Geometry Mathley

Round 1-2011

Vietnamese

1 Cho hình lục giác $ABCDEF$ có tất cả các góc trong đều bằng $120°$. Gọi P, Q, R, S, T, V là trung điểm của các cạnh của hình lục giác $ABCDEF$. Chứng minh rằng

$$p(PQRSTV) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} p(ABCDEF),$$

trong đó $p(.)$ ký hiệu chu vi của đa giác.

Nguyễn Tiến Lâm
Đại học Ngoại Thương Hà Nội

2 Cho tam giác ABC nhọn, BE, CF là các đường cao. M là trung điểm của BC. N là giao của AM và EF. X là hình chiếu của N trên BC. Y, Z theo thứ tự là hình chiếu của X trên AB, AC. Chứng minh rằng N là trực tâm của tam giác AYZ.

Nguyễn Minh Hà
Đại học Sư phạm Hà Nội

3 Cho tam giác ABC nhọn tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H, đường cao AD. AO cắt BC tại E. Đường thẳng qua D song song OH lần lượt cắt AB, AC tại M, N. I là trung điểm AE. DI lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. MQ cắt NP tại T. Chứng minh rằng D, O, T thẳng hàng.

Trần Quang Hùng
Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN

4 Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ đôi một cắt nhau; mỗi đường tròn cắt hai đường tròn kia tại hai điểm phân biệt. Gọi (X_1) là đường tròn tiếp xúc ngoài với (O_1) và tiếp xúc trong với các đường tròn $(O_2), (O_3)$; tương tự xác định được các đường tròn $(X_2), (X_3)$. Gọi (Y_1) là đường tròn tiếp xúc trong với (O_1)và tiếp xúc ngoài với các đường tròn $(O_2), (O_3)$, tương tự xác định được các đường tròn $(Y_2), (Y_3)$. Gọi $(Z_1), (Z_2)$ là hai đường tròn cùng tiếp xúc trong với cả ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$. Chứng minh rằng X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, Z_1Z_2 đồng quy.

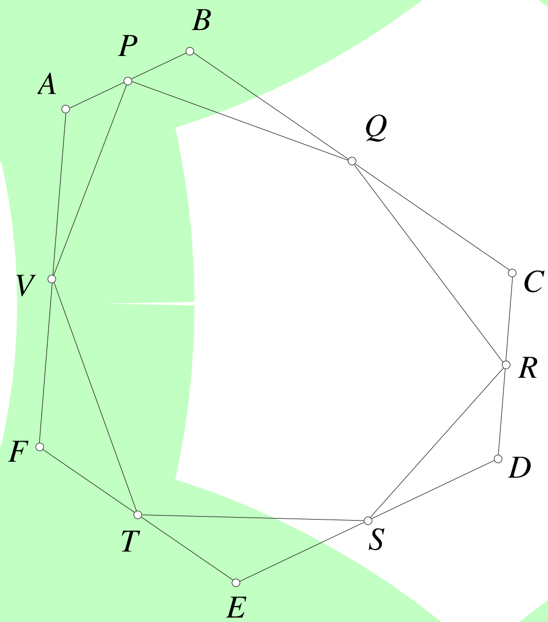
Nguyễn Văn Linh
Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN

Lời giải: Solutions

1 Cho hình lục giác $ABCDEF$ có tất cả các góc trong đều bằng $120°$. Gọi P, Q, R, S, T, V là trung điểm của các cạnh của hình lục giác $ABCDEF$. Chứng minh rằng

$$p(PQRSTV) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} p(ABCDEF),$$

trong đó $p(.)$ ký hiệu chu vi của đa giác.



Chứng minh. Giả sử P, Q, R, S, T, V theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA và gọi a, b, c, d, e, f lần lượt là độ dài các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Áp dụng định lý hàm số cosine cho tam giác PBQ với chú ý $\angle PBQ = 120°$, ta được

$$PQ^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + ab).$$

Vì $a^2 + b^2 + ab = \frac{3}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq \frac{3}{4}(a+b)^2$ nên từ đẳng thức trên ta suy ra

$$PQ \geq \frac{\sqrt{3}}{4}(a+b).$$

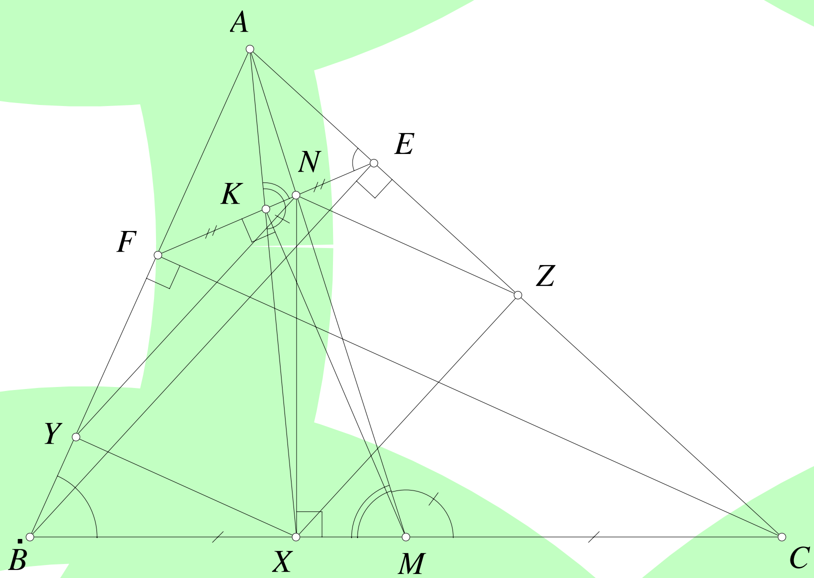
Tương tự, ta cũng có $QR \geq \frac{\sqrt{3}}{4}(b+c)$, $RS \geq \frac{\sqrt{3}}{4}(c+d)$, $ST \geq \frac{\sqrt{3}}{4}(d+e)$, $TV \geq \frac{\sqrt{3}}{4}(e+f)$, và $VP \geq \frac{\sqrt{3}}{4}(f+a)$.

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta suy được điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ABCDEF$ là lục giác đều. $\square$

Nhận xét. Tất cả các bạn tham gia đều giải đúng bài toán này, tuy nhiên một vài bạn trình bày lời giải hơi dài và đáng tiếc có một bạn tính nhầm. Mấu chốt của bài toán này là chứng minh được bất đẳng thức $PQ \geq \frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)$ và các bất đẳng thức tương tự.

Bạn **Trần Đăng Phúc**, lớp 11A1 Toán, trường THPT chuyên KHTN có lời giải khá độc đáo cho bài toán này.

2 Cho tam giác ABC nhọn , BE, CF là các đường cao . M là trung điểm của BC . N là giao điểm của AM và EF. Gọi X là hình chiếu của lên BC. Y, Z theo thứ tự là hình chiếu của X trên AB, AC .Chứng minh rằng N là trực tâm tam giác AYZ.



Chứng minh. Dễ chứng minh khẳng định bài toán đúng trong trường hợp tam giác ABC cân tại A. Xét trường hợp tam giác ABC không cân, không mất tổng quát giả sử $AB > AC$.

Gọi K là hình chiếu của M trên EF. Vì $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ nên tứ giác $BEFC$ nội tiếp đường trong đường kính BC. Vì M là trung điểm của BC và MK vuông góc với EF nên K là trung điểm của EF.

Cũng vì tứ giác $BEFC$ nội tiếp nên $\angle AEF = \angle ABC$, dẫn tới hai tam giác AEF và ABC đồng dạng. Lưu ý rằng AM, AK tương ứng là trung tuyến của các tam giác ABC, AEF nên các tam giác AKE, AMB đồng dạng. Điều này kéo theo

$$\angle AKE = \angle AMB. \tag{1}$$

Mặt khác $\angle MKN = \angle MXN = 90^\circ$ nên tứ giác $MNKX$ nội tiếp, kéo theo

$$\angle XKE = \angle AMC. \tag{2}$$

Từ (1), (2), ta suy ra

$$\angle AKE + \angle XKE = \angle AMB + \angle AMC = 180^\circ,$$

hay A, K, X thẳng hàng.

Từ đó, chú ý hai tam giác AEF, ABC đồng dạng, ta thu được $\angle XAC = \angle KAE = \angle NAF$. Điều này dẫn tới

$$\frac{NE}{NF} = \frac{XB}{XC}.$$

Mặt khác, do CF, XY cùng vuông góc với AB nên $CF||XY$. Theo định lý Thales, ta suy ra

$$\frac{XB}{XC} = \frac{YB}{YF}.$$

Vậy $\frac{NE}{NF} = \frac{YB}{YF}$, từ đó theo định lý Thales đảo, $YN||BE$. Mà BE vuông góc với AC nên YN cũng vuông góc với AC. Chứng minh tương tự ta cũng có ZN vuông góc với AB.

Vì thế, N là trực tâm của tam giác AYZ. □

Nhận xét. Đa số các bạn đều không nêu trường hợp $AB = AC$, tuy trường hợp này đơn giản. Trong trường hợp này tứ giác $MNKX$ sẽ suy biến thành đoạn thẳng. Đa số các bạn đều sử dụng tính chất của đường đối trung (đường đối xứng với trung tuyến qua phân giác cùng xuất phát từ một đỉnh) để suy ra $\frac{NE}{NF} = \frac{YB}{YF}$, cụ thể

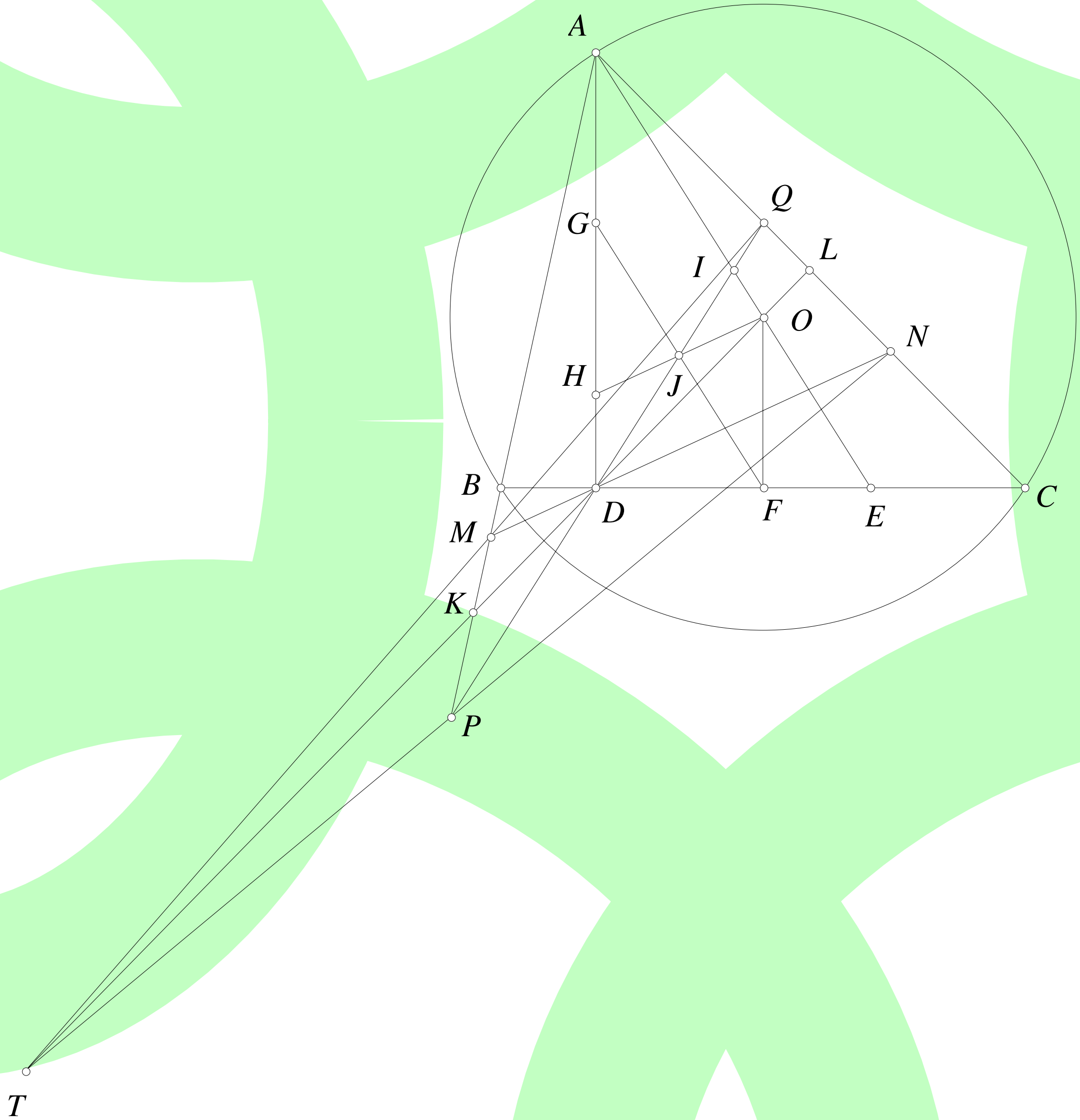
Tính chất 1. Nếu AN là đường đối trung của tam giác ABC với $N \in [BC]$ thì $\frac{NB}{NC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Tính chất 2. Giao điểm của hai tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (nếu có) thuộc đường đối trung xuất phát từ A của tam giác ABC.

Tuy nhiên, các bạn nên phát biểu tính chất của đường đối trung dưới dạng bổ đề để thuận tiện trong việc trình bày bài toán. Bạn **Ong Thế Phương**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai và bạn **Nguyễn Lê Minh Tiến**, lớp 10 Toán 2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định có lời giải ngắn gọn, chỉ sử dụng các kiến thức của hình học lớp 9, tuy nhiên cả hai bạn đều không xét trường hợp tam giác ABC cân. Bạn **Trần Đăng Phúc**, lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên KHTN cũng có lời giải tương đối ngắn gọn.

Xin tuyên dương ba bạn **Ong Thế Phương, Nguyễn Lê Minh Tiến** và **Trần Đăng Phúc** và bạn **Nguyễn Đình Toàn,** lớp 12B1, trường THPT Hùng Vương, Bình Phước.

3 Cho tam giác ABC nhọn tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H, đường cao AD. AO cắt BC tại E. Đường thẳng qua D song song OH lần lượt cắt AB, AC tại M, N. I là trung điểm AE. DI lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. MQ cắt NP tại T. Chứng minh rằng D, O, T thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi F là trung điểm BC, G là trung điểm AH. Từ kết quả quen thuộc $2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AH}$. Ta có $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OF}$. Tứ đó các tứ giác $AGFO, GHFO$ là hình bình hành suy ra GF song song AE và GF, OH có chung trung điểm J. Trong tam giác ADE có trung tuyến DI đi qua trung điểm đoạn chắn song song GF. Do đó DI đi qua trung điểm J của OH. Chú ý $DN \parallel HO$ từ liên hệ giữa tỷ số đơn và tỷ số kép ta có $D(HOJN) = (HOJ) = -1$.

Gọi OD giao AB, AC tại K, L. Qua phép chiếu xuyên tâm D ta dễ thấy

$$(AKMP) = D(AKMP) = D(ALNQ) = (ALNQ) = D(HOJN) = -1$$

Khi $(AKMP) = -1$ ta cũng có $(AKPM) = -1$. Vậy từ hai đẳng thức trên ta có $(AKPM) = (ALNQ)$ hay KL, PN, MQ đồng quy tại T, nói cách khác D, O, T thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Các bạn đều có hướng giải đúng là sử dụng hàng điểm điều hòa nhưng nhiều bạn biến đổi cồng kềnh không gọn. Ở đây chúng ta chỉ cần duy nhất cần một bổ đề của phương pháp tỷ số kép là nếu có hai hàng cùng tỷ số kép $(XABC) = (XA'B'C')$ thì AA', BB', CC' đồng quy. Bạn **Nguyễn Huy Tùng** có nhận xét là đề bài cần thêm điều kiện tam giác ABC khác tam giác đều để $O \not\equiv H$ nhận xét này chính xác và đã bổ sung thiếu sót cho đề bài, xin cám ơn bạn.

Bạn **Nguyễn Lê Minh Tiến**, học sinh trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định cho lời giải gọn gàng nhất. Giải đúng bài này có các bạn **Trần Đăng Phúc**, **Phạm Huy Hoàng**, học sinh lớp 11A1 THPT chuyên ĐHKHTN-ĐHQGHN, **Nguyễn Huy Tùng**, học sinh trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng, **Nguyễn Văn Thanh**, học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN-ĐHQGHN, **Nguyễn Đình Toàn**, học sinh lớp 12 B1, trường THPT Hùng Vương, tỉnh Bình Phước, **Ong Thế Phương**, học sinh lớp 11 toán THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa Đồng Nai. □

4 Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ đôi một cắt nhau, mỗi đường tròn cắt hai đường tròn kia tại hai điểm phân biệt. Gọi (X_1) là đường tròn tiếp xúc ngoài với (O_1) và tiếp xúc trong với các đường tròn $(O_2), (O_3)$; tương tự xác định được các đường tròn $(X_2), (X_3)$. Gọi (Y_1) là đường tròn tiếp xúc trong với (O_1) và tiếp xúc ngoài với các đường tròn $(O_2), (O_3)$, tương tự xác định được các đường tròn $(Y_2), (Y_3)$. Gọi $(Z_1), (Z_2)$ là hai đường tròn cùng tiếp xúc trong với cả ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$. Chứng minh rằng $X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, Z_1Z_2$ đồng quy.

Trước tiên ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 1. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Gọi (X) và (Z) là hai đường tròn tiếp xúc trong với cả hai đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại cặp điểm N, M và T, R ((X) nằm trong và (Z) nằm ngoài hai đường tròn). Gọi (Y) là đường tròn tiếp xúc ngoài với cả hai đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại Q, P. Gọi $(A), (B)$ lần lượt là đường tròn tiếp xúc ngoài với (O_1) và tiếp xúc trong với (O_2) lần lượt tại C, D; tiếp xúc trong với (O_1) và tiếp xúc ngoài với (O_2) lần lượt tại E, F. Khi đó các bộ ba đường thẳng $XY, MP, NQ; XZ, MR, TN$ và AB, CE, DF đồng quy tại một điểm nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2).*

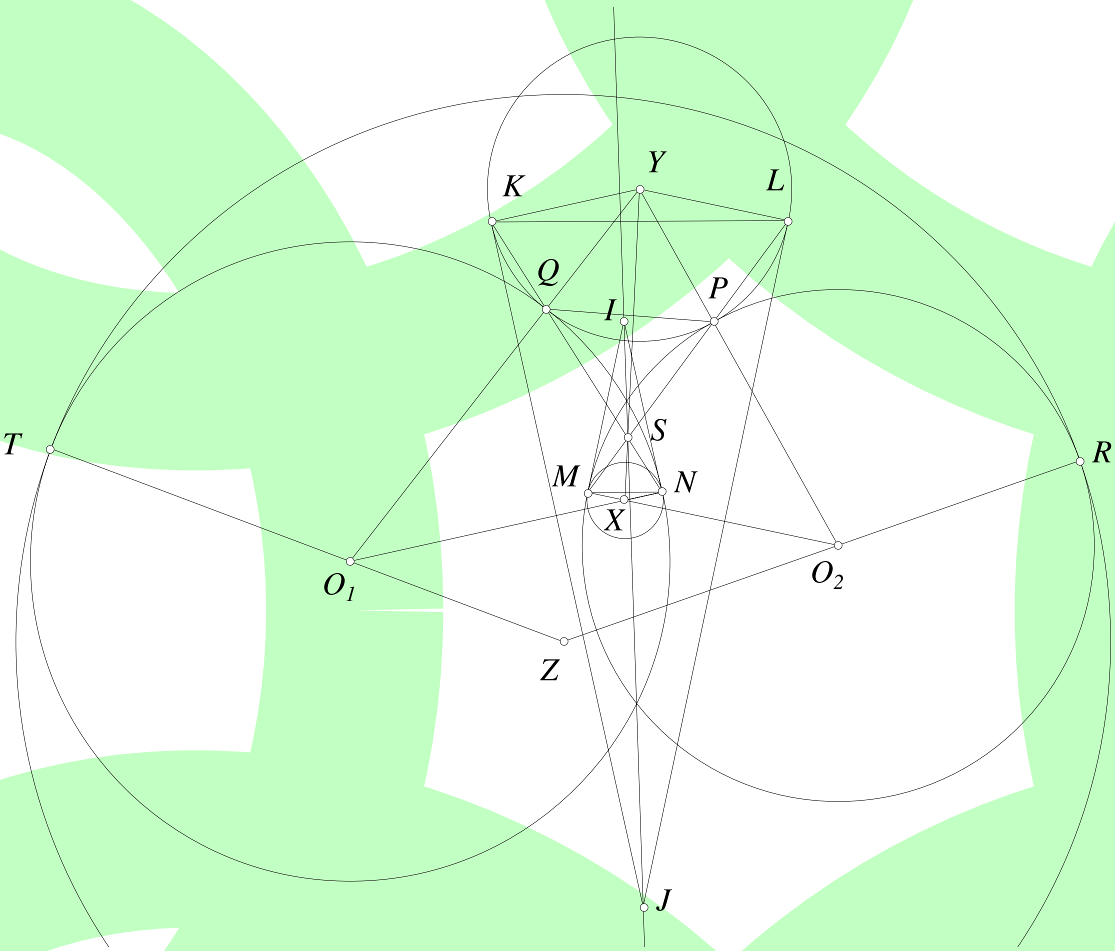
Chứng minh. Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của NQ, MP với (Y). Gọi I, J lần lượt là giao điểm của hai tiếp tuyến tại M, N của (X), tại K, L của (Y).

Do các tam giác YPL và O_2MP cân ta có biến đổi góc sau

$$(LY, LM) \equiv (LY, LP) \equiv (PL, PY) \equiv (PM, PO_2) \equiv (MO_2, MP) \equiv (MO_2, ML) (\bmod \pi)$$

Suy ra $YL \parallel MO_2$.

Tương tự, $YK \parallel NO_1$. Do đó $IM \parallel JL$ (cùng vuông góc MO_2), $IN \parallel JK$ (cùng vuông góc NO_1). Mà hai tam giác IMN và JLK lần lượt cân tại I và J nên giao điểm của NK và LM là tâm vị tự của hai tam giác và cũng là tâm vị tự của hai đường tròn (X) và (Y).



Ta có $MN \parallel KL$ và tứ giác $KLPQ$ nội tiếp nên tứ giác $MNPQ$ nội tiếp. Gọi S là giao của MP và NQ thì $\overline{SM}.\overline{SP} = \overline{SN}.\overline{SQ}$. Từ đó S nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

Vậy XY, MP, NQ đồng quy tại S nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2)

Chứng minh tương tự với bộ ba XZ, MR, NT và AB, CE, DF. Ta có điều phải chứng minh.

□

Giải bài toán. Từ bổ đề trên ta thấy tâm vị tự của (X_1) và (Y_1) nằm trên trục đẳng phương của (O_2) và (O_3) và nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Do đó X_1Y_1 đi qua tâm đẳng phương của ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3). Tương tự với X_2Y_2, X_3Y_3, Z_1Z_2. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Các bạn đã gửi lời giải đến đều giải đúng nhưng các biến đổi còn dài chưa ngắn gọn.

Bạn **Trần Đăng Phúc** học sinh lớp 11A1 THPT chuyên ĐHKHTN-ĐHQGHN cho một lời giải khá gọn dùng định lý Menelaus nhưng có một bổ đề bạn đã dùng mà chưa chứng minh đó là định lý Menelaus cho tứ giác. Bạn **Nguyễn Huy Tùng**, học sinh trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng cũng cho lời giải với các khái niệm phương tích và góc định hướng rất rõ ràng trình bày và vẽ hình rất chính xác. Ngoài ra còn các bạn giải đúng bài này **Nguyễn Văn Thanh**, lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN-ĐHQGHN, **Nguyễn Đình Toàn**, học sinh lớp 12 B1, trường THPT Hùng Vương, tỉnh Bình Phước, **Ong Thế Phương**, lớp 11 toán THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa Đồng Nai