neq \overline{xy}$. Lần lượt ta có $n - 3$ cách chọn chữ số cho a_1 khác 0, x, y ; $m - 2$ cách chọn vị trí cho $\overline{xy}$; số cách chọn $m - 3$ trong $n - 3$ chữ số còn lại khác a_1, x, y cho $m - 3$ vị trí còn lại là A_{n-3}^{m-3} (theo Mệnh đề 1.1). Theo quy tắc nhân, số các số đó bằng $S_3 = (n - 3).(m-2)\, A_{n-3}^{m-3}$.

Từ hai trường hợp trên, ta được số các số có chứa $\overline{xy}$ bằng $S_2 + S_3$.

• Tương tự có $S_2 + S_3$ số có chứa $\overline{yx}$.

Bước 3. Vậy số các số tạo thành trong trường hợp thứ nhất bằng

$$S = S_1 - 2.(S_2 + S_3) = (n-1)\mathrm{A}_{n-1}^{m-1} - 2\left(\mathrm{A}_{n-2}^{m-2} + (n-3)(m-2)\mathrm{A}_{n-3}^{m-3}\right).$$

Trường hợp 2. Giả thiết n chữ số đã cho chứa chữ số 0 và một trong hai chữ số định trước x, y bằng 0.

Bước 1. Tính số các số tạo thành chưa xét đến hai chữ số x, y định trước bằng

$$S_1 = (n - 1).\ A_{n-1}^{m-1}.$$

Bước 2. Tính số các số có x, y cạnh nhau dạng $\overline{x0}$ và $\overline{0x}$ thứ tự bằng

$$S_2 = (m-1).A_{n-2}^{m-2} \ ; \ S_3 = (m-2).A_{n-2}^{m-2},$$

Số các số tạo thành trong trường hợp thứ hai là $S = S_1 - (S_2 + S_3)$.

3) Giả thiết n chữ số đã cho không có chữ số 0.

Bạn đọc tự giải, được $S = A_n^m - 2(m-1).A_{n-2}^{m-2}$. □

DẠNG 3. *Số tạo thành chứa chữ số lặp lại*

★Thí dụ 4. *Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số sao cho trong đó có một chữ số xuất hiện ba lần, một chữ số khác xuất hiện hai lần và một chữ số khác với hai chữ số trên ?*

Lời giải.

• Nếu kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu, ta xét lần lượt như sau.

Có 10 cách chọn chữ số xuất hiện 3 lần và có C_6^3 cách chọn 3 trong 6 vị trí cho chữ số đó. Sau đó có 9 cách chọn chữ số (khác với chữ số trên) xuất hiện 2 lần và có C_3^2 cách chọn 2 trong 3 vị trí còn lại cho chữ số đó. Tiếp theo có 8 cách chọn chữ số cho vị trí còn lại cuối cùng. Ta được số các số đó bằng

$$S = 10.C_6^3.9.C_3^2.8 = 720.C_6^3.C_3^2.$$

• Vì vai trò của 10 chữ số 0, 1, ..., 9 như nhau nên số các số có chữ số đầu trái là 0 bằng $\frac{1}{10}S$, do đó số các số có chữ số đầu trái khác 0 thỏa mãn bài toán bằng

$$\frac{9}{10}S = 648.C_6^3.C_3^2 = 38880. \ \square$$

✪Bài toán tổng quát 3. *Cho tập hợp gồm n chữ số* $(3 \le n \le 10)$. *Từ chúng viết được bao nhiêu số có m chữ số* $(n \ge m \ge 3)$ *sao cho trong đó có một chữ số xuất hiện k lần, một chữ số khác xuất hiện q lần và một chữ số khác với hai chữ số trên với* $k + q + 1 = m$?

Cách giải. Ta xét hai bài toán nhỏ dưới đây

1) Giả thiết n chữ số đã cho có chữ số 0

Bước 1. Nếu kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu, ta thấy :

Có n cách chọn chữ số xuất hiện k lần và có C_m^k cách chọn k trong m vị trí cho chữ số đó. Sau đó có $n-1$ cách chọn chữ số xuất hiện q lần (khác với chữ số trên) và có C_{m-k}^q cách chọn q trong $m-k$ vị trí còn lại cho chữ số đó. Cuối cùng có $n-2$ cách chọn chữ số vào vị trí còn lại.

Theo quy tắc nhân, ta tính được số các số đó bằng $S = n(n-1)(n-2)C_m^k.C_{m-k}^q$.

Bước 2. Vì vai trò của n chữ số như nhau nên số các số có chữ số đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán bằng $\frac{(n-1)S}{n} = (n-1)^2(n-2)C_m^k.C_{m-k}^q$.

2) Giả thiết n chữ số đã cho không có chữ số 0

Bạn đọc tự giải được $S = n.C_m^k.(n-1).C_{m-k}^q.(n-2) = n(n-1)(n-2)C_m^k.C_{m-k}^q$. □

Ta có thể mở rộng bài toán tổng quát cho t chữ số trong đó mỗi chữ số xuất hiện lần lượt $k_1, k_2, ..., k_t$ lần $(k_1 + k_2 + ... + k_t = m)$.

DẠNG 4. *Tính số số tự nhiên chẵn*

★**Thí dụ 5.** *Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau ?*

Lời giải. Gọi số tạo thành là $\overline{a_1a_2...a_5}$.

Trường hợp 1. $a_5 = 0$: Số cách chọn 4 trong 9 chữ số còn lại cho 4 vị trí còn lại là $A_9^4 = 3024$.

Trường hợp 2. $a_5 \neq 0$: Lần lượt ta có

4 cách chọn chữ số chẵn cho a_5 ; sau đó số cách chọn chữ số cho a_1 là 8 ; tiếp theo số cách chọn 3 trong 8 chữ số còn lại cho 3 vị trí còn lại là A_8^3.

Ta được số số là $4.8.A_8^3 = 10752$.

Theo quy tắc cộng, ta được số số là $10752 + 3024 = 13776$. □

Nhận xét. Số tự nhiên lẻ gồm 5 chữ số khác nhau (ứng với $a_5 \neq 0$) là

$$4.8.A_8^3 = 10752.$$

DẠNG 5. *Tính số số tự nhiên với các chữ số chẵn, lẻ*

★**Thí dụ 6.** *Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà trong đó có đúng hai chữ số lẻ ?*

Lời giải. Số tạo thành có 5 chữ số ở 5 vị trí.

Trường hợp 1. Trong số tạo thành có chữ số 0. Lần lượt ta có

Số cách chọn vị trí cho chữ số 0 là 4 ; số cách chọn thêm 2 trong 4 chữ số chẵn là C_4^2 ; số cách chọn 2 trong 5 chữ số lẻ là C_5^2 ; với 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ chọn ra có 4! hoán vị cách xếp vào bốn vị trí còn lại của số tạo thành. Ta được số số là $4.C_4^2.C_5^2.4! = 5760$.

Trường hợp 2. Trong số tạo thành không có chữ số 0. Lần lượt ta có

Số cách chọn trong 4 chữ số chẵn khác 0 là C_4^3 ; số cách chọn 2 trong 5 chữ số lẻ là C_5^2 ; với 5 chữ số chọn ra có 5! hoán vị cách xếp vào 5 vị trí của số tạo thành. Ta được số số là $C_4^3.C_5^2.5! = 4800$.

Theo quy tắc cộng, ta được số số tạo thành là $5760 + 4800 = 10560$. □

BÀI TẬP

1. Cho tập hợp các chữ số {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Từ chúng viết được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà trong đó hai chữ số cạnh nhau khác tính chẵn lẻ ?

Hướng dẫn. Gọi số tạo thành là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

TH1. Các chữ số cho a_1, a_3, a_5 là lẻ và các chữ số cho a_2, a_4 chẵn :

Số số là $A_4^3.A_2^2 = 288$.

TH2. Các chữ số cho a_1, a_3, a_5 là chẵn và các chữ số cho a_2, a_4 là lẻ :

Số số là $3.A_3^2.A_4^2 = 216$.

Đáp số : 504 số.

2. Cho tập hợp các chữ số {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Từ chúng viết được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau mà trong đó có chữ số 2 ?

Hướng dẫn. Gọi số tạo thành là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

Trước hết ta tìm số số tạo thành một cách bất kì.

TH1. $a_4 = 0$: Số số là $A_6^3 = 120$.

TH2. $a_4 \neq 0$: Số số là $3.5.A_5^2 = 300$.

Theo quy tắc cộng, ta được số số là $120 + 300 = 420$.

Bây giờ ta tìm số số tạo thành không có chữ số 2.

TH1. $a_4 = 0$: Số số là $A_5^3 = 60$.

TH2. $a_4 \neq 0$: Số số là $2.4.A_4^2 = 96$.

Theo quy tắc cộng, ta được số số là $60 + 96 = 156$.

Đáp số. $420 - 156 = 264$.

3. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà trong đó có chữ số 1 đứng phía trước chữ số 2 ?

Hướng dẫn. Gọi số tạo thành là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Xét các trường hợp :

TH1. Trong số tạo thành có chữ số 0 : Số số là $4C_4^2.A_7^2 = 1008$.

TH2. Trong số tạo thành không có chữ số 0 : Số số là $C_5^2.A_7^3 = 2100$.

Đáp số. $1008 + 2100 = 3108$ số.

4. Cho tập hợp các chữ số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Từ chúng viết được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số mà trong đó có hai chữ số 1 và ba chữ số còn lại khác nhau và khác 1 ?

Hướng dẫn. TH1. Trong số tạo thành có chữ số 0 : Số số là $4.C_4^2.A_4^2 = 288$.

TH2. Trong số tạo thành không có chữ số 0 : Số số là $C_5^2.A_4^3 = 240$.

Đáp số. 528 số.