BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO HÒA BÌNH

NGUYỄN VĂN MẬU (CHỦ BIÊN)
ĐẶNG HUY RUẬN, NGUYỄN MINH TUẤN

KỶ YẾU
TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG
LẦN THỨ IV - 2008

HÒA BÌNH 18-21/2008

Mục lục

Lời nói đầu

Trên bốn mươi năm thực hiện "Chương trình đào tạo và bồi học sinh năng khiếu toán bậc phổ thông" là một chặng đường của một chu trình đặc biệt gắn với sự khởi đầu, trưởng thành và ngày càng hoàn thiện xuất phát từ một mô hình đào tạo năng khiếu Tóan học đặc biệt tại Đại học Tổng hợp Hà Nội. Hướng đào tạo mũi nhọn này mang tính đột phá cao, đã đào tạo ra các thế hệ học sinh có năng khiếu trong lĩnh vực toán học, tin học và khoa học tự nhiên: Vật lý, Hoá học, Sinh học và khoa học sự sống. Trong điều kiện thiếu thốn về vật chất kéo dài qua nhiều thập kỷ và trải qua nhiều thách thức, chúng ta đã tìm ra hướng đi phù hợp, đã đi lên vững chắc và ổn định, đã tìm tòi, tích luỹ kinh nghiệm và có nhiều sáng tạo đáng ghi nhận. Các thế hệ Thầy và Trò đã định hình và tiếp cận với thế giới văn minh tiên tiến và khoa học hiện đại, cập nhật thông tin, sáng tạo phương pháp và tập dượt nghiên cứu. Gắn với việc tích cực đổi mới phương pháp dạy và học, chương trình đào tạo các hệ chuyên đang hướng tới xây dựng hệ thống chuyên đề, đang nỗ lực và đã tổ chức thành công Kỳ thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 48, năm 2007 tại Việt Nam đã thành công tốt đẹp, được bạn bè quốc tế ca ngợi.

Sau gần nửa thế kỷ hình thành và phát triển, có thể nói, giáo dục mũi nhọn phổ thông (giáo dục năng khiếu) đã thu được những thành tựu rực rỡ, được Nhà nước đầu tư có hiệu quả, được xã hội thừa nhận và bạn bè quốc tế khâm phục. Các đội tuyển quốc gia tham dự các kỳ thi Olympic quốc tế có bề dày thành tích mang tính ổn định và có tính kế thừa. Đặc biệt, các trường THPT Chuyên các tỉnh khu vực miền núi phía bắc đã tiến những bước dài trên còn đường nâng cao chất lượng giáo dục và đào tạo học sinh giỏi bậc phổ thông. Nhiều học sinh đã dành các giải cao tại các kỳ thi Olympic quốc tế, Olympic khu vực và các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia.

Từ năm 2005, các trường THPT chuyên đã có sáng kiến tạo ra một trại hè đặc thù, sân chơi văn hóa và khoa học cho đội ngũ các thầy, các cô và học sinh năng khiếu thuộc các trường THPT Chuyên các tỉnh khu vực miền núi phía bắc, đó là **Trại Hè Hùng Vương**. Trong các nội dung sinh hoạt của trại hè Hùng Vương đối với các môn Toán học, Vật lý, Sinh học và Văn học có các kỳ thi Olympic Hùng Vương. Kỳ thi trong khuôn khổ kiến thức lớp 10 phổ thông như là một sự tập dượt của các đội tuyển chuẩn bị hành trang cho các kỳ thi Olympic Hà Nội mở rộng, Olympic Singapore mở rộng và kỳ thi học sinh giỏi quốc gia. Học sinh các lớp năng khiếu đã tiếp thu tốt các kiến thức cơ bản do Hội đồng cố vấn khoa học là các giáo sư, các nhà khoa học từ các trường đại học và Hội Toán học Hà Nội cung cấp. Các kiến thức này đã được cân nhắc nằm trong khuôn khổ các kiến thức nâng cao đối với các lớp chuyên toán - tin, vật lý, sinh học ...

Với mong muốn tạo điều kiện cho các thầy giáo, cô giáo và đông đảo các em học sinh giỏi toán và yêu môn toán, chúng tôi viết cuốn kỷ yếu nhỏ này nhằm cung cấp các tư liệu về toán học qua bốn kỳ Olympic Hùng Vương và hệ thống một số kiến thức bổ trợ gắn với nội dung chương trình lớp 10. Hy vọng rằng, các thầy, các cô, các em học sinh sẽ tìm thấy những điều bổ ích từ cuốn tư liệu này.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Ban Tổ chức Trại hè Hùng Vương, xin cảm ơn Sở Giáo Dục Đào Tạo Hòa Bình, cảm ơn các trường THPT Chuyên từ các tỉnh khu vực miền núi phía bắc, các đơn vị tài trợ đã tạo điều kiện để cuốn Kỷ yếu kịp ra mắt kịp thời ngay trong thời gian tổ chức hội thảo tại thành phố Hòa Bình.

Vì thời gian rất gấp gáp, không có điều kiện hiệu đính chi tiết nên chắc chắn cuốn kỷ yếu này còn nhiều khiếm khuyết về nội dung và hình thức. Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn các bạn đọc cho những ý kiến đóng góp để cuốn kỷ yếu được hoàn chỉnh. Các ý kiến đóng góp xin gửi về Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ, thành phố Hòa Bình.

Thay mặt Ban Cố vấn chuyên môn

GS TSKH Nguyễn Văn Mậu

Chương 1

Đề thi Olympic Toán học Hùng vương

1.1 Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 1, năm 2005

Câu 1. Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số cộng tăng. Hỏi lập được bao nhiêu cấp số cộng thoả mãn điều kiện $a_1 > 50$ và $a_5 < 100$?

Câu 2. Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số nhân tăng. Hỏi lập được bao nhiêu cấp số nhân thoả mãn điều kiện $a_5 < 100$?

Câu 3. Các số dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thoả mãn các điều kiện

$$\begin{array}{ll} (i) & 2a_1, 2a_2, 2a_3, 2a_4, 2a_5 \text{ là các số nguyên dương,} \\ (ii) & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99. \end{array}$$

Tìm giá trị lớn nhất của tích $P = a_1a_2a_3a_4a_5$.

Câu 4. Giả sử tam thức bậc hai $f(x)$ luôn luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $f(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai nhị thức bậc nhất.

Câu 5. Giả sử hàm trùng phương $g(x) = x^4 + bx^2 + c$ luôn luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $g(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai tam thức bậc hai.

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$. Tìm quỹ tích các điểm M thuộc hình vuông (phần bên trong và biên của hình vuông) sao cho diện tích các tam giác MAB và MAC bằng nhau.

Câu 7. Cho hình vuông $ABCD$. Giả sử E là trung điểm cạnh CD và F là một điểm ở bên trong hình vuông. Xác định vị trí điểm Q thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{AQE} = \widehat{BQF}$.

1.2 Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 2, năm 2006

Câu 1. Số đo các góc trong của một ngũ giác lồi có tỷ lệ 2 : 3 : 3 : 5 : 5. Số đo của góc nhỏ nhất bằng

[(A)] 20^0 , [(B)] 40^0 , [(C)] 60^0 , [(D)] 80^0 [(E)] 90^0.

Câu 2. Cho $a \neq 0$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = a^{2005} \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = a^{2006} \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = a^{2007}. \end{cases}$$

Câu 3. Xác định bộ số dương a, b, c sao cho

$$ax^9y^{12} + by^9z^9 + cz^{11}x^8 \geqslant 15x^4y^8z^7,\ \ \forall x > 0, y > 0, z > 0.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc BC. Xét hình bình hành $APMN$, trong đó P thuộc AB và N thuộc AC và hình bình hành $ABDC$ với đường chéo AD và BC. O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\widehat{PMO} = \widehat{NMO}$ khi và chỉ khi $\widehat{BDM} = \widehat{CDM}$.

Câu 5. Cho số dương M. Xét các tam thức bậc hai $g(x) = x^2 + ax + b$ có nghiêm thực x_1, x_2 và các hệ số thoả mãn điều kiện

$$\max\{|a|, |b|, 1\} = M.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|).$$

1.3 Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 3, năm 2007

Câu 1. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn?

(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Câu 2. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc không tù?

(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Câu 3. Xác định hai chữ số tận cùng của số sau

$$M = 2^3 + 20^{2006} + 200^{2007} + 2006^{2008}?$$

(A) 04; **(B)** 34; **(C)** 24; **(D)** 14; **(E)** Khác các đáp số đã nêu.

Câu 4. Có n viên bi trong hộp được gắn nhãn lần lượt là $1, 2, \ldots, n$. Người ta lấy ra một viên bi thì tổng các nhãn của số bi còn lại là 5048. Hỏi viên bi đó được gắn nhãn là số nào?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4; **(E)** 5.

Câu 5. Cho số tự nhiên $\overline{abc}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng các số $\overline{bca}$ và $\overline{cab}$ cũng chia hết cho 37.

Câu 6. Cho $0 < a \leqslant 2$. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = ay \\ y + \dfrac{1}{y} = az \\ z + \dfrac{1}{z} = ax. \end{cases}$$

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB < BC$. Đường phân giác BP của góc $\angle ABC$ cắt AD ở P. Biết rằng ΔPBC là tam giác cân, $PB = PC = 6$cm và $PD = 5$cm. Tính độ dài các cạnh của hình bình hành.

Câu 8. Chứng minh rằng tam thức bậc hai $g(x) = 3x^2 - 2ax + b$ có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại bộ số α, β, γ sao cho

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha. \end{cases}$$

Câu 9. Cho ba số dương a_1, a_2, a_3. Các số nguyên $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ và $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ cho trước thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = a_1x^{\alpha_1}y^{\beta_1} + a_2x^{\alpha_2}y^{\beta_2} + a_3x^{\alpha_3}y^{\beta_3},\ \ x > 0,\ y > 0.$$

Câu 10. Tính

$$M = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}}.$$

1.4 Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 4, năm 2008

Câu 1. Hai chữ số tận cùng của số $M = 2^{2008}$ là

(A) 16, **(B)** 36, **(C)** 56, **(D)** 76, **(E)** không phải là các đáp số trên

Câu 2. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho số $A = m^2 + 5mn + 9n^2$ có chữ số tận cùng bằng 0. Khi đó hai chữ số tận cùng của A là

(A) 00, **(B)** 20, **(C)** 40, **(D)** 60, **(E)** không phải là các đáp số trên

Câu 3. Hỏi có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 2008 đồng thời không chia hết cho 2, 3 và 5?

Câu 4. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ y + yz + z = 11 \\ z + zx + x = 7 \end{cases}$$

Câu 5. Có thể tìm được hay không năm số nguyên sao cho các tổng của từng cặp trong năm số đó lập thành mười số nguyên liên tiếp?

Câu 6. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên A có 4 chữ số tận cùng là 2008 và chia hết cho 2009.

Câu 7. Xét hình thoi $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$\left(\frac{a}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{a}{r_2}\right)^2$$

luôn luôn không đổi.

Câu 8. Giải phương trình sau

$$4x^2 + 2 = 3\sqrt[3]{4x^3 + x}$$

Câu 9. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 25.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = x^2 + 3y^2 + 9z^2.$$

Chương 2

Đáp án Olympic Toán học Hùng vương

2.1 Đáp án Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 1

Câu 1.

Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số cộng tăng. Có bao nhiêu cấp số cộng thoả mãn điều kiện $a_1 > 50$, $a_5 < 100$?

Giải. Ta có $a_5 = a_1 + 4d$ với d nguyên dương sao cho

$$\begin{cases} a_1 > 50 \\ a_1 + 4d < 100 \end{cases} \tag{2.1}$$

Nếu $d \geqslant 13$ thì $a_5 > 50 + 4.13 > 100$. Vậy, $1 \leqslant d \leqslant 12$. Từ đây ta có tính toán cụ thể cho từng trường hợp:

$d = 1$. Có 45 dãy.

$d = 2$. Có 41 dãy.

$d = 3$. Có 37 dãy.

$d = 4$. Có 33 dãy.

$d = 5$. Có 29 dãy.

$d = 6$. Có 25 dãy.

$d = 7$. Có 21 dãy.

$d = 8$. Có 17 dãy.

$d = 9$. Có 13 dãy.

$d = 10$. Có 9 dãy.

$d = 11$. Có 5 dãy.

$d = 12$. Có 1 dãy.

Có $1 + 5 + 9 + \cdots 41 + 45 = (1 + 45) \times 6 = 276$ dãy.

Cách khác: Sau khi chứng minh $1 \leqslant d \leqslant 12$, ta xây dựng công thức tổng quát

$$S = 49 \times 12 - 4\sum_{d=1}^{12} d$$

và thu được $S = 276$.

Câu 2.

Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số nhân tăng. Có bao nhiêu cấp số nhân thoả mãn điều kiện $a_5 < 100$?

Giải. Giả sử $\dfrac{n}{m}$ là công bội của cấp số nhân thoả mãn điều kiện bài toán, $n > m$, $(m, n) = 1$. Khi đó $a_5 = a_1\dfrac{n^4}{m^4}$, nên $a_1 = km^4$ với k nguyên dương. Các số hạng của cấp số nhân đó là

$$km^4,\ km^3n,\ km^2n^2,\ kmn^3,\ kn^4.$$

Nếu $n > 4$ thì $kn^4 \geqslant n^4 > 256 > 100$. Vì vậy $n = 2$ và $n = 3$.

$n = 3$ và $m = 2$ thì $81k < 100$ nên $k = 1$. Có một cấp số

$$(16, 24, 36, 54, 81).$$

$n = 3$ và $m = 1$ thì $81k < 100$ nên $k = 1$. Có một cấp số

$$(1, 3, 9, 27, 81).$$

$n = 2$ và $m = 1$ thì $16k < 100$ nên $k = 1, 2, \ldots, 6$. Có 6 cấp số:

$$(1, 2, \ldots), (2, 4, \ldots), (3, 6, \ldots), (4, 8, \ldots), (5, 10, \ldots), (6, 12, \ldots).$$

Vậy tổng cộng có 8 cấp số nhân thoả mãn điều kiện $a_5 < 100$.

Câu 3.

Các số dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thoả mãn các điều kiện

(i) $2a_1, 2a_2, 2a_3, 2a_4, 2a_5$ là các số nguyên dương

(ii) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tích $P = a_1a_2a_3a_4a_5$?

Giải. Viết bài toán dưới dạng

Các số nguyên dương x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thoả mãn các điều kiện

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 198.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tích $P = \frac{1}{2^5}x_1x_2x_3x_4x_5$?

Không giảm tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_5$. Khi đó $x_3+x_4+x_5 \geqslant \dfrac{3.198}{5} = 118.$

Nếu $x_3 + x_4 + x_5 = 118$ thì $x_1 + x_2 = 40$. Dễ thấy vô lý.

Nếu $x_3 + x_4 + x_5 = 119$ thì cũng không xảy ra. Do vậy, ta xét $x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 120$. áp dung bất dẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{(40x_1)(40x_2)(39x_3)(39x_4)(39x_5)} &\leqslant \frac{40(x_1 + x_2) + 39(x_3 + x_4 + x_5)}{5}\\ &= \frac{40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (x_3 + x_4 + x_5)}{5}\\ &\leqslant \frac{40 \times 198 - 120}{5} = 1560.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $P_{\max} = 3042000$ khi $a_1 = a_2 = 19,5$ và $a_3 = a_4 = a_5 = 20$.

Câu 4.

Giả sử tam thức bậc hai $f(x)$ luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $f(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai nhị thức bậc nhất.

Giải. Theo giả thiết, ta có

$$f(x) = ax^2 + bx + c > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f(x) = \Big(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}\Big)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng đồng nhất thức

$$A^2 + B^2 = \Big(\frac{A+B}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{A-B}{\sqrt{2}}\Big)^2,$$

ta có ngay điều phải chứng minh.

Câu 5.

Giả sử hàm trùng phương $g(x) = x^4 + bx^2 + c$ luôn luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $g(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai tam thức bậc hai.

Giải. Nhận xét rằng $c > 0$.

Khi $\Delta < 0$, ta nhận được kết quả như Câu 4.

Khi $\Delta \geq 0$ tức là $b^2 - 4c \geq 0$ hay $b - 2\sqrt{c} \geq 0$, khi đó ta sử dụng biến đổi sau

$$g(x) = (x^2 + \sqrt{c})^2 + (b - 2\sqrt{c})x^2.$$

Câu 6.

Cho hình vuông $ABCD$. Tìm quỹ tích các điểm M thuộc hình vuông (phần bên trong và biên của hình vuông) sao cho diện tích các tam giác MAB và MAC bằng nhau.

Giải. Giả sử tồn tại điểm M thoả mãn yêu cầu bài toán. Nối AM, ký kiệu I là giao điểm của AM với BC. Hạ các đường BH, CK vuông góc với AM.

1) Xét trường hợp M thuộc tam giác ABC. Từ giả thiết suy ra $BH = CK$. Do đó, ta có hai tam giác bằng nhau $\triangle BHI = \triangle CKI$. Vậy, I cần phải nằm trên đoạn thẳng AI. Ngược lại, dễ dàng chưng minh được rằng, nếu $M \in AI$ thì $S(MAB) = S(MAC)$.

2) Xét trường hợp M thuộc tam giác ADC. Từ giả thiết suy ra $BH = CK$. Do đó, $M \in AD$. Vậy, M cần phải nằm trên cạnh AD. Ngược lại, dễ dàng chứng minh được rằng nếu $M \in AD$ thì hai tam giác MAB và MAC có diện tích bằng nhau.

Câu 7.

Cho hình vuông $ABCD$. Giả sử E là trung điểm cạnh CD và F là một điểm ở bên trong hình vuông. Xác định vị trí điểm Q thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{AQE} = \widehat{BQF}$.

Giải.

Giả sử tồn tại điểm $Q \in AB$ thoả mãn điều kiện bài toán. Ký hiệu P là điểm giữa cạnh AB và K là chân đường vuông góc của F lên AB.

Xét trường hợp $K \in PB$. Dễ dàng chứng minh $Q \in PB$. Gọi F' là điểm đối xứng của F qua AB. Dễ dàng thấy rằng $\widehat{FQB} = \widehat{F'QB}$. Suy ra $\widehat{AQE} = \widehat{B'QF'}$. Do đó, ba điểm E, Q, F' thẳng hàng. Hay, Q là giao điểm của EF' với AB.

Xét trường hợp $K \in AP$. Dễ dàng chứng minh $Q \in AP$. Tương tự như trường hợp trên, ta chứng minh được Q là giao điểm của EF' với AB.

2.2 Đáp án Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 3

Câu 1. Số đo các góc trong của một ngũ giác lồi có tỷ lệ 2 : 3 : 3 : 5 : 5. Số đo của góc nhỏ nhất bằng

[(A)] 20^0 , [(B)] 40^0 , [(C)] 60^0 , [(D)] 80^0 [(E)] 90^0.

Giải. [(C)].

Tổng các góc trong của ngũ giác lồi có số đo bằng 540^0. Khi đó

$$2x + 3x + 3x + 5x + 5x = 540^0.$$

Suy ra $x = 30^0$. Vậy, số đo góc nhỏ nhất bằng 60^0.

Câu 2. Cho $a \neq 0$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = a^{2005} \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = a^{2006} \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = a^{2007}. \end{cases}$$

Giải. Trước hết ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = 1 \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = 1 \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Từ phương trình thứ 2 trong hệ (2.2) dễ dàng suy ra $x, y, z \in [-1, 1]$. Trừ phương trình thứ 2 cho phương trình thứ ba trong hệ đó ta thu được

$$x^{2006}(1-x) + y^{2006}(1-y) + z^{2006}(1-z) = .0$$

Dễ dàng suy ra $x = 0,1; y = 0,1; z = 0,1$. Thử lại ta được ba nghiệm của hệ (2.2) là

$$(x, y, z) = (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1).$$

Bây giờ ta giải bài toán. Đặt

$$x' = \frac{x}{a}, \ \ y' = \frac{y}{a}, \ \ z' = \frac{z}{a}.$$

Khi đó (x', y', z') là nghiệm của phương trình (2.2). Vậy nghiệm của bài toán là

$$(x, y, z) = (a, 0, 0); (0, a, 0); (0, 0, a).$$

Câu 3. Xác định bộ số dương a, b, c sao cho

$$ax^9y^{12} + by^9z^9 + cz^{11}x^8 \geqslant 15x^4y^8z^7, \ \ \forall x > 0, y > 0, z > 0.$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức giữa các trung bình cộng và nhân

$$\frac{au + bv + cw}{a + b + c} \geqslant (u^a v^b w^c)^{1/(a+b+c)}, \ \ \forall a, b, c; \ \ u.v, w > 0. \tag{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = v = w = 1$. Ta cần chọn các số dương a, b, c sao cho đồng thời xảy ra

$$\begin{cases} \dfrac{ax^9 + b.1 + cx^8}{15} \geqslant x^4, \ \ \forall x > 0, \\ \\ \dfrac{ay^{12} + by^9 + c.1}{15} \geqslant y^8, \ \ \forall y > 0, \\ \\ \dfrac{a.1 + bz^9 + cz^{11}}{15} \geqslant z^7, \ \ \forall z > 0. \end{cases}$$

Theo (2) thì

$$\begin{cases} a+b+c=15 \\ \dfrac{9a+8c}{15}=4 \\ \dfrac{12a+9b}{15}=8 \\ \dfrac{9b+11c}{15}=7. \end{cases}$$

Hệ phương trình tuyến tính này cho ta nghiệm duy nhất $a=4$, $b=8$ và $c=3$.

Thế các giá trị a,b,c vào vế trái của (1), ta thu được

$$4x^9y^{12}+8y^9z^9+3z^{11}x^8 \geqslant 15x^4y^8z^7,\ \ \forall x>0,y>0,z>0$$

là đúng.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{4x^9y^{12}+8y^9z^9+3z^{11}x^8}{15} = \\ &\frac{(x^9y^{12}+\cdots+x^9y^{12})+(y^9z^9+\cdots+y^9z^9)+(z^{11}x^8+z^{11}x^8+z^{11}x^8)}{15} \\ &\geqslant \Big[x^{4.9+3.8}y^{4.12+8.9}z^{8.9+3.11}\Big]^{1/15} = x^4y^8z^7, \end{aligned}$$

tức là

$$4x^9y^{12}+8y^9z^9+3z^{11}x^8 \geqslant 15x^4y^8z^7,\ \ \forall x>0,y>0,z>0,$$

điều phải chứng minh.

Câu 4. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc BC. Xét hình bình hành $APMN$, trong đó P thuộc AB và N thuộc AC và hình bình hành $ABDC$ với đường chéo AD và BC. O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\widehat{PMO}=\widehat{NMO}$ khi và chỉ khi $\widehat{BDM}=\widehat{CDM}$.

Giải. Ta chứng minh các điểm O,M,D thẳng hàng. Giả sử đường thẳng chứa OM cắt BD và CD lần lượt tại D_1 và D_2 tương ứng. Ta chứng minh $D_1\equiv D_2\equiv D$. Gọi K là giao điểm của MP và BN, L là giao điểm của MN và CP. Khi đó thì

$$\frac{NK}{NB}=\frac{AP}{AB}=\frac{NL}{NM}.$$

Suy ra

$$\frac{NK}{NB}=\frac{NL}{NM}.$$

Do đó $KL \parallel BC$. Vậy nên

$$\frac{OM}{OD_1}=\frac{OK}{OB}=\frac{OL}{OC}=\frac{OM}{OD_2}.$$

Điều đó chứng tỏ $D_1\equiv D_2\equiv D$ hay các điểm O,M,D thẳng hàng. Khi đó hiển nhiên $\widehat{MPO}=\widehat{NPO}$ khi và chỉ khi $\widehat{BDP}=\widehat{CDP}$.

Câu 5. Cho số dương M. Xét các tam thức bậc hai $g(x) = x^2 + ax + b$ có nghiêm thực x_1, x_2 và các hệ số thoả mãn điều kiện

$$\max\{|a|, |b|, 1\} = M.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|).$$

Giải. Ta có

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \ \ x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

và

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|) = 1 + |x_1x_2| + |x_1| + |x_2| = 1 + |b| + |x_1| + |x_2|.$$

Nếu $b \geqslant 0$ thì $|x_1| + |x_2| = |x_1 + x_2| = |a|$. Do đó

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|) \leqslant 1 + |b| + |a| \leqslant 1 + 2M. \tag{1}$$

Nếu $b < 0$ thì $x_1 < 0$, và $x_2 > 0$. Khi đó

$$|x_1| = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$
$$|x_2| = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Suy ra

$$|x_1| + |x_2| = \sqrt{a^2 - 4b} \leqslant \sqrt{M^2 + 4M}.$$

Do đó

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|) \leqslant 1 + M + \sqrt{M^2 + 4M}. \tag{2}$$

So sánh (1) và (2), ta thu được

$$\max[(1 + |x_1|)(1 + |x_2|)] = 1 + M + \sqrt{M^2 + 4M}$$

và đạt được khi $a = \pm M$, $b = -M$. Lúc đó phương trình bậc hai có dạng

$$x^2 \pm Mx - M = 0.$$

2.3 Đáp án Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 3

Câu 1. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn?

(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Giải. **(B)** 3.

Câu 2. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc không tù?

(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Giải. **(C)** 4.

Câu 3. Xác định hai chữ số tận cùng của số sau

$$M = 2^3 + 20^{2006} + 200^{2007} + 2006^{2008}?$$

(A) 04; **(B)** 34; **(C)** 24; **(D)** 14; **(E)** Khác các đáp số đã nêu.

Giải. **(C)** 24.

Câu 4. Có n viên bi trong hộp được gắn nhãn lần lượt là $1, 2, \dots, n$. Người ta lấy ra một viên bi thì tổng các nhãn của số bi còn lại là 5048. Hỏi viên bi đó được gắn nhãn là số nào?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4; **(E)** 5.

Giải. **(B)** 2. Ta có

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vậy nên

$$\frac{n(n+1)}{2} - k = 5048$$

hay

$$n(n+1) - 2k = 10096.$$

Ta có đẳng thức sau:

$$100.101 - 22 = 10096.$$

Câu 5. Cho số tự nhiên $\overline{abc}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng các số $\overline{bca}$ và $\overline{cab}$ cũng chia hết cho 37.

Giải. Ta có, theo giả thiết thì

$$M = (100a + 10b + c) \vdots 37$$

và

$$N = 11\overline{bca} = 1100b + 110c + 11a.$$

Suy ra

$$M + N = 111(a + 10b + c) \vdots 37.$$

Tiếp theo, ta có

$$P = 101\overline{cab} = 10100c + 1010a + 101b$$

nên

$$M + P = 111(a + b + 273c) \,\vdots\, 37.$$

Câu 6. Cho $0 < a \leqslant 2$. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = ay \\ y + \dfrac{1}{y} = az \\ z + \dfrac{1}{z} = ax. \end{cases}$$

Giải. Chỉ cần xét $x, y, z > 0$. Từ bài ra, do $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$, nên chỉ cần xét $x, y, z \geqslant 1$. Gọi $x = \max\{x, y, z\}$.

Nếu $y \geqslant z$ thì

$$ax \geqslant ay \geqslant az$$

nên

$$z + \frac{1}{z} \geqslant x + \frac{1}{x} \geqslant y + \frac{1}{x}.$$

Do $x, y, z \geqslant 1$ nên

$$\frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{x}$$

hay $x \leqslant z$. Suy ra $x = y = z$ và từ đó ta có

- Nếu $0 < a \leqslant 1$ thì hệ vô nghiệm,

- Nếu $1 < a \leqslant 2$ thì

$$x = y = z = \sqrt{\frac{1}{a - 1}}.$$

Nếu $z \geqslant y$ thì

$$z + \frac{1}{z} \geqslant y + \frac{1}{y}$$

và ta cũng thu được kết quả như đã có ở trên.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB < BC$. Đường phân giác BP của góc $\angle ABC$ cắt AD ở P. Biết rằng ΔPBC là tam giác cân, $PB = PC = 6$cm và $PD = 5$cm. Tính độ dài các cạnh của hình bình hành.

Giải. Ta có $\Delta ABP \sim \Delta PBC$ nên

$$\frac{x}{6} = \frac{6}{x + 5}.$$

Giải phương trình này ta thu được $x = 4$.

Câu 8. Chứng minh rằng tam thức bậc hai $g(x) = 3x^2 - 2ax + b$ có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại bộ số α, β, γ sao cho

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha. \end{cases}$$

Giải. Điều kiện đủ là hiển nhiên vì

$$\Delta' = a^2 - 3b = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \geqslant 0$$

ứng với mọi bộ α, β, γ.

Ngược lại, nếu $g(x)$ có hai nghiệm là u, v. Nếu $u = v$ thì chỉ cần chọn $\alpha = \beta = \gamma = u$. Nếu $u \neq v$ thì chọn $\alpha = u$, $\beta = v$ và $\gamma = \dfrac{u+v}{2}$.

Câu 9. Cho ba số dương a_1, a_2, a_3. Các số nguyên $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ và $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ cho trước thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} + a_3 x^{\alpha_3} y^{\beta_3}, \;\; x > 0, \, y > 0.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_1 + a_2 + a_3}(a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} + a_3 x^{\alpha_3} y^{\beta_3}) \\ &\geqslant x^{\frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3}{}} y^{\frac{a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3}{}} = 1. \end{aligned}$$

Vậy nên $M \geqslant a_1 + a_2 + a_3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Câu 10. Tính

$$M = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}}.$$

Giải. Dễ thấy phương trình $\cos 3x + \cos 2x = 0$ có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi; \;\; x = \pi + 2k\pi.$$

Mặt khác, phương trình trên tương đương với

$$4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad (\cos x + 1)(4\cos^2 x - 2\cos x - 1) = 0.$$

Do đó $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ là hai nghiệm của phương trình $4t^2 - 2t - 1 = 0$. Suy ra $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}; \dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}}$ là hai nghiệm của phương trình

$$4\frac{1}{t^2} - 2\frac{1}{t} - 1 = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 + 2t - 4 = 0.$$

Sử dụng định lý Viet, ta thu được $M = -2$.

Nhận xét 1. *Trong SGK có bài tập: Biết rằng* $\cos 36^0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. *Tính* $\sin 18^0$. *Do đó, có thể học sinh sử dụng kết quả này để tính* M.

2.4 Đáp án Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 4

Câu 1. Hai chữ số tận cùng của số $M = 2^{2008}$ là

(A) 16, **(B)** 36, **(C)** 56, **(D)** 76, **(E)** không phải là các đáp số trên

Lời giải. Dễ thấy M chia hết 4. Mặt khác, ta có $2^{2008} = 2^8 \times 1024^{200} = 256(1025-1)^{200}$ chia 25 dư 6. Từ đó suy ra hai số tận cùng của A thuộc tập hợp $\{06, 31, 56, 81\}$. Do A chia hết 4 nên hai chữ số tận cùng cần tìm là 56.

Câu 2. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho số $A = m^2 + 5mn + 9n^2$ có chữ số tận cùng bằng 0. Khi đó hai chữ số tận cùng của A là

(A) 00, **(B)** 20, **(C)** 40, **(D)** 60, **(E)** không phải là các đáp số trên

Lời giải. Ta có $A = (m+3n)^2 - mn$ có chữ số tận cùng là 0 nên A chia hết cho 2, suy ra m, n là các số chẵn. Do đó A chia hết cho 4. Tương tự, vì A chia hết cho 5 nên nếu m, n đều chia hết cho 5 thì A chia hết cho 25. Khi đó $m = n = 6$ thì A có tận cùng 40. Vậy đáp số là **E**.

Câu 3. Hỏi có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 2008 đồng thời không chia hết cho 2, 3 và 5?

Lời giải.

Số các số chia hết cho 2 là $\left[\dfrac{2008}{2}\right] = 1004$.

Số các số chia hết cho 3 là $\left[\dfrac{2008}{3}\right] = 669$.

Số các số chia hết cho 5 là $\left[\dfrac{2008}{5}\right] = 401$.

Số các số chia hết cho tích 2.3 là $\left[\dfrac{2008}{6}\right] = 334$.

Số các số chia hết cho tích 2.5 là $\left[\dfrac{2008}{10}\right] = 200$.

Số các số chia hết cho tích 3.5 là $\left[\dfrac{2008}{15}\right] = 133$.

Số các số chia hết cho tích 2.3.5 là $\left[\dfrac{2008}{30}\right] = 66$.

Vậy số các số nguyên từ 1 đến 2008 đồng thời không chia hết cho 2, 3 và 5 bằng

$$T = 2008 - (1004 + 669 + 401) + (334 + 200 + 133) - 66 = 535.$$

Câu 4. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ y + yz + z = 11 \\ z + zx + x = 7 \end{cases}$$

Lời giải. Viết phương trình đầu dưới dạng

$$(x+1)(y+1) = 6.$$

Tương tự, ta thu được hệ

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 6 \\ (y+1)(z+1) = 12 \\ (z+1)(x+1) = 14 \end{cases}$$

Vậy $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ và $(x, y, z) = (-3, -4, 5)$.

Câu 5. Có thể tìm được hay không năm số nguyên sao cho các tổng của từng cặp trong năm số đó lập thành mười số nguyên liên tiếp?

Lời giải. Giả sử tìm được năm số như vậy, gọi s là tổng của năm số đó và n là giá trị nhỏ nhất của tổng các cặp hai số. Khi đó, 10 số nguyên liên tiếp nói trong đề bài là $n,\ n+1,\ \cdots,\ n+9$. Ta tính tổng T của 10 số đó theo hai cách khác nhau: Một mặt, $T = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+9) = 5(2n+9)$. Mặt khác , $T = 4s$ (do trong T mỗi số đã cho có mặt đúng 4 lần). Từ đó suy ra $4s = 5(2n+9)$ là điều vô lí. Vậy giả sử ban đầu là sai, tức là không thể chọn được năm số thoả mãn yêu cầu bài ra.

Câu 6. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên A có 4 chữ số tận cùng là 2008 và chia hết cho 2009.

Lời giải. Xét vô hạn các số có dạng $\overline{2008\ldots2008}$. Chia các số này cho 2009 được các số dư từ 0 đến 2008. Nếu có một số dư nào đó bằng không, suy ra điều phải chứng minh. Vì tập trên là vô hạn nên tồn tại hai số dư bằng nhau. Xét hiệu hai số tương ứng, có dạng $10^4 \times \overline{2008\ldots2008}$ chia hết 2009. Từ $(10^4, 2009) = 1$ suy ra điều phải chứng minh.

Câu 7. Xét hình thoi $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$\left(\frac{a}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{a}{r_2}\right)^2$$

luôn luôn không đổi.

Lời giải. Kẻ đường trung trực của AB cắt AC ở O_1, cắt BD ở O_2 thì O_1, O_2 là tâm các đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ và $\triangle ABC$ suy ra $r_1 = O_1A, r_2 = O_2B$.

$$\triangle AIO_1 \backsim \triangle AOB \Rightarrow \frac{O_1A}{AB} = \frac{AI}{AO} \Rightarrow r_1 = O_1A = \frac{AB.AI}{AO} = \frac{a^2}{AC} \Rightarrow \frac{1}{r_1^2} = \frac{AC^2}{a^4}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{r_2^2} = \frac{BD^2}{a^4} \Rightarrow \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{AC^2 + BD^2}{a^4} = \frac{4AB^2}{a^4} = \frac{4}{a^2}.$$

Câu 8. Giải phương trình sau

$$4x^2 + 2 = 3\sqrt[3]{4x^3 + x}$$

Lời giải. Với $x \leqslant 0$ thì VT>VP, phương trình vô nghiệm.

Xét $x > 0$, ta có

$$3\sqrt[3]{2(4x)(4x^2 + 1} \leqslant 2 + 4x + 4x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 3.$$

Suy ra

$$3\sqrt[3]{4x^3 + x} \leqslant 2x^2 + 2x + 3/2 \leqslant (2x^2 + 2x + 3/2) + 2(x^2 - 1/2)^2 = 4x^2 + 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1/2$.

Câu 9. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 25.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = x^2 + 3y^2 + 9z^2.$$

Lời giải. Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 25 \Leftrightarrow (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = 50.$ Đặt $u = x + y,\ v = y + z,\ t = z + x$, bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = (\frac{v + t - u^2}{2}) + 3(\frac{t + u - v^2}{2}) + 9(\frac{u + v - t^2}{2})$$

với $u^2 + v^2 + t^2 = 50.$“

Vì vậy ta chỉ cần giải bài toán dẫn xuất sau đây.

Bài toán dẫn xuất. Cho $u^2+v^2+t^2=1$, tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T=(u+t-v)^2+3(u+v-t)^2+9(v+t-u)^2.$$

Với $t=0$, có $u^2+v^2=1$. Khi đó

$$T=(u-v)^2+3(u+v)^2+9(v-u)^2=13-14uv\geqslant 13-7=6.$$

Với $t\neq 0$, chỉ cần xét $0<T<6$. Đặt $u=\alpha t,\ v=\beta t$ thì từ $u^2+v^2+t^2=1$ suy ra $t=\dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2+1}$. Khi đó

$$T=\frac{(\alpha+1-\beta)^2+3(\alpha+\beta-1)^2+9(\beta-\alpha+1)^2}{\alpha^2+\beta^2+1}.$$

Nhận xét rằng $0<T<6$ nên

$$(T-13)\alpha^2+2(7\beta+11)\alpha+T(\beta^2+1)-(1-\beta)^2-3(\beta-1)^2-9(\beta+1)^2\geqslant 0.$$

$$\Leftrightarrow \Delta^{'}=(7\beta+11)^2-(T-13)[(T-13)\beta^2-10\beta+T-13]\geqslant 0.$$

Đặt $T-13=V$ thì $\Delta^{'}=(7\beta+11)^2-V(V\beta^2-10\beta+V)$.

$$\begin{aligned}\Delta^{'}\geqslant 0 \Leftrightarrow &(49-V^2)\beta^2+2(5V+77)\beta+121-V^2\geqslant 0\\ \Leftrightarrow &\ (5V+77)^2-(49-V^2)(121-V^2)\geqslant 0\\ \Leftrightarrow &\ V^3-3.65V-770\geqslant 0.\end{aligned}$$

Đặt $V=2\sqrt{65}T$, có bất phương trình

$$4T^3-3T-\frac{770}{130\sqrt{65}}\geqslant 0\Leftrightarrow u\geqslant u_1=\arccos\frac{770}{130\sqrt{65}}.$$

Chương 3

Một số phương pháp giải toán

Để giải bài toán trước hết phải căn cứ vào dạng, nội dung điều kiện mà chọn phương pháp giải thích hợp. Nếu bài toán có thể giải bằng nhiều cách, thì cần chọn phương pháp tốt nhất theo một tiêu chí nào đó.

Nội dung cơ bản của bài viết này được rút ra từ các bài giảng của tác giả tại Khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học Khoa học Tự nhiên và một số Trường trung học phổ thông chuyên.

Bài viết gồm hai phương pháp cơ bản nhất:

- Phương pháp quy nạp,

- Phương pháp phản chứng,

và năm phương pháp đặc thù để giải các bài toán không mẫu mực. đó là:

- Phương pháp suy luận trực tiếp

- Phương pháp logic mệnh đề

- Phương pháp bảng

- Phương pháp sơ đồ

- Phương pháp đồ thị

Mỗi phương pháp đều có phần tóm tắt lý thuyết, nội dung. Song chủ yếu vẫn là thông qua hệ thống ví dụ để minh hoạ cách ứng dụng để giải toán.

Nhân dịp kỷ niệm 40 năm ngày thành lập *Khối phổ thông chuyên Toán Trường đại học Tổng hợp Hà nội* nay là Khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học khoa học Tự nhiên, đại học Quốc gia Hà nội trong các ví dụ từ phần III trở đi tác giả mạn phép ghi lại tên một số trong các *Thầy Cô* giáo đã gắn bó và cống hiến hết mình cho sự phát triển và thăng hoa của Khối.

3.1 Phương pháp quy nạp

Phương pháp quy nạp có vai trò vô cùng quan trọng trong toán học, khoa học và cuộc sống. Đối với nhiều bài toán phổ thông phương pháp quy nạp cũng cho ta cách giải hữu hiệu.

Suy diễn là quá trình từ "tính chất" của tập thể suy ra "tính chất" của cá thể, nên luôn luôn đúng, còn quá trình ngược lại, tức là quá trình qui nạp: đi từ "tính chất" của một số cá thể suy ra "tính chất" của tập thể, thì không phải lúc nào cũng đúng. Quá trình này chỉ đúng khi nó thoả mãn một số điều kiện nào đó, tức thoả mãn nguyên lý quy nạp.

3.1.1 Nguyên lý quy nạp

Nếu khẳng định $S(n)$ thoả mãn hai điều kiện sau:

a) Đúng với $n = k_0$ (số tự nhiên nhỏ nhất mà $S(n)$ xác định).

b) Từ tính đúng đắn của $S(n)$ đối với $n = t$ (hoặc đối với mọi giá trị của $n(k_0 \leqslant n \leqslant t)$) $(t \geqslant k_0)$ suy ra tính đúng đắn của $S(n)$ đối với $n = t+1$, thì $S(n)$ đúng với mọi $n \geqslant k_0$

3.1.2 Phương pháp chứng minh bằng qui nạp

Giả sử khẳng định $T(n)$ xác định với mọi $n \geqslant t_0$. để chứng minh $T(n)$ đúng với $\forall n \geqslant t_0$ bằng qui nạp, ta cần thực hiện hai bước sau:

a) **Cơ sở quy nạp**

Thực hiện bước này tức là ta thử xem sự đúng đắn của $T(n)$ với $n = t_0$ nghĩa là xét $T(t_0)$ có đúng hay không?

b) **Quy nạp**

Giả sử khẳng định $T(n)$ đã đúng với $n = t$ (hoặc đối với mọi n $t_0 \leqslant n \leqslant t$)). Trên cơ sở giả thiết này suy ra tính đúng đắn của $T(n)$ đối với $n = t+1$, tức $T(t+1)$ đúng.

Nếu cả hai bước trên đều thoả mãn, thì theo nguyên lý quy nạp $T(n)$ đúng với mọi số $n \geqslant 1$ $(n \geqslant t_0)$

Trong quá trình qui nạp nếu không thực hiện đầy đủ cả hai bước: Cơ sở qui nạp và quy nạp, thì có thể dẫn đến kết luận sai lầm chẳng hạn trong các ví dụ sau:

Ví dụ 3.1.1. *Nhà Toán học Đức vĩ đại G. V. Lepnit vào thế kỷ thứ 17 sau khi chứng minh được: Với mọi số nguyên dương n số $n^3 - n$ chia hết cho 3, số $n^5 - n$ chia hết cho 5, số $n^7 - n$ chia hết cho 7 đã bỏ qua cả khâu quy nạp và cơ sở quy nạp mà đưa ra khẳng định: Với mọi số lẻ k và với mọi số tự nhiên n số $n^k - n$ chia hết cho n. Khẳng định này không đúng bởi vì số $2^9 - 2 = 510$ không chia hết cho 9.*

Ví dụ 3.1.2. *Xét tam thức bậc hai $T(x) = x^2 + x + 41$. Khi thay*

$x = 0$ *ta được* $T(0) = 0^2 + 0 + 41 = 41$ *là số nguyên tố.*

$x = 1$ *ta được* $T(1) = 1^2 + 1 + 41 = 43$ *là số ngyuên tố.*

$x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ *được các số nguyên tố tương ứng 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. Như vậy bước cơ sở quy nạp thoả mãn, nhưng nếu bỏ qua bước quy nạp mà kết luận rằng: Khi thay* x *bằng số nguyên không âm tuỳ ý* n *số* $T(n) = n^2 + n + 41$ *là số nguyên tố, thì sẽ sai lầm. Bởi vì, nếu thay* $x = 0, 1, 2, 3, ..., 39$, *đều có* $T(x)$ *là số nguyên tố, nhưng khi* $x = 40$ *lại có* $T(40) = (40)^2 + 40 + 41 = 40[40 + 1] + 41 = 40.41 + 41 = (41)^2$ *là hợp số!*

3.1.3 Vận dụng phương pháp qui nạp để giải toán đại số và số học

phương pháp quy nạp được sử dụng trong tính toán, trong chứng minh và suy luận dưới nhiều dạng khác nhau. Sau đây sẽ thông qua hệ thống ví dụ để minh hoạ một số vận dụng phương pháp quy nạp.

Vận dụng phương pháp qui nạp trong tính toán

để giải quyết một bài tập tính toán nào đó bằng phương pháp quy nạp ta:

- Vận dụng bước quy nạp cho một vài "dạng số liệu" ban đầu. Trên cơ sở đó dự đoán "dạng số liệu tổng quát".

- Sau đó vận dụng bước quy nạp để chứng minh "dạng số liệu" dự đoán chính là "dạng số liệu" cần tìm.

Ví dụ 3.1.3. *Hãy tính tổng của n số tự nhiên đầu tiên.*

Giải.

Ta ký hiệu tổng của k số tự nhiên đầu tiên là S_k

1) Cơ sở quy nạp

Với $k = 1$ có $S_1 = 1 = \dfrac{1.(1+1)}{2}$

Với $k = 2$ có $S_2 = 1 + 2 = 3 = \dfrac{2.(2+1)}{2}$

Với $k = 3$ có $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6 = \dfrac{3.(3+1)}{2}$

Trên cơ sở dạng của S_1, S_2, S_3 ta dự đoán tổng của n số tự nhiên đầu tiên S_n có dạng:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

2) Vận dụng quy nạp để chứng minh $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ là dạng cần tìm.

Thật vậy! Giả sử dạng tổng đã đúng với $n = k \geqslant 1$, tức tổng của k số tự nhiên đầu tiên đã có:

$$S_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}\cdot$$

Khi đó với $n = k+1$, ta có:

$$S_{k+1} = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Vậy đẳng thức (1) đúng với mọi số tự nhiên k, nên với $n = k$ có $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ví dụ 3.1.4. *Hãy tính tổng bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.*

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Dùng S_k để ký hiệu tổng bình phương của k số tự nhiên đầu tiên. Khi đó với

$k = 1$ có $S_1 = 1^2 = 1 = \dfrac{1.(1+1)(2.1+1)}{6}$

$k = 2$ có $S_2 = 1^2 + 2^3 = 5 = \dfrac{2.(2+1)(2.2+1)}{6}$

$k = 3$ có $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \dfrac{3.(3+1)(2.3+1)}{6}$

Trên cơ sơ dạng S_1, S_2, S_3 dự kiến tổng bình phương của k số tự nhiên đầu tiên

$$S_k = \frac{k(k+1)(2.k+1)}{6}\cdot$$

2) Vận dụng quy nạp để chứng minh $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ chính là tổng bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.

Thật vậy, giả sử với $n = k \geqslant 1$, tức tổng bình phương của k số tự hiên đầu tiên đã có:

$$S_k = 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2.k+1)}{6}$$

Khi đó với $n = k+1$ ta có:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2.k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k+1}{6}[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{k+1}{6}[k(2k+3) + 2(2k+3)] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên k, nên với $n = k$ có

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ví dụ 3.1.5. *Hãy tìm u_n, nếu biết: $u_1 = 1$ với mọi số tự nhiên $k > 1$ đều có*

$$u_k = u_{k-1} + 3. \tag{1}$$

Giải.

1) Cơ sở qui nạp: Xét ba số tự nhiên đầu tiên:

$k = 1$ có $u_1 = 1 = 3.1 - 2$

$k = 2$ có $u_2 = u_1 + 3 = 1 + 3 = 4 = 3.2 - 2$

$k = 3$ có $u_3 = u_2 + 3 = 4 + 3 = 7 = 3.3 - 2$

Trên cơ sở dạng của u_1, u_2, u_3 dự kiến

$$u_n = 3.n - 2. \tag{2}$$

2) Vận dụng quy nạp chứng minh dạng (2) đúng với mọi số tự nhiên n.

Thật vậy! Giả sử với $n = k \geqslant 1,\ u_k = 3.k - 2$. Khi đó, theo đẳng thức (1) có:

$$u_{k+1} = u_k + 3 = 3.k - 2 + 3 = 3(k+1) - 2.$$

Vậy đẳng thức (2) đúng với mọi n, nên có

$$u_n = 3n - 2.$$

Ví dụ 3.1.6. *Tích $1.2\ldots n$ được ký hiệu bằng $n!$ và đọc là n giai thừa. Dễ dàng thấy:* $1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120.$

Hãy tính

$$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n!$$

Giải.

1) Cơ sở quy nạp. Xét bốn tổng đầu tiên.

với $n = 1$ có $S_1 = 1.1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1$

$n = 2$ có $S_2 = 1.1! + 2.2! = 5 = 6 - 1 = 3! - 1$

$n = 3$ có $S_3 = 1.1! + 2.2! + 3.3! = 23 = 24 - 1 = 4! - 1$

$n = 4$ có $S_4 = 1.1! + 2.2! + 3.3! + 4.4! = 119 = 120 - 1 = 5! - 1.$

Trên cơ sở bốn tổng đầu tiên dự kiến

$$S_n = (n+1)! - 1. \tag{1}$$

2) Vận dụng quy nạp để chứng minh đẳng thức (1) đúng với mọi số tự nhiên.

Thật vậy! Giả sử với $n = k \geqslant 1$ đã có $S_k = (k+1)! - 1$.

Khi đó với $n = k + 1$ ta có:

$$\begin{aligned} S_{k+1} =& 1.1! + 2.2! + 3.3! + \O ots + k.k! + (k+1)(k+1)! \\ =& S_k + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\ =& (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức (1) đúng với mọi số tự nhiên n, nên có

$$S_n = (n+1)! - 1$$

Vận dụng phương pháp quy nạp trong chứng minh

Vận dụng cơ sở quy nạp để chứng tỏ sự đúng đắn của khẳng định đối với vài số tự nhiên đầu tiên mà khẳng định thoả mãn. Sau đó dùng quy nạp để chứng minh khẳng định đúng với mọi số tự nhiên.

Ví dụ 3.1.7. *Hãy chứng minh rằng*

$$S_n = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$ có $S_1 = (-1)^{1-1}1^2 = 1 = (-1)^{1-1}\dfrac{1(1+1)}{2}$ đẳng thức đúng.

2) Quy nạp

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, nghĩa là

$$S_k = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$$

Do đó với $n = k + 1$ có

$$\begin{aligned} S_{k+1} =& 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 \\ =& S_k + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 \\ =& (-1)^k\left(-\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)^2\right) = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n, nên

$$S_n = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ví dụ 3.1.8. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$ có $\dfrac{1^2}{1.3} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1(1+1)}{2(2.1+1)}$. đẳng thức đúng

2) Quy nạp

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, nghĩa là

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} \tag{1}$$

Khi đó với $n = k+1$ ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}\\ &= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2(k+1))(2(k+1)+1)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2(k+1)+1)}\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n.

Ví dụ 3.1.9. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$ ta có $\dfrac{1}{(4.1-3)(4.1+1)} = \dfrac{1}{1.5} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{4.1+1}$. đẳng thức thoả mãn.

2) Quy nạp

Giải sử đẳng thức đã đúng với $n = k$, nghĩa là

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{k}{4k+1} \tag{1}$$

Theo đẳng thức (1) với $n = k+1$ có:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}\\ &= \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4(k+1)+1}\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi n.

Vận dụng quy tắc quy nạp để xác định tính chia hết

Trước hết vận dụng cơ sở quy nạp để xét tính đúng đắn của khẳng định với những sô tự nhiên đầu tiên. Sau đó vận dụng quy nạp để xác định tính đúng đắn của khảng định đối với mọi số tự nhiên.

Ví dụ 3.1.10. *Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho 9.*

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với ba số tự nhiên đầu tiên 1, 2, 3 có $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ chia hết cho 9, nên khẳng định đúng.

2) Quy nạp

Giả sử đối với số tự nhiên k nào đó khẳng định đã đúng, nghĩa là tổng lập phương

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$$

đã chia hết cho 9, nghĩa là tồn tại số tự nhiên t, để

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9t \tag{1}$$

Khi đó theo (1) đối với số tự nhiên $k+1$ tổng lập phương

$$\begin{aligned}
&(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = \\
&= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 \\
&= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3) \\
&= 9t + 9(k^2 + 3k + 3) \\
&= 9(t + k^2 + 3k + 3)
\end{aligned}$$

chia hết cho 9, nên khẳng định đúng với tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp tuỳ ý.

Ví dụ 3.1.11. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên không âm n số*

$$S_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

chia hết cho 133.

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 0$ số $S_0 = 11^{0+2} + 12^{2.0+1} = 11^2 + 12 = 121 + 12 = 133$ chia hết cho 133.

2) Quy nạp

Giải sử khẳng định đã đúng với $n = k \geqslant 0$, tức số

$$S_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$$

đã chia hết cho 133, tức tồn tại số tự nhiên t, để

$$11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133t. \tag{1}$$

Khi đó theo (1), với $n = k + 1$ ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 11^{k+1+2} + 12^{2(k+1)+1} = 11^{k+2+1} + 12^{2k+1+2} \\ &= 11.11^{k+2} + 144.12^{2k+1} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133.12^{2k+1} \\ &= 133t + 133.12^{2k+1} = 133(t + 12^{2k+1}) \end{aligned}$$

chia hết cho 133.

Vậy khẳng định đúng với mọi số nguyên không âm n.

Ví dụ 3.1.12. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n số*

$$S_n = 4^n + 15n - 1$$

chia hết cho 9.

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$ số $S_1 = 4^1 + 15.1 - 1 = 18$ chia hết cho 9.

2) Quy nạp

Giải sử khẳng định đã đúng với $n = k$, nghĩa là số

$$S_k = 4^k + 15.k - 1$$

đã chia hết cho 9, tức tồn tại số tự nhiên t, để $4^k + 15k - 1 = 9t$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 4^{k+1} + 15(k-1) - 1 = 4.4^k + 15k + 14 = 4.4^k + 60k - 4 - 45k + 18 \\ &= 4(4^k + 15k - 1) - 9(5k - 2) = 4.9t - 9(5k - 2) = 9(4t - 5k - 2) \end{aligned}$$

chia hết cho 9.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên dương.

Ví dụ 3.1.13. *Với mọi số nguyên dương n đặt*

$$A_n = 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}} \Big\} \ n \text{ lần}.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m \geqslant n \geqslant 2$. Hiệu $A_m - A_n$ chia hết cho 20.

Giải. Để chứng minh kết luận trên trước hết cần khẳng định rằng với mọi số nguyên $k \geqslant 2$ đều tồn tại số tự nhiên t_k, để

$$A_k = 20t_k + 3 \tag{1}$$

I) Chứng minh quan hệ (1)

1) Cơ sở quy nạp

Với $k = 2$ có $A_2 = 7^7 = 7^3.7^4 = 343.2401 = 823543 = 20.41177 + 3$.

2) Quy nạp

Giả sử khẳng định đã đúng với $k = s \geqslant 2$ nghĩa là đối với A_s đã tồn tại số tự nhiên t_s, để

$$A_s = 20t_s + 3 \tag{2}$$

Khi đó, theo (2), với $k = s + 1$ số

$$\begin{aligned}
A_{s+1} =& 7^{A_s} = 7^{20t_s+3} = (7^4)^{5t_s}7^3 = (2401)^{5t_s}(3443)\\
=&(20.120 + 1)^{5t_s}(20.17 + 3)\\
=&[(20.120)^{5t_s} + C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-1} + \cdots +\\
&+ C^{5t_s-1}_{5t_s}(20.120) + 1](20.17 + 3)\\
=&20.17[(20.120)^{5t_s} + C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-1} + \cdots +\\
&+ C^{5t_s-1}_{5t_s}](20.120) + 1] + 20.120[(20.120)^{5t_s-1}+\\
&+ C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-2} + \cdots + C^{5t_s-1}_{5t_s}] + 3\\
=&20\{17[(20.120)^{5t_s} + C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-1} + \cdots +\\
&+ C^{5t_s-1}_{5t_s}(20.120) + 1] + 120[20(120)^{5t_s-1} + C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-2}\\
&+ \cdots + C^{5t_s-1}_{5t_s}]\} + 3 = 20t_{s+1} + 3.
\end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $k \geqslant 2$

II) Chứng minh với mọi số tự nhiên $m \geqslant n \geqslant 2$ số $A_m - A_n$ chia hết cho 20

Từ quan hệ (2) có

$$A_m - A_n = 20t_m + 3 - (20t_n + 3) = 20t_m - 20t_n = 20(t_m - t_n)$$

nên $A_m - A_n$ chia hết cho 20.

Vận dụng quy nạp để chứng minh bất đẳng thức

Vận dụng bước cơ sở quy nạp để khẳng định bất đẳng thức thoả mãn với những số tự nhiên đầu tiên mà nó xác định. Sau đó dùng quy nạp để khẳng định bất đẳng thức đúng với tất cả các số tự nhiên mà nó xác định

Ví dụ 3.1.14. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

Giải.

Dùng S_n để ký hiệu vế trái của bất đẳng thức trên,

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 2$ có
$$S_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

2) Quy nạp

Giả sử bất đẳng thức đã đúng với $n = k$, nghĩa là đã có
$$S_k > \frac{13}{24}. \tag{1}$$

Ta có
$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}, \\ S_{k+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}, \end{aligned}$$
nên
$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0$$
với mọi số tự nhiên k. Do đó
$$S_{k+1} > S_k \tag{2}$$

Từ (1) và (2) có $S_{k+1} > \dfrac{13}{24}$.

Ví dụ 3.1.15. *Chứng minh rằng với mọi số dương x và số tự nhiên n bất kỳ đều có bất đẳng thức*
$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geqslant n+1 \tag{1}$$

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

a) Với $n = 1$ bất đẳng thức (1) thoả mãn và có dạng
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \tag{2}$$
Vì $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, nên $x^2 + 1 \geqslant 2x$.

b) Với $n = 2$ đẳng thức (1) có dạng
$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geqslant 3 \tag{3}$$
đẳng thức (2) đúng với mọi $x > 0$, nên khi thay x bằng x^2 ta có bất đẳng thức
$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$$

Thêm 1 cả hai vế của bất đẳng thức này ta được bất đẳng thức (3)

Vậy với hai số tự nhiên đầu tiên 1 và 2 bất đẳng thức (1) thoả mãn.

2) Quy nạp

Giả sử k là số tự nhiên nào đó và bất đẳng thức đã thoả mãn với $n = k$, nghĩa là

$$x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geqslant k + 1 \tag{4}$$

Ta cần khẳng định bất đẳng thức (1) thoả mãn với $n = k + 2$, nghĩa là

$$x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + + \frac{1}{x^{k+2}} \geqslant k + 3 \tag{5}$$

Thật vậy! từ bất đẳng thức (2) thay x bằng x^{k+2} được bất đẳng thức

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \geqslant 2 \tag{6}$$

nên từ (4) và (6) có

$$\begin{aligned} x^{k+2} + x^k + \cdots + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} &= x^k + \cdots + \frac{1}{x^k} + x^{k+2} + + \frac{1}{x^{k+2}} \\ &\geqslant k + 1 + 2 = k + 3 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức (1) đúng với mọi số dương dương x và với mọi số tự nhiên.

3.1.4 Vận dụng phương pháp quy nạp để giải bài tập hình học

Tính toán bằng quy nạp

Vận dụng bước cơ sở quy nạp để tính giá trị các đại lượng tương ứng với những số tự nhiên đầu tiên mà chúng xác định. Trên cơ sở đó mà dự đoán kết quả cho trường hợp tổng quát đối với mọi số tự nhiên mà đại lượng xác định

Sau đó dùng quy nạp để khẳng định tính đúng đắn của kết quả dự đoán

Ví dụ 3.1.16. *Hãy tính số tam giác $T(n)$ nhận được khi chia một đa giác n cạnh bằng các đường chéo không cắt nhau.*

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

đối với $n = 3$ có $T(3) = 1$

đối với $n = 4$, tứ giác (Hình 1)

được chia thành hai tam giác,

nên $T(4) = 2$.

Trên cơ sở $T(3)$, $T(4)$ dự đoán

$$T(n) = n - 2 \tag{1}$$

2) Vận dụng quy nạp để chứng minh tính đúng đắn của công thức (1). Giả sử mỗi số tự nhiên k ($3 \leqslant k < n$) đã có $T(k) = k - 2$, tức mọi đa giác k - cạnh được chia thành $k - 2$ tam giác nhờ các đường chéo không cắt nhau. Xét một cách chia đa giác n cạnh $A_1A_2 \dots A_n$. Giả sử đường chéo A_1A_k chia đa giác n-cạnh $A_1A_2 \dots A_n$ thành hai đa giác k-cạnh $A_1A_2 \dots A_k$ và đa giác $(n - k + 2)$-cạnh $A_1A_kA_{k+1} \dots A_n$.

Vì $n > k \geqslant 3$, nên $3 \leqslant n - k + 2 < n$. Do đó theo giải thiết quy nạp $T(k) = k - 2$ và $T(n - k + 2) = n - k + 2 - 2 = n - k$.

$$T(n) = T(k) + T(n - k + 2) = k - 2 + n - k = n - 2$$

Vậy công thức (1) đúng với mọi số tự nhiên $n \geqslant 3$.

Ví dụ 3.1.17. *Hãy tính bán kính đường tròn nội tiếp (r_n) và bán kính đường tròn ngoại tiếp (R_n) của đa giác đều 2^n-cạnh có chu vi bằng P.*

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 2$ tứ giác với chu vi P có $r_2 = \dfrac{P}{8}$ và $R_2 = \dfrac{P\sqrt{2}}{8}$

2) Quy nạp

Giải sử đối với đa giác đều 2^n-cạnh với chu vi P ta đã tính được bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp r_n và R_n. Trên cơ sở đó tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp r_{n+1} và R_{n+1} của đa giác đều 2^{n+1}-cạnh với cùng chu vi P (Hình 2).

kip-5cm

Giả sử AC là cạnh của đa giác đều 2^n-cạnh đối với chu vi P. điểm O là tâm của đa giác, B-điểm giữa của cung AC, D- điểm giữa của dây AC, EF là đường trung bình của tam giác của tam giác ABC và I là điểm giữa của EF.

Vì $\widehat{EOF} = \widehat{EOB} + \widehat{FOB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} + \dfrac{1}{2}\widehat{COB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC}$, nên EF bằng cạnh của đa giác đều 2^{n+1} - cạnh nội tiếp trong đường tròn bán kính OE. Ngoài ra, đa giác đều 2^{n+1} - cạnh này còn có chu vi bằng $2^{n+1}EF = 2^{n+1}\dfrac{AB}{2} = 2^nAB$, tức bằng P. Bởi vậy $r_{n+1} = OI$ và $R_{n+1} = OE$.

Hươn nữa, vì EF là đường trung bình của tam giác ABC, nên $BI = ID$. Bởi vậy $OB - OI = OI - OD$, nghĩa là $R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n$, nên $r_{n+1} = \dfrac{R_n + r_n}{2}$.

Do tam giác OEB vuông tại E, nên $OE^2 = OB.OI$, nghĩa là $R_{n+1}^2 = R_n r_{n+1}$ và $R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$.

Như vậy đối với đa giác đều 2^{n+1} cạnh đối với chu vi P ta đã tính được

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}, \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}.$$

Chứng minh bằng quy nạp

Trước hết vận dụng bước cơ sở quy nạp để sét tính đúng đắn của khẳng định đối với một vài hình đơn giản nhất (tức những hình xuất phát).

Sau đó vận dụng bước quy nạp để xác định tính đúng đắn của khẳng định đối với hình tuỳ ý (thuộc phạm vi khẳng định).

Ví dụ 3.1.18. *(Tô mầu bằng quy nạp)*

Trên mặt phẳng cho n $(n \geqslant 1)$ hình tròn. Chứng minh rằng với bất kỳ cách sắp đặt nào, thì hình nhận được cũng có thể tô bằng hai mầu để cho hai phần mặt phẳng kề nhau (có biên chung) cũng được tô bằng hai màu khác nhau.

Giải. Bài toán này cũng được giải quyết băng quy nạp

1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$, trên mặt phẳng chỉ có một hình tròn. Ta tô hình tròn bằng màu đen. Khi đó phần còn lại kề với hình tròn được để trắng, nên hai phần của mặt phẳng kề nhau có màu khác nhau.

2) Quy nạp

Giả sử khẳng định cũng đúng với bức tranh gồm n hình tròn. Giả sử trên mặt phẳng cho $n+1$ hình tròn tuỳ ý. Xoá đi một trong những hình tròn sẽ được bức tranh gồm n hình tròn (hình 3). Theo giả thiết quy nạp, bức tranh này chỉ cần sươn 2 màu, chẳng hạn đen, trắng mà hai miền kề nhau đều có hai màu khác nhau.

Khôi phục lại hình tròn đã xoá đi, tức là trở lại hình xuất phát, gồm $n+1$ hình tròn, rồi theo một phía đối với hình tròn vừa khôi phục, chẳng hạn phía trong của hình tròn này thay đổi các màu tô đã tô bằng màu ngược lại, sẽ được: bước tranh gồm $n+1$ hình tròn được tô bằng hai màu, mà hai miền kề nhau tuỳ ý đều có màu khác nhau (Hình 4).

Bài toán được giải quyết xong!

Ví dụ 3.1.19. *(Chắp hình bằng quy nạp)*

Cho $n (n \geqslant 1)$ hình vuông tuỳ ý. Chứng minh rằng từ các hình vuông này có thể cắt và chắp thành một hình vuông lớn.

Giải.

Bài toán được giải quyết bằng quy nạp

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$. Khi đó có một hình vuông nên hiển nhiên, khẳng định đúng

Với $n = 2$, có hai hình vuông: $ABCD$ và $abcd$. Khi đó có thể cắt và chắp thành một hình vuông như sau: giả sử hình vuông $ABCD$ không nhỏ hươn hình $abcd$. Dùng x ký hiệu độ dài cạnh hình vuông $ABCD$, y là độ dài cạnh hình vuông $abcd$, $(x \geqslant y)$. Ta cắt các hình vuông $ABCD$ và chắp thành hình vuông $A'B'C'D'$ như Hình 5

2) Quy nạp

Giả sử khẳng định đã đúng với n $(n \geqslant 1)$ hình vuông. Giả sử có $n + 1$ hình vuông tuỳ ý $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$.

Chúng ta chọn hai hình vuông tuỳ ý, chẳng hạn V_n và V_{n+1} và cắt và chắp thành hình vuông ${V_n}'$. Theo giả thiết quy nạp, đối với n hình vuông:

$$V_1, V_2, \ldots, {V_n}'$$

Ta có thể cắt và chắp thành một hình vuông V. Như vậy từ $n + 1$ hình vuông $V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}$ đã cắt và chắp thành hình vuông V. Vậy bài toán đã giải quyết xong.

Dựng hình vuông bằng quy nạp

Trong bước cơ sở quy nạp ta dựng hình dạng "xuất phát", tức là hình tương ứng với số tự nhiên đầu tiên mà nó xác định. Sau đó vận dụng bước quy nạp để dựng hình tuỳ ý thoả mãn các tính chất đã cho.

Ví dụ 3.1.20. *(Dựng hình bằng quy nạp)*

Trên mặt phẳng cho $2n + 1$ $(n \geqslant 1)$ điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng. Hãy dựng một đa giác $2n + 1$ đỉnh, sao cho $2n + 1$ điểm đã cho trở thành trung điểm thuộc các cạnh của đa giác.

Giải. Bài toán giải quyết bằng quy nạp.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$, trên mặt phẳng cho 3 điểm. Bài toán quy về việc dựng một tam giác khi biết trung điểm của ba cạnh. đây là bài toán quen biết đã được trình bầy trong sách hình học sơ cấp.

2) Quy nạp

Giải sử đối với $2k + 1$ $(k \geqslant 1)$ điểm tuỳ ý không có ba điểm nào thẳng hàng, ta đều dựng được đa giác $2k + 1$ đỉnh, để các điểm này là trung điểm thuộc các cạnh của đa giác.

Xét $2(k + 1) + 1$ điểm tuỳ ý không có ba điểm nào thẳng hàng

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{2k},\ A_{2k+1},\ A_{2k+2},\ A_{2k+3}.$$

Giả sử các điểm này là trung điểm thuộc các cạnh của đa giác B_1, B_2, $\ldots$, B_{2k+2}, B_{2k+3} (hình 6).

Khi đó A_{2k+1}, A_{2k+2}, A_{2k+3} là trung điểm của các cạnh tương ứng $B_{2k+1}B_{2k+2}$, $B_{2k+2}B_{2k+3}$ và $B_{2k+3}B_1$. Giả sử A là trung điểm của cạnh B_1B_{2k+1}. Tứ giác $AA_{2k+1}A_{2k+2}\ A_{2k+3}$ là một hình bình hành. Hình bình hành $AA_{2k+1}A_{2k+2}A_{2k+3}$ có ba đỉnh A_{2k+1}, A_{2k+2}, A_{2k+3} cho trước nên đỉnh thứ tư A hoàn toàn có thể xác định được bằng cách qua điểm A_{2k+3}, kẻ đường thẳng a_1 song song với đoạn thẳng $A_{2k+1}A_{2k+2}$. Từ A_{2k+1} kẻ a_2 song song với đoạn thẳng $A_{2k+3}A_{2k+2}$. Giao điểm của a_1 và a_2 chính là A cần xác định.

Theo giả thiết quy nạp đối với $2k+1$ điểm A_1, $A_2, \ldots, A_{2k}$, A ta đã dựng được đa giác B_1, $B_2, \ldots, B_{2k+1}$, để A_i là trung điểm của cạnh $B_iB_{i+1}\,(1 \leqslant i \leqslant 2k)$ và A là trung điểm của cạnh B_1B_{2k+1}. Sau đó B_1 kẻ đường thẳng song song với đoạn thẳng AA_{2k+1}, cắt đoạn thẳng $B_{2k+1}A_{2k+1}$ kéo dài tại B_{2k+2}. Từ B_{2k+1} kẻ đường song song với đoạn thẳng AA_{2k+2}, cắt đoạn thẳng B_1A_{2k+3} kéo dài tại B_{2k+3}. Vì $B_{2k+1}A = AB_1$ và AA_{2k+3} song song với B_1B_{2k+2}, nên $B_{2k+1}A_{2k+1} = A_{2k+1}B_{2k+2}$. Tương tự có $B_1B_{2k+3} = A_{2k+3}B_{2k+3}$, $B_{2k+3}A_{2k+2} = A_{2k+2}B_{2k+2}$.

Vậy đa giác $2k+3$ đỉnh $B_1B_2 \ldots B_{2k+2}B_{2k+3}$ nhận các điểm đã cho A_1, A_2, $\ldots$, A_{2k+3} làm trung điểm các cạnh

Ví dụ 3.1.21. *Trên mặt phẳng cho n điểm. Hãy dựng một đa giác n - cạnh, mà các cạnh đó đều là đáy của các tam giác cân với đỉnh là n điểm đã cho và các góc ở đỉnh có độ lớn tương ứng là α_1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

Giải.

Trước khi trình bầy lười giải chúng tôi xin lưu ý rằng trong các góc α_1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ có thể có một số góc lớn hươn 150^o, nên quy ước: Nếu $\alpha_i < 180^o$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, thì tam giác cân tương ứng nằm về phía ngoài đa giác, còn khi $\alpha_i > 180^o$ tam giác cân tương ứng nằm về phía trong của đa giác (trong đó góc ở đỉnh của tam giác này băng $360^o - \alpha_i$).

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 3$, khi đó đa giác cân dựng là tam giác. đối với trường hợp này sẽ trình bầy cách dựng tam giác thoả mãn các yêu cầu đã cho.

a) Giả sử tam giác cần tìm đã dựng được. Nó có đỉnh là x_1, x_2, x_3, các tam giác cân với đáy x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 đỉnh là A_1, A_2, A_3 có góc ở đỉnh là α_1, α_2, α_3 (Hình 7).

Thực hiện phép quay mặt phẳng theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

- một góc α_1 xung quanh điểm A_1, để x_1 trùng với x_2

- một góc bằng α_2 xung quanh điểm A_2 để x_2 trùng với x_3

kip-6.5cm

Ta nhận thấy rằng hai phép quay này được thực hiện liên tục kế tiếp nhau, thì tương ứng với phép quay một góc $\alpha_1 + \alpha_2$ theo ngược chiều kim đồng hồ xung quanh điểm A được xác định nhờ các điểm A_1, A_2 và các góc α_1, α_2 bằng cách sau: Từ A_1, A_2 kẻ hai tia hợp với đoạn A_1A_2 các góc $\dfrac{\alpha_1}{2}$ và $\dfrac{\alpha_2}{2}$, cắt nhau tại điểm A. đây chính là tâm của phép quay mặt phẳng một góc bằng $\alpha_1 + \alpha_2$ (có thể xem trong (1)).

Trong phép quay này đỉnh x_1 chuyển sang x_3. Bởi vậy đỉnh x_3 sẽ chuyển về x_1 với phép quay mặt phẳng xung quanh A một góc $360^0 - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Do đó điểm A chính là đỉnh của tam giác cân với cạnh đáy x_1x_2 và góc ở đỉnh là $360 - (\alpha_1 + \alpha_2)$.

b) Trên cơ sở phân tích ở trên suy ra cách xây dựng tam giác $x_1x_2x_3$ như sau:

Với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq k.360$ điểm A không trùng với A_3. Khi đó từ A và A_3 kẻ về cả hai phía hợp với AA_3 các góc $\dfrac{360 - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$ và $\dfrac{\alpha_3}{2}$. Cạnh của các góc này cắt nhau tại các điểm tương ứng là đỉnh x_1 và x_3. Sau đó từ điểm A_1 kẻ tia hợp với A_1x_1 góc α_1 và từ A_2 kẻ tia hợp với Ax_3 góc α_2. Giao điểm của hai tia này chính là đỉnh x_2.

Như vậy tam giác $x_1x_2x_3$ cần tìm đã dựng xong.

2) Quy nạp

Giả sử với $n = k \geqslant 3$ ta đã biết cách dựng đa giác k - cạnh mà các tam giác cân có đáy là cạnh của đa giác, đỉnh là các điểm cho trước với độ lớn các góc ở đỉnh được xác định. Trên cơ sở này ta khẳng định cho trường hợp $n = k + 1$, nghĩa là chỉ ra cách xây dựng đa giác $(k + 1)$ - cạnh thoả mãn các điều kiện của bài toán.

kip-7cm

Giả sử đa giác $(k+1)$ - cạnh cần xây dựng là $x_1x_2...x_nx_{n+1}$ có các tam giác cân đáy là cạnh của đa giác, đỉnh là các điểm đã cho A_1, $A_2, \ldots,$ A_k, A_{k+1} và $\widehat{A}_i = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k+1)$ (Hình 8).

Xét tam giác $x_1x_kx_{k+1}$. Tương tự như trong phần cơ sở quy nạp 10) khi quay mặt phẳng theo chiều ngược chiều kim đồng hồ xung quanh A_k để x_k trùng với x_{k+1} và tiếp theo quay xung quanh A_{k+1} để x_{k+1} trùng với x_1, thì cũng chính là quay mặt phẳng một điểm (A) để x_k trùng với x_1, nên khi quay mặt phẳng xung quanh điểm A một góc $360^o - (\alpha_k + \alpha_{k+1})$, thì x_1 sẽ trùng với x_k. Do đó A là đỉnh của tam giác cân với cạnh là đường chéo x_1x_2 và $\widehat{A} = 360^o - (\alpha_k + \alpha_{k+1})$. Khi đó điểm A chính là giao điểm của các tia A_ks, $A_{k+1}t$ hợp với đoạn A_kA_{k+1} các góc tương ứng $\dfrac{\alpha_k}{2}$ và $\dfrac{\alpha_{k+1}}{2}$. Như vậy theo các điểm A_k, A_{k+1} và các góc α_k, α_{k+1} cho trước ta xác định được điểm A, để đa giác k - cạnh $x_1, x_2, \ldots, x_k$ có các cạnh là đáy của các tam giác cân với đỉnh là các điểm A_1, $A_2, \ldots,$ A_{k-1}, A và các góc ở đỉnh là α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_{k-1}, $360^o - (\alpha_k + \alpha_{k+1})$. Bởi vậy bài toán được đưa về yêu cầu xây dựng đa giác k - cạnh (D) có cạnh là đáy các tam giác cân với đỉnh là các điểm A_1, $A_2, \ldots, A_{k-1}$, A và các góc ở đỉnh là α_1, $\alpha_2, \ldots$, $\alpha_{k-1}, 360^o - (\alpha_k + \alpha_{k+1})$. Nhưng theo giả thiết quy nạp đa giác D có k cạnh đã dựng được.

Sau khi đa giác D đã dựng xong, để xác định đỉnh thứ $k+1$ từ A_k kẻ một tia hợp với $A_k x_1$ một góc bằng α_k và từ A_{k+1} kẻ một tia hợp với $A_{k+1}x_1$ một góc bằng α_{k+1}. Giao điểm của hai tia này chính là đỉnh x_{k+1} của đa giác cần tìm.

đối với trường hợp $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k.360^o$ (k là số tự nhiên), thì bài toán không xác định.

3.2 Phương pháp phản chứng

Khi giải toán, đặc biệt các bài toán logic, một trong những phương pháp được dùng một cách rất thuận lợi đó là phương pháp phản chứng dựa trên nguyên lý Dirichlet do nhà toán học Đức nổi tiếng Preter Dirichlet (1805-1859) đề xuất, mà dạng đươn giản nhất của nguyên lý này có thể phát biểu như sau: " Không thể nhốt 7 chú thỏ vào 3 căn lồng, sao cho mỗi lồng không có quá 2 con thỏ". Nói cách khác: "Nếu nhốt 7 chú thỏ vào 3 cái lồng, thì có ít nhất một lồng chứa không ít hươn 3 chú thỏ".

3.2.1 Nguyên lý Dirichlet còn được phát biểu dưới nhiều dạng tương tự khác:

Dạng tập hợp:

"Nêu tập hợp gồm n phần tử, được biểu diễn dưới dạng hợp của k tập con, thì phải có ít nhất một tập con chứa không ít hươn $\dfrac{n}{k}$ phần tử ".

Dạng hình học:

1. "Nếu tổng diện tích của một số hình nhỏ hươn S, thì không thể dùng hình này để phủ lên một hình có diện tích bằng S".

2. Nếu trên đoạn thẳng có độ dài bằng 1 phân bố một số đoạn thẳng với tổng độ dài bằng L, thì sẽ tìm được một điểm được phủ bằng không ít hươn $[L]$ đoạn thẳng.

3. Nếu các khoảng F_1, $F_2, \ldots, F_n$ có độ dài tương ứng $l_1, l_2, \ldots, l_n$ chứa trong khoảng F, có độ dài l và $l_1 + l_2 + \cdots + l_n > kl$, thì sẽ có $k+1$ khoảng nào đó trong các khoảng đã cho có điểm chung.

4. Nêu các hình F_1, $F_2, \ldots, F_n$ với diện tích tương ứng S_1, $S_2, \ldots, S_n$ chứa trong hình F có diện tích S và $S_1 + S_2 + \cdots + S_n > kS$ thì sẽ có $k+1$ hình trong các hình đã cho có điểm chung.

Dạng số học: Nếu trung bình cộng của một số số lớn hươn a, thì sẽ có ít nhất một số trong các số này lớn hươn a.

Sau đây trình bầy một số ví dụ về ứng dụng phương pháp phản chứng trong việc giải các bài toán. Trước hết chúng ta sẽ giải một số bài toán bằng cách chọn các chú thỏ thích hợp

3.2.2 Vận dụng phương pháp phản chứng để giải toán

Vận dụng phương pháp phản chứng để xác định tính chia hết

để có thể vận dụng được phương pháp phản chứng ta phải căn cứ vào đối tượng, tư liệu cho trong bài toán và quan hệ giữa chúng mà tạo ra "thỏ" và "lồng" thích hợp.

Ví dụ 3.2.1. *Chứng minh rằng có thể tìm được số dạng*

$$19651965.........1965000...0$$

chia hết cho 2000.

Giải.

Dùng A_m để ký hiệu số gồm m số 1965 Viết liên tiếp

$$A_m = \underbrace{19651965.........1965}_{m \text{ lần } 1965}$$

Xét dãy gồm các số A_i $(1 \leqslant i \leqslant 2000)$

$$1965,\ 1965,\ 1965, \ldots, \underbrace{19651965.........1965}_{2000 \text{ lần } 1965} \tag{1}$$

Chia các số thuộc dãy (1) cho 2000 được 2000 số dư tương ứng r_i $(1 \leqslant i \leqslant 2000)$.

Vì các số A_i $(1 \leqslant i \leqslant 2000)$ đều lẻ nên không chia hết cho 2000. Do đó 2000 số dư r_i $(1 \leqslant i \leqslant 2000)$ (thỏ) chỉ thuộc không quá 1999 loại (lồng). Bởi vậy phải có ít nhất hai số dư giống nhau. Giả sử $(1 \leqslant n,\ m \leqslant 2000)$ $m > n$ và $r_m = r_n$.

Khi đó số

$$\begin{aligned} A_m - A_n &= \underbrace{19651965.........1965}_{m \text{ lần } 1965} - \underbrace{19651965.........1965}_{n \text{ lần } 1965} \\ &= \underbrace{19651965.........1965}_{m-n \text{ lần } 1965}\underbrace{00.........00}_{4n \text{ số } 0} \end{aligned}$$

chia hết cho 2000.

Ví dụ 3.2.2. *Chứng minh rằng từ 11 số tự nhiên tuỳ ý luôn luôn có thể chọn ra 2 số mà hiệu bình phương của chúng chia hết cho 20.*

Giải.

đem 11 số tự nhiên tuỳ ý đã chọn ra a_i $(1 \leqslant i \leqslant 1)$ chia cho 10 được 11 số dư tương ứng r_i (THỏ), nhưng thuộc không quá 10 loại (LòNG), nên phải có ít nhất hai số dư thuộc cùng một loại.

Giả sử a_i, a_j $(1 \leqslant i, j \leqslant 11)$ có cùng số dư là r khi chia cho 10. Khi đó có các số tự nhiên s, t để

$$\begin{aligned}
&a_i = 10s + r, \quad a_j = 0t + r, \\
&a_i - a_j = 10s + r - (10t + r) = 10(s - t) \\
&a_i + a_j = 10s + r + 10t + r = 2[5(s + t) + 1]
\end{aligned}$$

Do đó

$$a_i^2 - a_j^2 = (a_i - a_j)(a_i + a_j) = 20(s - t)[5(s + t) + 1]$$

chia hết cho 20.

Vận dụng phương pháp phản chứng để giải các bài toán hình học

Vận dụng phương pháp phản chứng để suy ra kết luận B từ giả thiết A ta cần giả sử ngược lại, nghĩa là từ A suy ra kết luận ngược với B $(\overline{B})$. Trên cơ sở giả thiết phản chứng này ta lý luận để đi tới điều mâu thuẫn. Khi đó để khỏi mâu thuẫn phải bỏ giả thiết phản chứng và đi tới kết luận từ giả thiết A suy ra kết luận B.

Ví dụ 3.2.3. *Cho tam giác đều AOB. Trên cạnh AB lấy hai điểm C và D, sao cho $AC = CD = DB$. Chứng minh các góc $\widehat{AOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOB}$ không đồng thười bằng nhau.*

Giải.

Lấy điểm E trên cạnh AO, sao cho $OE = OC$ (Hình 9)

kip-5cm

Hình 9

Giả thiết phản chứng. Giả sử $\widehat{AOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOB} = 20^o$. Khi đó do tam giác EOC cân tại O, nên

$$\widehat{OEC} = \widehat{OCE} = \frac{180^o - 20^o}{2} = 80^0. \tag{1}$$

Do $AC = DB$, $\widehat{OAC} = \widehat{OBD} = 60^o$, $OA = OB$, nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$. Bởi do $OE = OC = OD$ và $\widehat{EOC} = \widehat{COD} = 20^o$ (giả thiết phản chứng), nên $\widehat{EOC} = \widehat{COD}$. Bởi vậy $EC = CD = AC$. Do đó $\widehat{ACE}$ cân tại C, nên

$$\widehat{AEC} = \widehat{EAC} = 60^o \tag{2}$$

Từ (1) và (2) có $\widehat{AEC} + \widehat{OEC} = 60^o + 80^o = 140 < 180^o = \widehat{AEC}$. Ta đã đi đến mâu thuẫn, nên phải bỏ giả thiết phản chứng, mà đi đến kết luận ba góc $\widehat{AOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOB}$ không đồng thười bằng nhau.

Ví dụ 3.2.4. *Trong tam giác đều cạnh đơn vị lấy 5 điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng có ít nhất 2 điểm trong các điểm đã lấy, mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá* $\frac{1}{2}$ *đơn vị.*

Giải.

Giả sử E, F, G là trung điểm các cạnh AB, BC, AC.

Nối các điểm E, F, G với nhau được 4 tam giác con đều cạnh bằng $\frac{1}{2}$, nên hai điểm tuỳ ý trong cùng một tam giác con đều cách nhau một khoảng không vượt quá $\frac{1}{2}$ đơn vị (Hình 10).

kip-5cm

Hình 10

Vì chọn ra 5 điểm trên mặt của 4 tam giác con, nên phải có ít nhất 2 điểm nằm trên cùng một tam giác con. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm này không quá $\frac{1}{2}$ đơn vị.

3.2.3 Vận dụng phương pháp phản chứng để giải các bài toán không mẫu mực

để vận dụng phương pháp phản chứng vẫn phải phân tích để tìm ra số "thỏ" nhiều hơn số "lồng".

Ví dụ 3.2.5. *Cho 9 đường thẳng. Mỗi đường đều chia hình vuông $ABCD$ thành hai tứ giác với tỷ lệ diện tích là* $\frac{2}{3}$. *Chứng minh rằng có ít nhất 3 trong số 9 đường thẳng này đi qua một điểm.*

Giải.

kip-4.5cm

Hình 11

1) Giả sử H, K là điểm giữa các cạnh AB, CD. Khi đó $HK||AD||BC$.

Giả sử EF là một trong những đường thẳng đã cho và EF cắt HK tại điểm I. Các tứ giác $ABEF$ và $CDEF$ đều là hình thang và nhận HI, IK là đường trung bình. Do $S_{ABFE} = \frac{2}{3}S_{CDEF}$, nên

$$AB.\frac{AE+BF}{2} = CD\frac{DE+CF}{2} \times \frac{2}{3} = AB.\frac{DB+CF}{2} \times \frac{2}{3}.$$

Do đó $HI = \frac{2}{3}IK$, tức I là điểm chia đường trung bình HK của hình vuông theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$. (Hình 11)

Vậy nếu đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác (chỉ có thể là hình chữ nhật hoặc hình thang) có tỷ lệ $\dfrac{2}{3}$, thì nó phải đi qua điểm chia đường trung bình cuả hình vuông thuộc hai cạnh còn lại theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$.

2) Trong hình vuông có bốn điểm (LồNG) thoả mãn tính chất trên, mà ta có 9 đường thẳng (THỏ), nên phải có ít nhất 3 đường thẳng đã cho đi qua một trong những điểm trên.

Ví dụ 3.2.6. *Trên cánh rừng hình vuông cạnh dài 1 km mọc 4500 cây thông đường kính 50 cm. Chứng minh rằng trong cánh rừng này có thể cắt ra một thử a đất hình chữ nhật kích thước* 10×20 m^2*, mà trên đó không mọc một cây thông nào.*

Giải.

1) Chia cánh rừng thành các ô chữ nhật kích thước 10×20 m^2 với "hình viền" có chiều rộng không nhỏ hươn 0,5 m (đường kính của mỗi cây thông) bằng cách sau:

Chia một chiều hình vuông thành 48 đoạn với độ dài 20 m. Giữa hai đoạn này đặt một đoạn ngăn cách với chiều dài 0,6 m. Hai đoạn ở hai đầu có chiều dài mỗi đoan 10,3 m.

Chia chiều còn lại thành 95 đoạn với độ dài mỗi đoạn 10 m. Giữa hai đoạn có đoạn ngăn cách với độ dài lớn hươn 0,5 m.

Khi đó cánh rừng được chia thành $48 \times 95 = 4560$ ô với kích thước 10×20 m^2 và khoảng cách gần nhất giữa hai ô đều lớn hươn 0,5 m (bảo đảm cho cây mọc ở một ô không có gốc lấn sang phần đất của ô khác).

2) Phản chứng. Trên cánh rừng số ô kích thước 10×20 m^2 (4560) lớn hươn số cây thông (4500), nên phải có ít nhất một ô (thậm chí ít nhất 60 ô) kích thước 10×20 m^2, mà trên đó không có cây thông nào.

3.3 Phương pháp suy luận trực tiếp

Trước một bài toán "không mẫu mực" cần phân tích, để chọn phương pháp giải, nhưng trước hết xem xét khả năng vận dụng các phép suy luận trong toán học và cuộc sống để suy ra điều cần khẳng định. Sau đây xin đươn cử một số ví dụ để minh hoạ việc vận dụng phương pháp suy luận trực tiếp.

Ví dụ 3.3.1. *Nhập học vào khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học Khoa học tự nhiên, đại học Quốc gia Hà Nội năm 2005 có 40 em biết nhạc, 40 em biết chươi cờ và 40 em biết đá cầu (mỗi em có thể biết nhiều môn). Thầy Chủ nhiệm khối Nguyễn Vũ Lương đề nghị hai thầy Phó chủ nhiệm khối Phạm Văn Hùng và Lê đình Vinh hướng dẫn các em tự chia thành bốn nhóm sinh hoạt ngoại khoá, sao cho mỗi nhóm có đúng 10 em biết nhạc, 10 em biết chươi cờ và 10 em biết đá cầu. Hãy trình bầy cách chia nhóm của các em?*

Cách chia nhóm:

1) đầu tiên chia 40 em biết nhạc thành 40 nhóm, mỗi nhóm chỉ gồm 1 em

$$A_1,\, A_2,\, \ldots \qquad \ldots,\, A_{39},\, A_{40}$$

2) Bổ sung em biết chươi cờ vào mỗi nhóm A_i $(1 \leqslant i \leqslant 40)$ (Nếu em A_i đã biết chươi cờ thì thôi) để được các nhóm

$$B_1,\, B_2,\, \ldots \qquad \ldots,\, B_{39},\, B_{40}$$

(Mỗi nhóm B_i có đúng 1 em biết nhạc, 1 em biết chươi cườ)

3) Bổ sung các em biết đá cầu chưa tham gia các nhóm vào nhóm B_i để được nhóm C_i $(1 \leqslant i \leqslant 40)$, sao cho mỗi nhóm C_i có đúng một em biết nhạc, một em biết chươi cờ và không quá hai em biết đá cầu.

4) Nhập các nhóm

Gọi số nhóm C có 2 em biết đá cầu là k, có một em biết đá cầu là s và không có em nào biết đá cầu là t. Khi đó

Số nhóm C là $k + s + t = 40$

Số em biết đá cầu là $2k + 1.s + 0.t = 40$.

Suy ra hệ

$$\begin{cases} k + s + t = 40 \\ 2k + 1.s + 0.t = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = t \\ s \text{ chẵn} \end{cases}$$

Vì số nhóm hai em biết đá cầu bằng số nhóm không em nào biết đá cầu bằng nhau, số nhóm một em biết đá cầu chẵn, nên nhập mỗi nhóm hai em biết đá cầu với một nhóm không em nào biết đá cầu, hai nhóm, mỗi nhóm một em biết đá cầu với nhau, được 20 nhóm:

$$D_1,\, D_2,\, \ldots\ldots D_{19},\, D_{20}$$

Khi đó mỗi nhóm D_i $(1 \leqslant i \leqslant 20)$ có đúng 2 em biết nhạc, hai em biết chươi cờ và hai em biết đá cầu.

Nhập năm nhóm D với nhau rồi bổ sung nốt các em còn lại sẽ được bốn nhóm sinh hoạt ngoại khoá, mà mỗi nhóm có đúng 10 em biết nhạc, 10 em biết chươi cờ và 10 em biết đá cầu.

Ví dụ 3.3.2. *Lớp chuyên Toán khoá I phát động phong trào thi đua lấy củi nộp cho bếp Xóm đình. Cuối học kỳ I thầy chủ nhiệm Phạm Văn Điều đặt ra ba giải thưởng để tặng cho ba em đạt thành tích cao nhất. Trước khi công bố ra lớp, thầy Điều đã mười 4 em đạt thành tích cao nhất: Nguyễn đình Bạn, Trần Văn Nhung, Đỗ Thanh Sươn, Nguyễn Văn Xoa đến văn phòng công bố giải thưởng.*

Khi về lớp mọi người hỏi các em trả lười như sau:

Em Nhung: "Mình đạt giải nhì hoặc ba"

Em Xoa: "Mình đạt giải"

Em Sươn: "Mình đạt giải nhất"

Em Bạn: "Mình không đạt giải"

Khi được nghe lại các câu trả lười trên thầy điền mỉm cười và nói "Chỉ có 3 bạn nói thật còn một bạn nói đùa" .

Bạn hãy cho biết em nào nói đùa và em nào đạt giải nhất?

Giải.

Trước hết cần xác định em đã nói đùa bằng cách xét câu hỏi của từng em có dẫn đến mâu thuẫn với khẳng định của thầy điều hay không.

1) Nếu em Nhung nói đùa, thì cả ba em Xoa, Sơn, Bạn đều nói thật, nên hoặc em Nhung và em Sơn đều đạt giải nhất, hoặc em Nhung và em Bạn không đạt giải. điều này vô lý, nên em Nhung nói thật.

2) Nếu em Xoa nói đùa, thì cả ba em Nhung, Sơn, Bạn đều nói thật. Như vậy cả Xoa và Bạn đều không đạt giải. điều này trái với giả thiết của bài toán, nên Xoa phải đạt giải.

3) Nếu Bạn nói đùa, thì cả ba bạn còn lại đều nói thật, nên cả bốn bạn đều đạt giải. điều này trái với giả thiết của bài toán, nên Bạn nói thật.

Vậy Sơn nói đùa. Xoa đạt giải nhất.

Bài toán này cũng có thể giải bằng phương pháp logic mệnh đề.

Ví dụ 3.3.3. *Trong cuộc hội ngộ giữa thầy Nguyễn Văn Mậu và ba học trò đạt huy chương vàng Olympic Toán Quốc tế: Đàm Thanh Sơn, Nguyễn Tiến Dũng, Ngô Bảo Châu, khi trao đổi về phép suy luận, thầy nói "Suy luận chẳng những là phương pháp mạnh mà còn rất gần gũi với cuộc sống thường nhật, nhiều khi "chươi mà học, học mà chươi" . Chẳng hạn, với 5 cái mũ: 3 màu đỏ, 2 màu xanh; tôi mười 3 em ngồi theo hàng dọc, để em ngồi sau cũng nhìn được đầu 2 em ngồi trước, rồi đứng từ phía sau đội lên đầu mỗi em một cái mũ, còn hai cái dấu đi. Các em thấy một cách hiển nhiên rằng dù bất kỳ phương án đội mũ nào vẫn có em phát hiện được màu mũ của mình."*

Bạn hãy lý giải điều hiển nhiên mà thầy Mậu nói?

Giải.

Giả sử thầy Mậu xếp em Châu ngồi trước, rồi đến em Dũng và sau cùng là em Sơn. Khi đó có 3 phương án đội mũ:

Phương án 1:	Châu	Dũng	Sơn
	đội mũ xanh	đội mũ xanh	đôi mũ đỏ

Vì chỉ có 2 mũ xanh, nên khi em Sơn nhìn thấy mũ của hai bạn ngồi trước màu xanh, thì suy ra ngay màu mũ của mình phải đỏ.

Phương án 2:	Châu	Dũng	Sơn
	đội mũ xanh	đội mũ đỏ	đôi mũ xanh (

Em Dũng nhìn thấy mũ của em Châu màu xanh, nhưng không thấy em Sơn xác định được màu mũ của mình, suy luận rằng: Nếu mũ của em màu xanh, thì bạn Sơn đã phát hiện được màu mũ của mình, nhưng bạn Sơn im lặng, chứng tỏ màu mũ của Dũng phải đỏ. Phương án 3:

Châu	Dũng	Sơn
đội mũ đỏ	đội mũ xanh (hoặc đỏ)	đôi mũ xanh (hoặc đỏ)

Khi không thầy em Sươn, em Dũng xác định được màu mũ của mình em Chau suy luận: Nếu màu mũ của em xanh, thì hoặc em Sươn hoặc em Dũng xác định được màu mũ của mình, nhưng cả hai em đều im lặng chứng tỏ mũ của em màu đỏ.

Vậy khẳng định của thầy Nguyễn Văn Mậu đã được lý giải.

Ví dụ 3.3.4. *Trong cuộc toạ đàm về thuật toán với hai học trò đạt huy chương vàng và huy chương bạc Olympic Tin học quốc tế Nguyễn Ngọc Huy và Nguyễn Bảo Sươn, thầy Nguyễn Xuân My nói: Thuật toán xuất hiện khắp nươi: Trong toán học, trong khoa học, trong cuộc sống thường nhật và ngay cả lúc vui chươi giải trí. Chẳng hạn, trên bàn có hai đống diêm với số lượng tương ứng 9 và 11. Hai em thực hiện bôc diêm theo nguyên tắc: Người nào đến lượt phải bốc ít nhất một que diêm và nếu bốc ở một đống thì có thể bốc với số lương tuỳ ý; còn nếu bốc ở cả hai đống, thì phải bốc số lượng bằng nhau.*

Người nào đến lượt mà hết diêm thì thua cuộc.

Nếu Huy được đi trước, thì em phải có cách bốc diêm như thế nào để thắng cuộc?

Bạn hãy nêu rõ cách bốc diêm của em Huy.

Giải.

Trước hết đưa ra thuật toán cần xác định những cặp số lượng, mà người đi đầu chắc chắn thua. Ta gọi cặp này là "cặp thua"

1) Xác định các cặp thua

Quy ước đống bên trái là đống I, đống còn lại là đống II, người đi trước là A, người còn lại là B.

Cặp (1, 2):

Nếu A bốc ở đống II một que, thì mỗi đống đều còn một que. Khi đó B bốc được hết diêm ở cả hai đống, nên A thua.

Nếu A bốc ở mỗi đống một que, thì đống II còn một que. Khi đó B bốc một que diêm còn lại, nên A thua.

Vậy (1, 2) là cặp thua.

Cặp (3, 5)

(a) A bốc cả hai đống

- Nếu A bốc ở mỗi đống

- Một que, thì được cặp (2, 4). Khi đó B bốc ở đống II ba que và dồn A về cặp (2, 1), nên A thua. Hai que, thì được cặp (1, 3). Khi đó B bốc một que ở đống II và dồn A về cặp (1, 2) nên A thua cuộc. Ba que thì được cặp (0,2). Khi đó B bốc nốt 2 que ở đống II, nên A thua cuộc.

(b) A bốc ở đống II

Nếu A bốc ở đống II:

- Một que, thì được cặp (3, 4). Khi đó B bốc ở mỗi đống 2 que và dồn A về cặp (1, 2), nên A thua.

- Hai que, thì được cặp (3, 3). Khi đó B bốc hết diêm ở cả hai đống, nên A thua.

- Ba que, thì được cặp (3, 2). Khi đó B bốc ở đống I hai que và dồn A về cặp (1, 2), nên A thua .

- Bốn que, thì được cặp (3, 1). Khi đó B bốc ở đống I một que và dồn A về cặp (1, 2), nên A thua.

- Năm que, thì được cặp (3, 0). Khi đó B bốc nốt 3 que còn lại, nên A thua.

(c) A bốc ở đống I.

Nếu A bốc ở đống I

- Một que, thì được cặp (2, 5). Khi đó B bốc ở đống II bốn que và dồn A về cặp (2, 1), nên A thua.

- Hai que, thì được cặp (1, 5). Khi đó B bốc ở đống II ba que và dồn A về cặp (1, 2), nên A thua.

- Ba que, thì được cặp (0, 5). Khi đó B bốc nốt năm que còn lại và A thua.

2) Thuật toán

Vì cặp (3, 5) là cặp thua, nên Huy bốc ở mỗi đống 6 que và dồn em Sươn phải xuất phát với cặp thua (3, 5), nên Huy thắng.

Ví dụ 3.3.5. *để động viên các em học sinh giải bài tập hình học, thầy Phan Cung đức đặt ra ba nhóm sưu tầm và giải bài tập hình học với tiêu đề: "Quỹ tích", "Biến hình" và "đồng dạng" .*

Các học sinh nam lớp 11 khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học khoa học Tự nhiên tham gia các nhóm do thầy đức đặt ra.

Khi tìm hiểu thấy rằng có 7 em tham gia nhóm "Quỹ tích", 6 em tham gia nhóm biến hình, 5 em tham gia nhóm đồng dạng, 4 em tham gia vừa nhóm "Quỹ tích" vừa nhóm "Biến hình", 3 em tham gia vừa nhóm "Quỹ tích" vừa nhóm "đồng dạng", 2 em tham gia vừa nhóm "Biến hình" vừa nhóm "đồng dạng", 1 em tham gia cả ba nhóm.

Bạn hãy xác định giúp số học sinh nam của lớp 11 khối phổ thông chuyên Toán- Tin của Trường đại học Khoa học tự nhiên.

Giải.

Dùng 3 hình tròn "Quỹ tích", "Biến hình", "đồng dạng" để biểu thị ba khối học sinh nam của lớp 11 tham gia ba nhóm: "Quỹ tích", "Biến hình" và "đồng dạng". Khi đó

- Phần giao của cả ba hình tròn biểu thị phần học sinh tham gia đông thười cả ba nhóm.

- Phần giao của các hình tròn "Quỹ tích" và "Biến hình" biểu thị phần học sinh tham gia đông thười hai nhóm "Quỹ tích" và "Biến hình".

- Phần giao của các hình tròn "Quỹ tích" và "đồng dạng" biểu thị phần học sinh tham gia đồng thười hai nhóm "Biến hình" và "đồng dạng" .

Căn cứ vào các điều kiện của bài toán với phương pháp loại trừ xác định được số lượng các khối ghi trên hình 12. Từ đó suy ra số học sinh nam của lớp 11, Trường đại học Khoa học tự nhiên là:

$$1 + 3 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 10$$

Ví dụ 3.3.6. *Thầy Nguyễn Ngọc Thắng cho lớp $10A_1$ Toán kiểm tra phần tam thức bậc 2. Bốn em Xuân, Hạ, Thu, đông làm bài khá nhất, trong đó có một em đạt điểm 10. Khi hỏi dự đoán*

Em Linh nói: "Theo em bạn Xuân hoặc bạn Hạ đạt điểm 10"

Em Nam nói: "Theo em bạn Hạ hoặc bạn Thu đạt điểm 10'"

Em Minh nói: "Theo em bạn Thu hoặc bạn đông đạt điểm 10"

Nghe xong thầy Thắng mỉm cười và khẳng định: "Chỉ có Minh đoán đúng một bạn, hai em còn lại đoán sai cả".

Bạn hãy xác định người đạt điểm 10.

Giải.

Nếu người em Minh dự đoán đúng là em Thu, thì em Nam cũng dự đoán đúng một người, nên mâu thuẫn với điều kiện Nam và Linh đều dự đoán sai hết. Bởi vậy người mà Minh dự đoán đúng phải là em đông. Trong trường hợp này em Linh và em Nam đều dự đoán sai hết cả, nên thoả mãn điều kiện của bài toán. Vậy em đông đạt điểm 10.

3.4 Phương pháp mệnh đề

3.4.1 Khái niệm về logic mệnh đề

Định nghĩa. Mệnh đề là một câu trọn nghĩa (một khẳng định) mà nội dung của nó phản ánh đúng hoặc sai thức tế khách quan.

Mệnh đề đúng: Nếu nội dung của mệnh đề (A) phản ánh đúng thực tế khách quan (khẳng định đúng với thực tế), thì nó được gọi là mệnh đề đúng hay mệnh đề nhận giá trị đúng và viết $A = Ø$ hoặc $A = 1$.

Mệnh đề sai: Nếu nội dung của mệnh đề (A) phản ánh sai thực tế khách quan (khẳng định sai với thực tế), thì nó được gọi là mệnh đề sai hay mệnh đề nhận giá trị sai và viết $A = S$ hoặc $A = 0$

Các giá trị Ø, $S(0, 1)$ được gọi là giá trị chân lý (hay giá trị) của mệnh đề.

Biến mệnh đề: Ký hiệu dùng để chỉ mệnh đề được gọi là biến mệnh đề. Người ta thường dùng các chữ cái in hoặc viết tay có chỉ số hoặc không, chẳng hạn a, b, $c, \ldots$, a_1, b_1, $c_1, \ldots, x_1$, $x_2, .$ làm biến mệnh đề.

3.4.2 Các phép toán mệnh đề

Trên tập hợp mệnh đề xác định 5 phép toán:

-Phép phủ định được ký hiệu bằng $-$
-Phép hội được ký hiệu bằng $\bullet$
-Phép tuyển được ký hiệu bằng $\vee$
-Phép kéo theo được ký hiệu bằng $\Rightarrow$
-Phép tương đương được ký hiệu bằng $\Leftrightarrow$

và được xác định bằng bảng giá trị chân lý sau đây:

x	y	$\overline{x}$	$x \bullet y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

3.4.3 Công thức của logic mệnh đề

Từ các mệnh đề và phép toán phủ định, hội, tuyển, kéo theo và tương đương lập nên các "biểu thức logic", mà một nhóm trong chúng được gọi là các công thức của logic mệnh đề và định nghĩa bằng quy nạp như sau:

Định nghĩa

a) Các biến mệnh đề: x, y, $z \ldots$, X, Y, $Z, \ldots$ được thừa nhận là các công thức của logic mệnh đề;

b) Nếu A, B là các công thức của logíc mệnh đề, thì $(\overline{A})$, $(\overline{B})$, $(A \bullet B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ là công thức của logic mệnh đề.

c) Chỉ các "biểu thức" được xác định ở mục (a) hoặc mục (b) mới là công thức của logic mệnh đề.

Giá trị của công thức

Giả sử $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một công thức của logic mệnh đề.

Giá trị chân lý β nhận được khi thay tất cả các vị trí của biến mệnh đề x_i trong công thức A bằng α_i $(\alpha_i = 0, 1)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ được gọi là giá trị chân lý (hay giá trị) của công thức A tại bộ giá trị $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ của các biến mệnh đề và viết

$$A(\alpha) = A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \beta$$

Công thức hằng đúng, hằng sai và thoả được

Công thức $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là công thức *hằng đúng (hằng sai)* và viết

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n \equiv 1(A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0)$$

nếu với mọi bộ giá trị $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ của các biến mệnh đề

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1(A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0).$$

Công thức $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là công thức thoả được, nếu tồn tại ít nhất một bộ giá trị $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ của biến mệnh đề, để

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1.$$

Công thức bằng nhau

Công thức $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và công thức $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là hai công thức bằng nhau và viết $A = B$, nếu tại mọi bộ giá trị $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ của các biến mệnh đề đều có:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

3.4.4 Các luật của logic mệnh đề

Một số công thức đóng vai trò như các hằng đẳng thức đáng nhớ, được sử dụng thường xuyên trong khi biến đổi công thức và giải các bài tập toán logic đồng thười được gọi là các luật của logic mệnh đề.

Sau đây liệt kê 23 luật quan trong nhất của logic mệnh đề:

1. $A \to B = \overline{A} \vee B$ (thay kéo theo bằng phủ định và tuyển)
2. $A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$ (phân phối của hội đối với tuyển)
3. $A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (phân phối của tuyển đối với hội)
4. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ (Luật DeMorgan)
5. $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ (Luật DeMorgan)
6. $A \Leftrightarrow B = A \wedge B \vee \overline{A} \wedge \overline{B}$ (Thay phép tương đương)
7. $A \wedge (A \vee B) = A$ (Luật hấp thụ của hội đối với tuyển)
8. $A \vee A \wedge B) = A$ (Luật hấp thụ của tuyển đối với hội)
9. $A \wedge B \vee \overline{B} = A \vee \overline{B}$ (Luật hấp thụ)
10. $(A \vee B) \wedge \overline{B} = A \wedge \overline{B}$ (Luật hấp thụ)
11. $A \wedge B = B \wedge A$ (Tính giao hoán của hội)
12. $A \vee B = B \vee A$ (Tính giao hoán của tuyển)
13. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (A \wedge C)$ (Tính kết hợp của hội)

14. $(A \vee B) \vee C = A \vee (A \vee C)$ (Tính kết hợp của tuyển)
15. $A \wedge A = A$ (Tính luỹ đẳng của hội)
16. $A \vee A = A$ (Tính luỹ đẳng của tuyển)
17. $A \wedge \overline{A} = 0$ (A và không A luôn luôn sai)
18. $A \vee \overline{A} = 1$ (A hoặc không A luôn luôn đúng)
19. $A \wedge 0 = 0$ (A và hằng sai luôn luôn sai)
20. $A \vee 0 = A$ (A hoặc hằng sai luôn là A)
21. $A \wedge 1 = A$ (A và hằng đúng luôn là A)
22. $A \vee 1 = 1$ (A hay hằng đúng luôn hằng đúng)
23. $\overline{\overline{A}} = A$ (Hai lần phủ định của mệnh đề A lại chính là A)

Phép biến đổi đồng nhất

Dựa vào các luật cơ bản người ta có thể biến đổi các công thức của logic mệnh đề thành các đại lượng tương đẳng và "đơn giản" hoặc tiện ích hơn. Nhờ đó việc giải phương trình, hệ phương trình logic, xét tính bằng nhau, tính hằng đúng của các công thức được thực hiện một cách dễ dàng hơn.

Một số khẳng định

Hội sơ cấp: Hội của các biến mệnh đề hoặc phủ định của chúng được gọi là Hội sơ cấp.

Tuyển sơ cấp: Tuyển của các biến mệnh đề hoặc phủ định của chúng được gọi là Tuyển sơ cấp.

Nhờ các luật của logic mệnh đề ta có thể suy ra các khẳng định sau đây:

Khẳng định 1: Một hội sơ cấp hằng sai khi và chỉ khi nó có chưa một biến mệnh đề nào đó cùng với phủ định của biến mệnh đề này.

Khẳng định 2: Một tuyển sơ cấp hằng đúng khi và chỉ khi nó có chứa một biến mệnh đề nào đó cùng với phủ định của biến mệnh đề này.

Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các công thức của logic mệnh đề. Khi đó có các khẳng định sau:

Khẳng định 3:

$(A_1) \wedge (A_2) \wedge \cdots \wedge (A_n) = 1$ khi và chỉ khi $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 1$

Khẳng định 4:

$(A_1) \vee (A_2) \vee \cdots \vee (A_n) = 0$ khi và chỉ khi $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$

Phương pháp logic mệnh đề

Phương pháp logic mệnh đề là phương pháp chuyển bài toán về dạng logic mệnh đề, rồi dùng các luật và các khẳng định của logic mệnh đề mà suy ra đáp án. Phương pháp gồm ba bước sau:

1) Chọn các biến mệnh đề thích hợp, tương ứng, diễn đạt các mối quan hệ, hiện trạng... được cho trong bài toán bằng các công thức của logic mệnh đề. Sau đó căn cứ vào mối quan hệ và các điều kiện đã cho trong bài toán mà đưa ra phương trình hoặc hệ phương trình logic thích hợp.

2) Giải phương trình hoặc hệ phương trình logic, để suy ra các “nghiệm logic".

3) Căn cứ vào sự tương ứng khi chọn biến mệnh đề, mà diễn đạt các “nghiệm logic" thành đáp án của bài toán đặt ra.

Ví dụ 3.4.1. *Thầy Phạm Tuấn Dương- chủ nhiệm lớp chuyên Toán khoá II phân công các em đỗ Ngọc Diệp, Nguyễn đình Hoá, Phạm Trọng Quát, Đào Trọng Thi trực khu sơ tán tại xóm Na Buồn, xã Văn Yên, huyện đại Từ, tỉnh Bắc Thái (nay là tỉnh Thái Nguyên) bốn ngày liên tiếp Ba mươi, Mồng 1, Mồng hai, Mồng ba tết năm 1966 và động viên các em ghi nguyện vọng. Các em đã đề đạt nguyện vọng như sau:*

1. *Em Thi và em Quát không thể trực nhật vào ngày ba mươi.*
2. *Nếu em Thi trực ngày Mồng một hoặc em Quát trực ngày Mồng hai, thì em Hoá trực ngày Mồng ba.*
3. *Nếu em Diệp trực ngày Mồng hai, thì em Hoá trực ngày Mồng một*
4. *Nếu em Diệp hoặc em Quát trực ngày Mồng một, thì em Thi trực ngày Mồng ba.*
5. *Nếu em Quát không trực ngày Mồng ba, thì em Diệp trực ngày Ba mươi và em Thi không trực ngày Mồng hai.*

Bạn xếp giúp lịch trực thoả mãn nguyện vọng của tất cả các em.

Giải.

1. Xác định biến mệnh đề

   Để đơn giản ta gọi các ngày Ba mươi, Mồng một, Mồng ha, Mồng ba là ngày 0, ngày 1, ngày 2, ngày 3 và dùng chữ cái đầu của tên để chỉ các em.

   Với quy ước này x_i là biến để chỉ mệnh đề “Em x trực ngày i” ($i = 0$, 1, 2, 3). Khi đó $\overline{x_i}$ là mệnh đề “Em x không trực ngày i”.

2. Lập công thức diễn tả điều kiện:

   - điều kiện 1 được diễn tả bằng công thức $A = \bar{t}_0.\bar{q}_0$

   - điều kiện 2 được diễn đạt bằng công thức

$$B = (t_1 \vee q_2) \to h_3 = \overline{t_2 \vee q_2} \vee h_3 = \bar{t}_1.\bar{q}_2 \vee h_3$$

- điều kiện ba được diễn đạt bằng công thức:

$$C = \overline{d}_2 \to h_1 = d_2 \vee h_1$$

- điều kiện 4 được diễn đạt bằng công thức:

$$D = (d_1 \vee q_1) \to t_3 = \overline{d_1 \vee q_1} \vee t_3 = \overline{d}_1.\overline{q}_1 \vee t_3$$

- điều kiện 5 được diễn đạt bằng công thức:

$$E = \overline{q}_3 \to d_0.\overline{t}_2 = q_3 \vee d_0.\overline{t}_2$$

3. Lập phương trình logic

   Vì phương án trực nhật phải thoả mãn yêu cầu của tất cả các em, nên phương án dưới dạng "ngôn ngữ logic mệnh đề" phải là nghiệm của phương trình:

$$\begin{aligned}
&A.B.C.D.E = 1 \qquad\qquad (1)\\
&A.B = \overline{t}_0.\overline{q}_0.(\overline{t}_1.\overline{q}_2 \vee h_3) = \overline{t}_0\overline{q}_0\overline{t}_1\overline{q}_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.h_3\\
&A.B.C = (\overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.h_3).(d_2 \vee h_1)\\
&= \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.h_1 \vee \overline{t}_0\overline{q}_0.h_3d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.h_3.h_1
\end{aligned}$$

   Vì mỗi em chỉ trực một ngày, nên $h_3.h_1 = 0$. Do đó:

$$\begin{aligned}
A.B.C =&\overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.h_1 \vee \overline{t}_0\overline{q}_0.h_3d_2\\
A.B.C.D =&(\overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.h_1 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.h_3.d_2)(\overline{d}_1.\overline{q}_1 \vee t_3)\\
=&\overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_2.t_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1\\
&\vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.h_1.t_3) \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{d}_1.d_2.h_3 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.d_2.h_3.t_3
\end{aligned}$$

   Những hội dẫn đến mâu thuẫn: hoặc một người trực hai ngày hoặc hai người trực cùng một ngày đều phải bằng không. Bởi vậy $\begin{array}{ll} \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.d_2 = 0; & \overline{t}_0.\overline{t}_1 \\ \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{d}_1.d_2.h_3 = 0; & \overline{t}_0.\overline{q}_0 \end{array}$

   nên: $A.B.C.D = \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_2.t_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1$

$$\begin{aligned}
A.B.C.D.E =&(\overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_2.t_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1)(q_3 \vee d_0\overline{t}_2)\\
=&\overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_2.t_3.q_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_0.d_2.\overline{t}_2.t_3 \vee\\
&\vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1.q_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1.d_0.\overline{t}_2\\
=&1
\end{aligned}$$

   Những hội dẫn đến hai người cùng trực một ngày hoặc một người trực hai ngày đều phải bằng 0, nên hội thứ nhất, thứ hai và thứ tư đều bằng o và có phương trình:

$$\overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1.q_3 = 1$$

   Suy ra

$$\begin{gathered}
\overline{t}_0 = 1;\ \overline{t}_1 = 1;\ \overline{q}_0 = \overline{q}_1 = \overline{q}_2 = \overline{d}_1 = h_1 = q_3 = 1\\
\text{hay } t_0 = t_1 = q_0 = q_1 = q_2 = d_1 = 0 = 0,\ h_1 = q_3 = 1.
\end{gathered}$$

Khi đó

Em Hoá trực ngày Mồng một

Em Quát trực ngày Mồng ba

Em Thi trực ngày Mồng hai

Em Diệp trực ngày Ba mươi.

Ví dụ 3.4.2. *Thầy Phan đức Chỉnh chỉ định bốn em học sinh nữ của lớp chuyên Toán khoá I: Trần Thị đệ, Hoàng Thị Lương, Văn Tăng Mạng, Phan Huy Thanh trình bầy bốn bài toán mẫu được đánh số thứ tự từ 1 đến 4. Thầy cho phép tự phân công và các em thoả thuận như sau:*

1. *Nếu đệ không trình bầy bài 1, thì Mạng không trình bày bài 2;*
2. *Nếu Lương không trình bày bài 1 và bài 4, thì đệ trình bày bài 1;*
3. *Nếu Mạng không trình bày bài 4, thì Lương trình bầy bài 3.*
4. *Nếu Thanh không trình bày bài 1, thì Lương trình bày bài1;*
5. *Nếu Thanh không trình bày bài 2, thì Lương không trình bày bài 1*

Bạn hãy xác định bài toán của mỗi em trình bày?

Giải.

1) Chọn biến mệnh đề

Dùng chữ cái đầu của tên để chỉ em học sinh tương ứng và chỉ số i ($i = 1, 2, 3, 4$) để chỉ bài toán thứ i.

Dùng x_i để chỉ mệnh đề "Em x trình bày bài i". Khi đó $\overline{x}_i$ là mệnh đề "Em x_i không trình bày bài i".

2) Diễn đạt các điều kiện của bài toán bằng công thức của logic mệnh đề:

điều kiện thứ nhất diễn đạt bằng công thức:

$$A = \overline{d}_1 \to \overline{m}_2 = d_1 \vee \overline{m}_2$$

điều kiện thứ hai diễn đạt bằng công thức:

$$B = \bar{l}_1.\bar{l}_4 \to d_1 = l_1 \vee l_4 \vee d_1$$

điều kiện thứ ba diễn đạt bằng công thức:

$$C = \overline{m}_4 \to l_3 = m_4 \vee l_3$$

điều kiện thứ tư diễn đạt bằng công thức:

$$D = \bar{t}_1 \to l_1 = t_1 \vee l_1$$

điều kiện thứ năm diễn đạt bằng công thức:

$$E = \bar{t}_2 \to \bar{l}_1 = t_2 \vee \bar{l}_1$$

Vì bảng phân công trực phải được cả bốn em nhất trí nên có phương trình logic.

$$A.B.C.D.E = 1$$

Lần lượt các hội $A.B$, $A.B.C$, $A.B.C.D$, $A.B.C.D.E$ và để ý rằng: Các hội sơ cấp mà trong đó hai người cùng trình bày một bài tập hoặc một người trình bày hai bài tập khác nhau đều sai, ta có:

$$\begin{aligned}
A.B =&(d_1 \vee \overline{m}_2)(l_1 \vee l_4 \vee d_1)\\
=&d_1l_1 \vee d_1l_4 \vee d_1d_1 \vee \overline{m}_2l_1 \vee \overline{m}_2l_4 \vee \overline{m}_2d_1\\
=&d_1 \vee d_1l_4 \vee \overline{m}_2l_1 \vee \overline{m}_2l_4 \vee \overline{m}_2d_1\\
A.B.C =&(d_1 \vee d_1l_4 \vee \overline{m}_2l_1 \vee \overline{m}_2l_4 \vee \overline{m}_2d_1).(m_4 \vee l_3)\\
=&d_1m_4 \vee d_1l_3 \vee d_1l_4m_4 \vee d_1l_4l_3 \vee \overline{m}_2l_1m_4 \vee \overline{m}_2l_1l_3\\
&\vee \overline{m}_2l_4m_4 \vee \overline{m}_2l_4l_3 \vee \overline{m}_2d_1m_4 \vee \overline{m}_2d_1l_3\\
=&d_1m_4 \vee d_1l_3 \vee \overline{m}_2l_1m_4 \vee \overline{m}_2d_1m_4 \vee m_2d_1l_3\\
A.B.C.D =&(d_1m_4 \vee d_1l_3 \vee \overline{m}_2l_1m_4 \vee \overline{m}_2d_1m_4 \vee \overline{m}_2d_1l_3)(t_1 \vee l_1)\\
=&\overline{m}_2l_1m_4\\
A.B.C.D.E =&\overline{m}_2l_1m_4(t_2 \vee \bar{l}_1) = \overline{m}_2l_1m_4t_2 \vee \overline{m}_2l_1m_4\bar{l}_1\\
=&\overline{m}_2l_1m_4t_2 = 1
\end{aligned}$$

Khi đó: $\overline{m}_2 = 1$, $l_1 = 1$, $m_4 = 1$, $t_2 = 1$ nên $m_2 = 0$, $l_1 = 1$, $m_4 = 1$, $t_2 = 1$.

Suy ra:

Em Lương trình bày bài 1

Em Thanh trình bày bài 2

Em Mạng trình bày bài 4

Và em đệ trình bày bài 3.

3.5 Phương pháp bảng

Nhiều bài toán logic có thể giải bằng cách lập bảng mô tả mối quan hệ giữa các đối tượng được cho trong bài toán. đối với một số bài toán logic trong đó xuất hiện hai hay nhiều tệp và các cặp phần tử nói lên mối quan hệ giữ các tệp người ta có thể thiết lập một hay nhiều bảng, để mô tả mối quan hệ giữa các tệp.

Mỗi bảng này có hàng trên cùng ghi các phần tử của một tệp, còn cột tận cùng bên trái ghi các phần tử thuộc tệp kia và các vị trí trong bảng ghi mã số quan hệ giữa những phần tử thuộc các tệp. Căn cứ vào các điều kiện đã cho trong bài toán gạch bỏ đi những cặp phần tử không thích hợp. Từ đó đi đến lời giải của bài toán.

Giải bài toán logic bằng phương pháp bảng đôi khi vấp phải trường hợp bảng cần lập có chiều khá lớn hoặc phải kết hợp nhiều bảng mới đi đến kết quả. Sau đây xin minh hoạ phương pháp bằng một số ví dụ:

Ví dụ 3.5.1. *Thầy chủ nhiệm khối Lê đình Thịnh công bố điểm kiểm tra học sinh giỏi riêng cho bốn em Phan Vũ Diễm Hằng, Nguyễn Thị Thiều Hoa, Nguyễn Thuỳ Linh và đào Thị Thu Hằng. Khi các bạn hỏi điểm của từng người, thì được trả lười:*

- Em Diễm Hằng nói: Ở Bạn Hoa 7 điểm, bạn Linh 9 điểm, bạn Thu Hằng 8 điểm" ;

- Em Hoa nói:" Bạn Thu Hằng 10 điểm, bạn Diễm Hằng 8 điểm và bạn Linh 7 điểm";

- Em Linh nói:" Cả ba bạn đều được 8" ;

- Em Thu Hằng nói:" Cả ba bạn đều được 7".

Khi nghe các câu trả lười trên thầy Thịnh nói:" Không có em nào được hai bạn cùng nói đúng điểm".

Bạn hãy xác định điểm của từng em?

Giải.

Bài toán có hai tệp đối tượng. Tệp thứ nhất gồm các em học sinh, tệp thứ hai là điểm của các em. Bài toán này có thể giải bằng phương pháp bảng:

1) Lập bảng:

Bảng gồm 5 hàng, 5 cột. Hàng đầu từ cột thứ hai ghi tên các em học sinh, còn trên cột tận cùng bên trái từ hàng hai ghi tên câu trả lười.

2) điễn mã số quan hệ giữa các em và điểm vào vị trí của bảng:

3) Vì không có em nào cùng được hai em nói đúng điểm của mình, nên dựa vào bảng trên suy ra điểm của các em là: Em Diễm Hằng 7, em Hoa 8, em Linh 9 và em Thu Hằng 10.

Ví dụ 3.5.2. *Nhân dịp kỷ niệm ngày Nhà giáo Việt Nam 20 tháng 11, phó chủ nhiệm khối cô đặng Thanh Hoa chỉ đạo 4 em Cúc, đào, Hồng, Sen làm bốn bông hoa: cúc, đào, hồng, sen.*

Sau khi hoàn thành em Sen ngắm hoa và nói với các em làm hoa cúc, hoa hồng và bạn đào: Ở Thế là trong chúng ta không có ai làm hoa trùng với tên mình". Bạn hãy xác định tên hoa mà mỗi em đã làm?

1. Hàng đầu từ cột thứ hai ghi tên các em làm hoa, còn cột tận cùng bên trái từ hàng hai ghi tên hoa mà các em đã làm:

2. Gạch bỏ ô của bảng

- Do không có em nào làm loại hoa giống tên mình nên các ô nằm trên hàng và cột cùng tên đều bị gạc bỏ.

- Câu Ởem Sen ngắm hoa và nói với các em làm hoa cúc, hoa hồng và em đào" chứng tỏ:

+ Em đào không làm hoa cúc, hoa hồng.

+ Em Sen không làm hoa cúc, hoa hồng. Khi đó các ô nằm trên hàng hồng, cột Sen và cột đào bị gạc bỏcác ô nằm trên hàng cúc cột Sen và cột đào bị gạc bỏ. Từ cột cuối cùng suy ra em Sen làm hoa đáo, nên các ô còn lại cuả hàng đào bị ghạch bỏ. Cuối cùng từ cột Cúc suy ra Cúc làm hoa hồng, từ cột hồng suy ra Hồng làm hoa cúc.

Em Cúc làm hoa hồng;

Em đào làm hoa sen;

Em Hồng làm hoa cúc;

Em Sen làm hoa đào.

Ví dụ 3.5.3. *Nhân dịp kỷ niệm 30 năm ngày thành lập khối phổ thông chuyên Toán-Tin trường đại học tổng hợp Hà Nội Khối phát động phong trào viết về những kỷ niệm sâu sắc trong thười học sinh. Thầy Lê đình Vinh chủ trì việc chấm bài. Kết quả có hai bài đạt giải nhất. đáp lại câu hỏi những ai đạt giải nhất có năm câu trả lười:*

1. *Em Hoàng Ngọc Hà và em Hoàng Lê Minh*
2. *Em Nguyễn Thành Nam và em Phùng Văn ổn*
3. *Em Nguyễn đăng Thành và em Nguyễn Thành Nam*
4. *Em Hoàng Ngọc Hà và em Nguyễn đăng Thành,*
5. *Em Hoàng Ngọc Hà và em Lê Quang Tiến.*

Khi nghe các câu trả lười trên thầy Vinh mỉm cười và nói gọn: "Bốn câu mỗi câu đúng một nử a, còn một câu sai hết!"

Bạn hãy xác định những người đạt giải nhất.

Giải.

I. Lập bảng diễn tả các câu trả lười

II. Lý luận để suy ra đáp án

1. Kết quả trình bày trên bảng thoả mãn điều kiện của đề bài

2. Ngược lại, kết quả không như trên bảng, thì cần xét các khả năng có thể suy ra:

i) Nếu Minh không nhất, khi đó câu 1 sai hoàn toàn, nên các câu 2, 3, 4, 5 mỗi câu phải đúng một nử a, nên Thành, Tiến nhất. Khi đó Nam và ổn không nhất, nên câu 2 lại sai cả hai ý. Ta đi tới mâu thuẫn vì có hai câu sai hoàn toàn.

ii) Nếu Thành không nhất, thì câu 4 sai hoàn toàn, nên các câu 1, 3, 5 phải đúng một nử a. Bởi vậy, Minh, Nam, Tiến phải đạt giải nhất. Ta cũng đi tới mâu thuẫn với số lượng người đạt giải nhất chỉ là 2.

iii) Nếu Tiến không nhất, thì câu 5 sai hoàn toàn nên các câu 1, 2, 3, 4 mỗi câu phải đúng một nử a, nên Minh, ổn, Thành phải đạt giải nhất. Ta cùng đi tới mâu thuẫn. Vậy em Hà phải đạt giải nhất.

a) Nếu Hà không nhất, mà theo điều kiên phải có ít nhất một trong ba người: Minh, Thành, Tiến không nhất.

b) Nếu Hà nhất và Nam nhất, thì dẫn đến mâu thuẫn vì cả 5 câu mỗi câu đúng một nử a.

c) Nếu Hà nhất và Thành nhất hoặc Tiến nhất, thì khi đó có câu đúng cả hai ý, nên cùng dẫn đến mâu thuẫn.

Ví dụ 3.5.4. *Thầy đường Hoàng Giang trả bài kiểm tra môn Hoá học cho lớp 11 A1 Toán. Khi bạn Thùy ở lớp 11 A1 Tin hỏi điểm của các bạn Bình, định, Linh, Nam thì nhận được các câu trả lời:*

- Bạn Bình nói: ỎBạn Nam được 7, định được 8, Linh được 9"

- Bạn định nói: ỎBạn Nam được 10, Linh được 8, Bình được 9"

- Bạn Linh nói: ỎCả ba bạn đều được 7"

- Bạn Nam nói: ỎCả ba bạn đều được 8"

Khi nghe các câu trả lời thầy Giang nói: Ỏ Không có em nào được hai bạn cùng nói đúng điểm và mỗi câu trả lời chỉ nói đúng điểm một em".

Bạn hãy xác định số điểm của từng người.

Giải.

1. Lập bảng mô tả các câu trả lời

	Bình	định	Linh	Nam
Bình trả lời		8	9	7
định trả lời	9		8	10
Linh trả lời	7	7		7
Nam trả lời	8	8	8	

2. Phân tích loại trừ để tìm ra đáp án:

   Xét các cột 2, 3, và 4. Vì không người nào được hai bạn cùng nói đúng điểm của mình nên:

   - Bạn định không thể đạt được điểm 8,

   - Bạn Linh không thể đạt được điểm 8,

   - Bạn Nam không thể đạt được điểm 7.

   Nếu bạn định được điểm 7, bạn Linh được điểm 9, bạn Nam được điểm 10, thì bạn Bình được điểm 8. Phương án này thoả mãn cả điều kiện: Mỗi câu trả lời chỉ đúng điểm của một người.

   Vậy bạn Bình được 8, bạn định được 7, bạn Linh được 9 và bạn Nam được 10.

3.6 Phương pháp sơ đồ

đây là phương pháp tương tự như phương pháp bảng, song phương pháp này lợi thế hươn khi giải quyết các bài toán mà ở đó số tệp đối tượng lớn hươn 2.

1) Phương pháp sơ đồ gồm 2 bươc: Thiết lập sơ đồ

Lấy các nhóm điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với các tệp. Dùng ngay ký hiệu các đối tượng để ghi trên các điểm tương ứng.

2) Mỗi cặp điểm tương ứng với hai đối tượng có một quan hệ nào đó đã cho trong một bài toán được nối với nhau bằng một đoạn thẳng hoặc một đoạn cong đặc trưng cho quan hệ mà nó biểu thị và không đi qua các điểm tương ứng chung gian khác. Ta gọi sơ đồ nhận được là sơ đồ mô tả quan hệ. Dựa vào cấu trúc của sơ đồ mô tả quan hệ và điều kiện đã cho trong bài toán mà suy ra đáp án

Sau đây xin trình bày một số ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 3.6.1. *Bốn em Anh, Dũng, Hằng, Việt chuẩn bị lên đường đi thi học sinh giỏi toàn quốc được thầy đỗ Thanh Sươn cho biết trước điểm môn Hình học.*

Bạn Nam muốn biết điểm của từng người. Khi hỏi được các bạn trả lười úp úp mở mở như sau:

- Anh nói: Ỏ Cả ba đều được 7".

- Dũng nói: Ỏ Bạn Hằng 7 điểm, bạn Việt 9 điểm, bạn Anh 8 điểm".

- Hằng nói: Ỏ Bạn Anh 10 điểm, bạn Dũng 8 điểm và bạn Việt 7 điểm".

- Việt nói: Ỏ Cả ba bạn đều được 8".

Bạn hãy xác định điểm của từng người? Biết rằng không có bạn nào cùng được hai bạn nói đúng điểm của mình.

Giải.

1) Thiết lập sơ đồ

Lấy hai nhóm điểm trên mặt phẳng tương ứng với hai tệp đối tưởng.

Tệp thứ nhất gồm các em Anh, Dũng, Hằng, Việt.

Tệp thứ hai gồm các điểm: 7, 8, 9, 10

Sau đó căn cứ vào câu nói của các em mà xác lập các quan hệ giữa các tệp đối tượng.

a) Theo em Anh, ba em Dũng, Hằng, Việt đều được 7, nên điểm tương ứng với Dũng, Hằng, Việt đều có đường nối với điểm ghi số 7;

b) Theo em Dũng, giữa điểm "Hằng" và điểm "7", giữa điểm "Việt" và điểm "9", giữa điểm "Anh" và điểm "8" đều có đường nối với nhau;

c) Theo em Hằng, giữa điểm "Anh" và điểm "10", giữa điểm "Dũng" và điểm "8", giữa điểm "Việt" và điểm "7" đều có đường nối với nhau;

d) Theo em Việt, giữa điểm "8" và các điểm "Anh", "Dũng", "Hằng" đều có đường nối với nhau (Hình 13);

2) Vì không có em nào được hai em đồng thười nói đúng điểm của mình, nên trong hình 13 các quan hệ song song đều bị loại bỏ, tức chỉ có quan hệ đươn mới thực hiện. Bởi vậy em Anh đạt điểm 10, em Việt đạt điểm 9, em Hằng đạt điểm 8 và em Dũng đạt điểm 7.

Ví dụ 3.6.2. *Thầy Phạm Quang đức ra một đề quỹ tích trong không gian trên báo tường của Khối. Sáu em An, Bình, Cường, đạt, Kiều, Minh nộp bài giải. Sau khi chấm xong thầy công bố kết quả riêng cho các em và khẳng định chỉ có hai em giải đúng.*

Câu hỏi ai đã giải đúng có năm câu trả lười:

1. *An và Cường*
2. *Bình và Kiều*
3. *Minh và Bình*
4. *An và Minh*
5. *An và đạt*

Khi nghe các câu trả lười trên Thầy đức mỉm cười và nói "Có 4 câu đúng một nử a, còn một câu sai tất cả" .

Bạn hãy xác định giúp hai bạn giải đúng

Giải.

Lấy hai nhóm điểm trên mặt phẳng tương ứng với hai tệp đối tượng:

1) Tệp thứ nhất gồm các câu trả lười;

Tệp thứ hai gồm các em An, Bình, Cường, đạt, Kiều, Minh.

2) Thiết lập quan hệ

Dùng đường nét liền để biểu thị khẳng định đúng, đường nét đứt biểu thị khẳng định sai.

Dựa vào điều kiện đã cho trong bài toán và phương pháp loại trừ mà thiết lập quan hệ giữa hai tệp đối tượng.

a) Giả sử em An và em Kiều giải đúng bài toán trên báo tường. Khi đó có sơ đồ quan hệ:

Sơ đồ quan hệ (Hình 14) thoả mãn toàn bộ điều kiện của bài toán, nên hai em An, Kiều giải đúng bài toán trên báo tường.

b) Xét các cặp còn lại

Ta xét các cặp tuỳ ý trong các cặp còn lại, chẳng hạn, giả sử cả hai em An, Bình đều giải đúng bài toán trên báo tường. Khi đó có sơ đồ quan hệ (Hình 15).

Sơ đồ quan hệ (Hình 15) không thoả mãn điều kiện: Một em nói sai cả hai ý nên hai em An, Bình không đồng thười giải đúng bài toán trên báo tường.

Các cặp còn lại xét tương tự và cũng chứng tỏ được các cặp này không thoả mãn điều kiện đặt ra.

Vậy em An và em Kiều là hai học sinh giải đúng bài toán do thầy Phạm Quang đức đặt ra.

Ví dụ 3.6.3. *Cô Nguyễn Thị Tính chuẩn bị cho các em học sinh nữ lớp 11 biểu diễn văn nghệ chào mừng Ngày nhà giáo Việt Nam 20 tháng 11.*

Các em Anh, Hằng, Mai mặc ba màu áo: Tím , Xanh, Hồng và có ba dây buộc tóc cùng các màu ấy.

Nhìn các em cô Tính nhận xét: "Chỉ có Anh là màu áo và màu dây buộc tóc trùng màu, áo và dây buộc tóc của Hằng đều không màu trắng, còn Mai có dây buộc tóc màu xanh" .

Bạn hãy xác định màu áo và màu dây buộc tóc của mỗi bạn.

Giải. Trong bài này có ba nhóm đối tượng:

Nhóm thứ nhất gồm ba bạn: Anh, Hằng, Mai được ký hiệu bằng ba điểm tương ứng A, H, M.

Nhóm thứ hai gồm ba màu áo: Tím Xanh, Hồng được ký hiệu bằng ba điểm tương ứng t_0, x_0, h_0;

Nhóm thứ ba gồm ba dây buộc tóc màu: tím, xanh, hồng được ký hiệu một cách tương ứng bằng t, x, h (Hình 16)

Mối quan hệ giữa các đối tượng của ba nhóm này được ký hiệu bằng;

- đường nét đứt, nếu quan hệ giữa chúng là sai,

- đường nét liền, nếu quan hệ giữa chúng là đúng.

Do Mai có dây buộc tóc màu xanh, nên điểm M và điểm x được nối bằng đường nét liền. Do áo và dây buộc tóc của Hằng đều không màu trắng, nên các cặp điểm (H, t_0), (H, t) đều nối bằng nét đứt. Từ đó suy ra cặp (H, h), (A, t) được nối bằng đường nét liền. Do Anh có màu áo và màu dây buộc tóc trùng nhau, nên cặp (A, t_0) được nối bằng nét liền. Các em Hằng, Mai đều có màu áo không trùng với màu dây buộc tóc, nên các cặp điểm (H, x_0) và (M, h_0) được nối bằng đường nét liền.

Vậy Anh mặc áo màu tím và có dây buộc tóc màu trắng,

Hằng mặc áo màu xanh và có dây buộc tóc màu hồng,

Mai mặc áo màu hồng và có dây buộc tóc màu xanh.

3.7 Phương pháp đồ thị

Rất nhiều bài toán không mẫu mực có thể giải bằng cách đưa về bài toán trên đồ thị rồi suy ra đáp án.

3.7.1 Một số khái niệm và kết quả cơ bản của lý thuyết đồ thị

Trên mặt phẳng hay không gian lấy n điểm. Giữa một số cặp điểm nối bằng những đoạn thẳng hay đoạn cong được định hướng hoặc không. Người ta gọi hình nhận được là dạng biểu diễn hình học của đồ thị hay một đồ thị. Các điểm đã chọn được gọi là đỉnh của đồ thị. Các đoạn thẳng hay đoạn cong đã nối được gọi là cạnh của đồ thị.

Nếu cạnh a nối giữa hai điểm A, B thì A, B được gọi là đỉnh của cạnh a.

Cặp đỉnh x, y được gọi là hai đỉnh kề nhau, nếu chúng khác nhau và hai đầu của cùng một cạnh.

Dãy α các đỉnh:

$$x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_i,\, x_{i+1}, \dots, x_{m-1},\, x_m$$

được gọi là một đường, nếu với mọi chỉ số i $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$ đều có x_i và x_{i+1} là hai đỉnh kề nhau. Các đỉnh x_1, x_m được gọi là các đỉnh đầu của đường cong. Người ta còn nói rằng đường α nối giữa đỉnh x_1 và đỉnh x_m.

Chu trình là một đường có hai đầu trùng nhau.

Chu trình mà nó đi qua mỗi đỉnh không quá một lần được gọi là chu trình sơ cấp.

Chu trình α được gọi là chu trình Hamiton, nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị và đi qua mỗi đỉnh một lần.

đồ thị G gọi là đồ thị liên thông, nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều có đường nối với nhau.

đồ thị G được gọi là đồ thị đầy đủ nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều được nối với nhau bằng đúng một cạnh.

Số cạnh xuất phát từ đỉnh x được gọi là bậc của đỉnh x.

Cây là một đồ thị liên thông và không có chu trình.

Trong cây T tách ra một đỉnh được gọi là đỉnh gốc, còn các đỉnh có bậc bằng 1 và không phải là gốc được gọi là lá hay đỉnh ngọn.

định lý 1: đồ thị mà trong đó tổng bậc của hai đỉnh tuỳ ý đều không nhỏ hươn số đỉnh của đồ thị, liên thông.

định lý 2: đồ thị mà trong đó bậc của mỗi đỉnh đều không nhỏ hươn 2, luôn luôn có chu trình sơ cấp.

Hệ quả 1: Nếu trong đồ thị có đúng 2 đỉnh bậc 1, các đỉnh khác có bậc không nhỏ hươn 2, thì trong G có đường nối giữa hai đỉnh bậc 1.

định lý 3: đồ thị, mà trong đó tổng bậc của hai đỉnh tuỳ ý không nhỏ hươn số đỉnh của đồ thị, luôn luôn có chu trình Hamiton.

định lý 4: Trong một đồ thị tuỳ ý số đỉnh, mà mỗi đỉnh có bậc lẻ, luôn luôn là một số chẵn.

định lý 5: Cho dãy số nguyên dương $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ \dots,\ a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$. Khi đó đồ thị đầy đủ $a_n + 1$ đỉnh với các cạnh được tô bằng n màu luôn luôn có tam giác cùng màu (chu trình gồm 3 cạnh cùng màu).

định lý 6: Cho dãy số nguyên $b_2 = 3$, $b_3 = 6, \ldots, b_{n+1} = (b_n - 1)n + 2$. đồ thị đầy đủ G với $b_{n+1} - 1$ đỉnh ($n \geqslant 2$) và các cạnh được đo bằng n màu, sao cho không có tam giác cùng màu, thì trong đồ thị G có hình 5 cạnh với các cạnh cùng màu và các đường chéo được tô các màu khác.

3.7.2 Phương pháp đồ thị

Để giải bài toán T bằng cách thông qua đồ thị cần thực hiện lần lượt hai bước sau:

1) Xây dựng đồ thị G mô tả các quan hệ

Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các đối tượng đã cho trong bài toán. Dùng ngay các ký hiệu đối tượng để ghi trên các điểm tương ứng...

Cặp điểm x, y được nối với nhau bằng một cạnh với "đặc điểm t", khi và chỉ khi các đối tượng a, y có quan hệ (t) với nhau. Khi đó bài toán T đã được chuyển về bài toán D trên đồ thị.

2) Dựa vào kết quả của lý thuyết đồ thị hoặc lý luận trực tiếp suy ra đáp án của bài toán D.

Nếu đáp án của bài toán D còn dưới dạng "ngôn ngữ đồ thị", thì căn cứ vào phép đặt tương ứng khi xây dựng đồ thị mà diễn đạt thành đáp án bằng ngôn ngữ thông thường (tức là đáp án của bài toán T).

Ví dụ 3.7.1. *Trong buổi lên lớp đầu tiên tại lớp 10 hầy Nguyễn Vũ Lương đã cho các em bài toán: Trong ngày tập trung học sinh lớp 10 đầu tiên 19 em có mặt. Mỗi em đã bắt tay ít nhất 13 em. Chứng minh rằng có ít nhất 4 em của lớp ta mà từng cặp đã bắt tay nhau trong ngày tập trung đầu tiên.*

Giải.

Bài toán được giải bằng phương pháp đồ thị

1) Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ

a)đỉnh

Lấy 19 điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với 19 em học sinh đến tập trung ngày đầu tiên. Dùng ngay tên các em để ghi trên các điểm tương ứng.

b) Cạnh

Hai điểm x, y được nối bằng:

- Cạnh màu đỏ (nét liền), nếu x, y bắt tay nhau;

- Cạnh màu xanh (nét đứt), nếu x, y không bắt tay nhau.

đồ thị nhận được ký hiệu bằng G. đồ thị G mô tả toàn bộ hiện trạng các em học sinh lớp 10 đã bắt tay nhau trong ngày đầu tiên.

2) Chứng minh trong G có ít nhất một đồ thị con đầy đủ gồm 4 đỉnh với các cạnh cùng màu đỏ.

Thật vậy, vì trong ngày đầu tiên mỗi em trong 19 em có mặt đã bắt tay it nhất 13 bạn, nên trong 18 cạnh xuất phát từ mỗi đỉnh phải có không ít hơn 13 cạnh đỏ. Khi đó số cạnh xanh xuất phát từ mỗi đỉnh không vượt quá 5.

Xét đỉnh P tuỳ ý và 13 trong số các cạnh đỏ xuất phát từ P là PA_1, $PA_2, \ldots, PA_{13}$.

Vì xuất phát từ A_1 có tối đa 5 cạnh xanh. Khi đó trong các cạnh (A_1, A_i) $(2 \leqslant i \leqslant 13)$ có ít nhất 7 cạnh đỏ xuất phát từ A_1 là (A_1, A_2) $(1 \leqslant t \leqslant 8)$. Vì xuất phát từ A_2 có không quá 5 cạnh xanh, nên trong các cạnh (A_1, A_2), (A_2, A_3) $(3 \leqslant k \leqslant 8)$ có không ít hơn 2 cạnh đỏ. Bởi vậy trong các cạnh $(A_2,\ A_k)$ $(3 \leqslant k \leqslant 8)$ có ít nhất một cạnh đỏ. Giả sử $(A_2,\ A_3)$ là cạnh đỏ. Khi đó đồ thị con gồm các đỉnh P, A_1, A_2, A_3 có tất cả các cạnh đều đỏ, nên 4 học sinh tương ứng với 4 đỉnh của đồ thị con này từng cặp đã bắt tay nhau trong buổi tập trung đầu tiên.

Bộ ba số nguyên được gọi là thuần nhất, nếu hoặc chúng có ước chung từng đôi một nguyên tố cùng nhau.

Ví dụ 3.7.2. *Trong buổi dạy số học thầy Phạm Văn Hùng đã khẳng định: đối với 6 số nguyên tuỳ ý luôn luôn có thể tìm được ít nhất một (thậm chí hai) bộ ba thuần nhất, nhưng đối với 5 số thì có thể chỉ ra vô số bộ 5 số nguyên, trong đó không có một bộ ba thuần nhất nào.*

Bạn hãy lý giải điều thầy Hùng khẳng định.

Giải.

1) Chứng minh khẳng định thứ nhất

a) Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ

đỉnh: Lấy 6 điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với 6 số đã chọn ra A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Dùng ngay các số này để ghi trên các đỉnh tương ứng.

Cạnh: Hai điểm A_i, A_k $(1 \leqslant i,\ k \leqslant 6)$ được nối bằng

- Cạnh đỏ (nét liền), nếu các số A_i, A_k có ước số chung;

- Cạnh xanh (nét đứt), nếu hai số A_i, A_k nguyên tố cùng nhau.

đồ thị nhận được ký hiệu bằng G. đồ thị G mô tả toàn bộ quan hệ ước chung trong 6 số đã chọn ra.

b) Chứng minh tam giác cùng màu

Xét đỉnh A_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ tuỳ ý, chẳng hạn A_1.

Xuất phát từ A_1 có 5 cạnh được tô bằng hai màu (đỏ, xanh). nên phải có một màu được tô trên ít nhất ba cạnh. Giả sử màu đỏ được tô trên ít nhất ba cạnh thuộc A_1 và ba trong các cạnh này là $(A_1,\ A_2)$, $(A_1,\ A_3)$, $(A_1,\ A_4)$

Khi đó có hai khả năng cần xét:

-Nếu một trong các cạnh $(A_2,\ A_3)$, $(A_2,\ A_4)$, $(A_3,\ A_4)$ màu đỏ, chẳng hạn $(A_2,\ A_3)$ màu đỏ, ta có tam giác $A_1A_2A_3$ cùng màu (màu đỏ) (Hình 17). Khi đó ba số A_1, A_2, A_3 có ước chung từng đôi một.

-Nếu cả ba cạnh $(A_2,\ A_3)$, $(A_2,\ A_4)$, $(A_3,\ A_4)$ đều màu xanh, ta được tam giác $A_2A_3A_4$ cùng màu (màu xanh) (Hình 18). Khi đó ba số A_2, A_3, A_4 nguyên tố cùng nhau.

2) Chứng minh khẳng định thứ hai bằng phản chứng

Dùng ngũ giác có các cạnh màu đỏ, các đường chéo màu xanh trên đỉnh ghi 5 số đã chọn ra để mô tả tính có ước chung của chúng.

Dùng a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 để ký hiệu 5 số nguyên tố liên tiếp tùy ý. Khi đó trong 5 số

$$a_1.a_2,\ a_2.a_3,\ a_3.a_4,\ a_4.a_5,\ a_5.a_1$$

không có một bộ ba thuần nhất nào.

Chẳng hạn: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$ khẳng định bộ năm $2.3 = 6$, $3.5 = 15$, $5.7 = 35$, $7.11 = 77$, $11.2 = 22$ không có bộ ba thuần nhất có thể nhìn dễ dàng trên hình 19.

Ví dụ 3.7.3. *Trong giờ số học của lớp 11 thầy đặng Hùng Thắng khẳng định rằng: trong 40 số nguyên tuỳ ý, mà cứ 4 số bao giờ cũng tìm được ít nhất một số có ước chung với 3 số còn lại thì tồn tại ít nhất 37 số, mà mỗi số này có ước chung với tất cả các số còn lại.*

Bạn hãy lý giải giúp điều thầy Thắng khẳng định.

Giải.

Có thể chứng minh khẳng định tổng quát đối với n ($n \geqslant 4$) số nguyên tuỳ ý. Bằng phản chứng có thể khẳng định rằng trong các số đã chọn ra có hai cặp số nguyên tố cùng nhau, thì hai cặp số này phải có phần tử chung, tức nếu có hai cặp số nguyên tố cùng nhau A, B; C, D thì $A \equiv C$; hoặc $A \equiv D$; hoặc $B =\equiv C$; hoặc $B \equiv D$. Giả sử $B \equiv C$.

Dùng đương nét liền để biểu thị tính có ước chung, đường nét đứt để chỉ tính nguyên tố cùng nhau.

Với E là số tuỳ ý trong các số đã chọn ra xét bộ bốn số A, B, D, E. Khi đó E phải là có ước chung với ba số còn lại (Hình 20)

Thay số D bằng số F tuỳ ý trong các số đã chọn ra (khác A, B và D). Trong bộ bốn A, B, E, F nếu F có ước chung với ba số còn lại, thì khi đó E cũng có ước chung với F, nên E cũng có ước chung với cả ba số A, B, F (Hình 21).

Vì F là số tuỳ ý trong các số chọn ra, nên E có ước chung với tất cả các số còn lại.

Vậy mỗi số đã chọn ra, trừ A, B, D đều có ước chung với tất cả các số còn lại, tức không ít hươn $n - 3$ số có ước chung với tất cả các số còn lại.

Với $n = 40$ ta được khẳng định của thầy đặng Hùng Thắng.

Ví dụ 3.7.4. *Nhân dịp 40 năm ngày thành lập khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học Khoa học tự nhiên, đại học quốc gia Hà Nội, thầy Lê Văn Việt tổ chức giải bóng bàn. Hai em Minh, đức vào chung kết. thầy Việt quy định: Người thắng cuộc là người đầu tiên thắng 3 ván hoặc thắng hai ván liên tiếp. Bạn hãy xác định giúp số khả năng thắng thua có thể xảy ra?*

Giải.

Dùng M ký hiệu Minh thắng, D để ký hiệu đức thắng. Dùng cây để mô tả toàn bộ hiện trạng có khả năng xảy ra.

Xây dựng cây

Xuất phát từ điểm S (gốc).

Ván đầu tiên có hai khả năng: Minh thắng hoặc đức thắng, nên lấy hai điểm, sao cho hai điểm này và S không thẳng hàng. Một trong hai điểm ghi M, điểm còn lại ghi D. Nối S với M bằng một đoạn thẳng hoặc một đoạn cong để biểu thị "Minh thắng" . Tương tự, để biểu thị "đức thắng" nối S và D bằng một đoạn thẳng hoặc đoạn cong.

Ván thứ hai cũng có hai khả năng: Minh thắng hoặc đức thắng, nên xuất phát từ M lấy hai điểm mới và ghi ký hiệu tương ứng M, D và từ Mnối với hai điểm mới thêm và từ D cũng chọn thêm hai điểm mới ghi M và D rồi từ D kẻ hai đoạn thẳng hoặc hai đoạn cong tới hai điểm mới thêm.

Tiếp theo thực hiện kéo dài các đường một cách tương tự, nhưng do quy định điều kiện thắng, nên những đường mà trên đó hoặc có hai đỉnh liên tiếp được ghi bằng cùng một ký hiệu, hoặc có 3 đỉnh được ghi bằng cùng một ký hiệu đều không được kéo dài.

Vì Minh và đức chỉ cần đấu 5 ván, thì nhất định hoặc có người thắng liên tiếp 2 ván hoặc có người thắng 3 ván. Bởi vậy những đường xuất phát từ S đều gồm không quá 5 cạnh (Hình 22).

Cây này có 10 đỉnh ngọn, nên có 10 khả năng thắng thua xảy ra.

Ví dụ 3.7.5. *Thầy Phạm đăng Long phát động đợt thi viết chương trình hay tại khối 10. Bốn em Bình, Minh, Nam, Thùy đạt bốn giải đầu. Có ba dự đoán xếp hạng sau đây:*

1. *Bạn Bình nhất, bạn Minh nhì;*
2. *Bạn Bình nhì, bạn Thùy ba;*
3. *Bạn Nam Nhì, bạn Thùy tư*

Khi nghe các dự đoán thầy Long nói "Mỗi dự đoán đúng được thứ tự một em" .

Bạn hãy xác định thứ tự của các em.

Giải.

Dùng chữ cái đầu tiên của tên để ký hiệu tên và chỉ số để biểu thị thứ tự của các ban. Khi đó x_i biểu thị "em x đạt giải thứ i" $1 \leqslant i \leqslant 4$.

1) Xây dựng cây biểu hiện các dự đoán.

Vẽ cây xuất phát từ điểm O hai nhánh đầu ứng với dự đoán thứ nhất: B_1, M_2. Từ đỉnh cuối của mỗi nhánh ứng với dự đoán thứ hai: B_1, T_3. Từ đỉnh cuối của mỗi nhánh này vẽ hai nhánh ứng với đoạn thứ ba: N_2, T_4

2) Phân tích để tìm ra đáp án

Chọn đường đi từ O đến đỉnh ngọn thoả mãn các điều kiện:

- Một người không được xếp hai hạng khác nhau,

- Hai người không thể được xếp cùng một thứ hạng.

đường $B_1T_3N_2$ thoả mãn đồng thười hai điều kiện trên, nên kết quả là:

Bạn Bình xếp thứ nhất,

Bạn Nam xếp thứ hai,

Bạn Thùy xếp thứ ba,

Bạn Minh xếp thứ tư.

Ví dụ 3.7.6. *Thầy Nguyễn Thành Văn khi trao đổi với các em học sinh lớp 12 về Toán học rười rạ c đã khẳng định: "Lý thuyết đồ thị có ứng dụng rất tốt trong Toán phổ thông, chẳng hạn, Bài toán: Trên mặt phẳng lấy 7 điểm bất kỳ , không có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng luôn luôn tìm được ít nhất 2 cặp điểm, mà đoạn thẳng nối giữa mỗi cặp điểm này là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó, đồng thười là cạnh dài nhất của một tam giác khác trong các tam giác có đỉnh là những điểm đã cho, có thể giải một cách dễ dàng bằng phương pháp đồ thị".*

Bạn hãy lý giải giúp điều thầy Văn khẳng định.

Giải.

Không giảm tính tổng quát, ký hiệu 7 điểm đã chọn ra bằng $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7$.

1) Chứng minh tồn tại cặp điểm thứ nhất

Xét 6 điểm ng A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Vì khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một, nên bất ỳ tam giác nào có đỉnh là các điểm đã cho đều có cạnh dài nhất và cạnh ngắn nhất.

a) Tô màu các đoạn thẳng nối giữa các cặp điểm đã cho.

Ta dùng màu xanh để tô mỗi đoạn thẳng mà nó là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Sau khi các đoạn thẳng được phép tô màu xanh đã tô xong phần đoạn thẳng còn lại tô màu đỏ. Khi đó được đồ thị đầy đủ G.

b) Lý luận để suy ra đáp án

đồ thị G đầy đủ 6 đỉnh với hai màu cạnh: Xanh, đỏ nên theo định lý 5, G có tam giác cùng màu. Giả sử $A_1A_2A_3$ là tam giác cùng màu và A_1A_2 là cạnh dài nhất.

Vì tam giác nào cũng có cạnh ngắn nhất và cạnh này được tô màu xanh trước, nên tam giác $A_1A_2A_3$ phải là tam giác xanh.

Cạnh A_1A_2 trong tam giác $A_1A_2A_3$ là cạnh dài nhất, nhưng nó có màu xanh, nên A_1A_2 đã là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho.

2) Chứng minh tồn tại cặp điểm thứ hai

Loại điểm A_1 và kết nạp A_7. Thực hiện tương tự như phần I ta cũng khẳng định được trong 6 điểm A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 cũng tồn tại một cặp điểm thoả mãn điều kiện đặt ra và khác với cặp A_1, A_2.

Khẳng được chứng minh.

Chương 4

Phương pháp giải phương trình và hệ phương trình

4.1 Phương pháp nghiệm duy nhất

Trong phần này ta ký hiệu $I(a,b)$ là để chỉ một trong bốn miền liên thông trên trục số thực $\mathbb{R}$, đó là $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b). Xét phương trình $f(x)=g(x)$. Nếu phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm $x=x_0$ trong $I(a,b)$ và với mọi $x \neq x_0,\ x \in I(a,b)$ ta luôn có $f(x) \neq g(x)$ thì $x=x_0$ là nghiệm duy nhất $\in I(a,b)$ của phương trình đã cho.

Phương pháp nghiệm duy nhất dựa trên các nhận xét sau:

Bổ đề 1. *Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu thực sự (luôn luôn đồng biến hoặc luôn luôn nghịch biến) trên miền $I(a,b)$ thì trong miền đó phương trình $f(x)=f(x_0)$ có nghiệm duy nhất là $x=x_0$.*

Nghiệm $x=x_0$ nói trên thường được tìm bằng cách "đoán nhận" trong các giá trị đặc biệt của ẩn. Ta có thể xét tính đơn điệu của một hàm số bằng cách sử dụng tính chất quen biết của các hàm số sơ cấp như hàm bậc nhất, hàm mũ, hàm số logarit hoặc hàm số lượng giác, ...

Bổ đề 2. *Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu thực sự trong $I(a,b)$ và $x,y \in I(a,b)$ thì trong*

$I(a,b)$ ta luôn có:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Ví dụ 4.1.1. *Giải phương trình:*

$$|x - 6,5|^{2007} + |x - 7,5|^{2008} = 1. \tag{4.1}$$

Nhận xét rằng (4.1) có hai nghiệm : $x = 6,5$; $x = 7,5$.. Nếu $x < 6,5$ thì:

$$\begin{cases} |x-6,5| > 0 \\ |x-7,5| > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-6,5|^{2007} > 0 \\ |x-7,5|^{2008} > 1 \end{cases}$$

hay

$$|x - 6,5|^{2007} + |x - 7,5|^{2008} > 1.$$

Vậy, với $x < 6,5$ thì $|x - 6,5|^{2007} + |x - 7,5|^{2008} > 1$.

Nếu $x > 7,5$ thì:

$$\begin{cases} |x-6,5| > 1 \\ |x-7,5| > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-6,5|^{2007} > 1 \\ |x-7,5|^{2008} > 0 \end{cases}$$

hay

$$|x - 6,5|^{2007} + |x - 7,5|^{2008} > 1.$$

Vậy, với $x > 7,5$ thì $|x - 6,5|^{2007} + |x - 7,5|^{2008} > 1$.

Nếu $6,5, x < 7,5$ thì:

$$\begin{cases} 0 < |x-6,5| < 1 \\ 0 < |x-7,5| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-6,5|^{2007} < |x-6,5| = x - 6,5 \\ |x-7,5|^{2008} < |x-7,5| = 7,5 - x \end{cases}$$

hay

$$|x - 6,5|^{2007} + |x - 7,5|^{2008} < x - 6,5 + 7,5 - x = 1.$$

Vậy, với $6,5 < x < 7,5$ thì $|x - 6,5|^{2007} + |x - 7,5|^{2008} < 1$.

Tóm lại, với $x \neq 6,5;\ x \neq 7,5$ thì $|x - 6,5|^{2007} + |x - 7,5|^{2008} \neq 1$, tức là (4.1) chỉ có hai nghiệm $x = 6,5;\ x = 7,5$.

Ví dụ 4.1.2. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} = 5. \tag{4.2}$$

Xét hàm số $f(x) := \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4}$. Khi đó

$$(4.2) \Leftrightarrow f(x) = f(0).$$

Hàm số $f(x)$ xác định và đồng biến trên $[-2; +\infty)$ và $f(0) = 5$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Ví dụ 4.1.3. *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = m+1 \\ \sqrt{y} + \sqrt{1-x} = m+1 \end{cases}.$$

Điều kiện: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 1-y \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}.$

Với điều kiện này, ta viết hệ dưới dạng

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} & = m+1 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{1-y} - \sqrt{1-x} & = 0 \end{cases}.$$

Ta có $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} = \sqrt{y} + \sqrt{1-y}$. Xét hàm số $f(x) := \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$. Dể kiểm tra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1]$. Vậy nên

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Ta thu được hệ

$$\begin{cases} x & = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{1-x} & = m+1 \end{cases}$$

Dễ thấy phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = m+1$ có nghiệm duy nhất nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (β) có nghiệm duy nhất.
Để ý rằng nếu (β) có nghiệm $x = x_0$ thì (β) cũng có nghiệm $x = 1 - x_0$. Bởi vậy, giả sử (β) có nghiệm duy nhất $x = x_0$ thế thì

$$x_0 = 1 - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow m+1 = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow m = \sqrt{2} - 1.$$

Ngược lại, khi $m = \sqrt{2} - 1$ thì

$$\begin{aligned} (\beta) &\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \quad \text{(hai vế cùng } \geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow x + 1 - x + 2\sqrt{x(1-x)} = 2 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x(1-x)} = 1 \quad \text{(hai vế cùng } \geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow 4x(1-x) = 1 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0: \text{ có nghiệm duy nhất } x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tóm lại, $m = \sqrt{2} - 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.1.4. *Giải phương trình*

$$\sin x + \cos x + \sqrt{2}x - 1 = 0. \quad (7)$$

Đặt $f(x) := VT(7)$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in D = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ và

$$f'(x) = \cos x - \sin x + \sqrt{2} \geqslant 0, \ \forall x \in D.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trong D. Do đó:

$$(7) \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0 \ \ (\in D).$$

Đáp số : Phương trình (7) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 4.1.5. *Giải phương trình*

$$4x^3 + 12x - 8 - \cos 3x + 9\cos x = 0. \quad (10)$$

Đặt $f(x) := VT(10)$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in D = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ và

$$f'(x) = 12x^2 + 12 + \sin 3x - 9\sin x = 12(x^2 + 1 + \sin^3 x) > 0, \ \forall x \in D.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trong D. Do đó:

$$(10) \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0 \ \ (\in D).$$

Đáp số : Phương trình (10) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 4.1.6. *Giải phương trình*

$$x - \cos x - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (15)$$

Đặt $f(x) := VT(15)$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in D = \mathbb{R}$, $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ và

$$f'(x) = 1 + \sin x \geqslant 0, \ \forall x \in D.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trong D. Do đó:

$$(15) \Leftrightarrow f(x) = f(\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \ \ (\in D).$$

Đáp số : Phương trình (15) có nghiệm duy nhất $x = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 4.1.7. *Giải phương trình*

$$e^{-x} - \sin(e^{-x})\cos(e^{-x}) - \pi = 0. \quad (16)$$

Đặt $f(x) := VT(16)$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in D = \mathbb{R}$, $f(-\ln\pi) = 0$ và

$$f'(x) = e^{-x}(\cos 2e^{-x} - 1) \leqslant 0, \ \forall x \in D.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số nghịch biến trong D. Do đó:

$$(16) \Leftrightarrow f(x) = f(-\ln\pi) \Leftrightarrow x = \ \ (\in D).$$

Đáp số : Phương trình (16) có nghiệm duy nhất $x = -\ln\pi$.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình:
$$5^x + 12^x = 13^x.$$

2. Giải phương trình:
$$3^x = 4 - x.$$

3. Giải phương trình:
$$2x + \sqrt{x-3} = 16.$$

4. Giải phương trình:
$$\sqrt{x} + \sqrt{x-m} = \sqrt{m}.$$

5. Giải phương trình:
$$3^x(x+4) = 1.$$

6. Giải phương trình:
$$lg(x-5) = 6 - x.$$

7. Giải phương trình:
$$\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2).$$

8. Giải phương trình:
$$\log_{x-1}(x+1) = \log_3 5.$$

9. Giải phương trình:
$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2x+1} = x + 1.$$

10. Giải phương trình:
$$\log_2(x^2+x+1) + \log_2(x^2-x+1) = \log_2(x^4+x^2+1) + \log_2(x^4-x^2+1).$$

11. Giải phương trình:
$$3 - x + \sqrt[3]{4-x} = \sqrt{3+x} + \sqrt[3]{1+\sqrt{3+x}}.$$

12. Giải phương trình:
$$\log_2(1+\sqrt[3]{x}) = \log_7 x.$$

13. Giải phương trình:
$$3\log_3(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}) = 2\log_2\sqrt{x}.$$

14. Giải phương trình:
$$2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2.$$

15. Giải và biện luận phương trình:
$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m.$$

16. Xác định số nghiệm dương của phương trình:
$$12x^5 + 6x^4 - 4x^3 - x - 34 = 0.$$

17. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = 7 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+5} = 7 \end{cases}.$$

18. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \cot x - \cot y = x - y \\ 5x + 8y = 2\pi \\ 0 < x, y < \pi \end{cases}.$$

19. (VMO98-99) Giải hệ: $\begin{cases} (1 + 4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x = 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}.$

20. (VMO93-94) Giải hệ: $\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}.$

21. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} \sqrt{1+x} + \sqrt{6-y} = m \\ \sqrt{1+y} + \sqrt{6-x} = m \end{cases}.$$

22. Chứng minh rằng với mọi $a_i; b_i \in \mathbb{R};\ i \in \overline{1..n}$, phương trình sau luôn có nghiệm:
$$a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx = x.$$

23. Cho $a_j > 0$ với mọi $j \in \overline{0..n}$. Chứng minh rằng với mọi $k \in \overline{1..n}$, phương trình:
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k = a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_n x^n$$
luôn có nghiệm dương duy nhất.

24. Giải phương trình:
$$3 \log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}.$$

25. Giải phương trình:
$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3.$$

26. Giải phương trình:
$$\log_3\left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5}\right) = x^2 + 3x + 2.$$

27. Giải phương trình:
$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0.$$

4.2 Phương pháp bất đẳng thức

Phương pháp bất đẳng thức giải phương trình, bất phương trình dựa vào các nhận xét sau

Bổ đề 3. *Nếu với mọi $x \in I(a,b) \subseteq D_f \cap D_g$ ta luôn có*

$$\begin{cases} f(x) \leqslant A \\ g(x) \geqslant A \end{cases} \quad (\text{ với } A := Const \text{ cho trước}, \in \mathbb{R}),$$

thì trong $I(a,b)$ ta có

$$1)\ f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}.$$

$$2)\ f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}. \quad (\Leftrightarrow f(x) = g(x)\ )$$

3) $f(x) > g(x)$ *không có nghiệm $x \in I(a,b)$.*

4) $f(x) \leqslant g(x)$ *luôn đúng với mọi $x \in I(a,b)$.*

Bổ đề 4. *Nếu với mọi $x \in I(a,b) \subseteq D_f \cap D_g$ ta luôn có $f(x) \leqslant g(x)$ (I) và dấu bằng trong bất đẳng thức (I) xảy ra khi và chỉ khi x thoả mãn điều kiện (α) thì trong $I(a,b)$ ta có*

1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (\alpha)$. *(xảy ra dấu "=" trong $(*)$)*

2) $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow (\alpha)$. *(xảy ra dấu "=" trong $(*)$)*

3) $f(x) > g(x)$ *không có nghiệm $x \in I(a,b)$.*

4) $f(x) \leqslant g(x)$ *luôn đúng với mọi $x \in I(a,b)$.*

Nhận xét sau là hệ quả trực tiếp của nhận xét 4. Phương pháp giải phương trình, bất phương trình dựa vào nhận xét này còn được gọi là phương pháp tổng các số hạng không âm hay là phương pháp tổng các bình phương.

Bổ đề 5. *Nếu với mọi $x \in I(a,b)$ ta luôn có $A \geqslant 0$; $B \geqslant 0$; $C \geqslant 0$ thì trong $I(a,b)$ ta có:*

$$A + B + C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Đặc biệt:

$$1)\ \ A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

$$2)\ A^{2n} + \sqrt[2k]{B} + |C| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 4.2.1. *Giải phương trình:*

$$x^2 + 1 = \sqrt[4]{1 - \sin^4 x}. \quad (1)$$

Với mọi x thuộc tập xác định ta luôn có $VT(1) \geqslant 1$, đồng thời $VP(1) \leqslant 1$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} VT(1) = 1 \\ VP(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ \sqrt[4]{1 - \sin^4 x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Ví dụ 4.2.2. *Giải phương trình:*

$$2\sin^5 x + 3\cos^3 x = 5. \quad (2)$$

Với mọi x thuộc tập xác định $\mathbb{R}$ ta luôn có

$$\begin{cases} 2\sin^5 x \leqslant 2.1 = 2 \\ 3\cos^3 x \leqslant 3.1 = 3 \end{cases} \Rightarrow VT(2) \leqslant 2.1 + 3.1 = 5 = VP(2).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^5 x = 1 \\ \cos^3 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = \sin^2 x + \cos^2 x = 2$: vô lý.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4.2.3. *Giải phương trình:*

$$6x - x^2 - 2 = |x - 1| + |x - 2| + |2x - 3| + |4x - 13|. \quad (3)$$

Với mọi x thuộc tập xác định $\mathbb{R}$ ta luôn có

$$\begin{aligned} VP(3) &= |x - 1| + |x - 2| + |2x - 3| + |13 - 4x| \\ &\geqslant |x - 1 + x - 2 + 2x - 3 + 13 - 4x| = 7. \end{aligned}$$

Còn $VT(3) = 7 - (x - 3)^2$ luôn $\leqslant 7$ nên

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} VT(3) = 7 \\ VP(3) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - (x - 3)^2 = 7 \\ |x - 1| + |x - 2| + |2x - 3| + |13 - 4x| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

Ví dụ 4.2.4. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 &= 0 \quad (\alpha) \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 &= 0 \quad (\beta) \end{cases}. \quad (4)$$

Nếu $y = 0$ thì từ (α) ta có $x = 0$. Thay vào (β) được $3 = 0$: vô lý. Vậy $y \neq 0$. Coi (α) là phương trình bậc hai ẩn x. Ta có

$$(\alpha) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta'_{(\alpha)} = 1 - y^4 \geqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant y \leqslant 1. \qquad (\alpha.1)$$

Tương tự, coi (β) là phương trình bậc hai ẩn x ta cũng có

$$(\beta) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta'_{(\beta)} = -2 - 2y^3 \geqslant 0 \Rightarrow y \leqslant -1. \qquad (\beta.1)$$

Từ $(\alpha.1)$ và $(\beta.1)$ ta được $y = -1$. Thay vào (α) được $x = 1$. Các giá trị này thoả mãn hệ phương trình đã cho. Vậy hệ đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ví dụ 4.2.5. *Giải phương trình:*

$$\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + \tan^2 x - 2\tan x + \frac{3}{2} = 0. \quad (5)$$

Ta có

$$(5) \Leftrightarrow (\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\tan x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \tan x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\quad x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 4.2.6. *Giải phương trình:*

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Ta có

$$\begin{aligned} VT(6) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 2\cos^2\frac{x+y}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Big(2\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\Big)^2 + \sin^2\frac{x-y}{2} \\ &\leqslant \frac{3}{2} = VP(6) \quad (\alpha). \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\sin^2\frac{x-y}{2}=0$ hay

$$\begin{cases}2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}=0\\ \sin\frac{x-y}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{x-y}{2}=1\\ \cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\frac{x-y}{2}=-1\\ \cos\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-y}{2}=2k\pi\\ \frac{x+y}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi\end{cases}$$

tức

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2(n+k)\pi\\ y=\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+2(n+k)\pi\\ y=-\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{2\pi}{3}+2(n+k)\pi\\ y=\frac{2\pi}{3}+2(n-k)\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{2\pi}{3}+2(n+k)\pi\\ y=-\frac{2\pi}{3}+2(n-k)\pi\end{cases}\end{array}\right.\quad(\text{với } k,\ n\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình (6) (xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức (α)) có nghiệm :

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2(n+k)\pi\\ y=\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+2(n+k)\pi\\ y=-\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi\end{cases}\vee$$

$$\vee\begin{cases}x=\frac{2\pi}{3}+2(n+k)\pi\\ y=\frac{2\pi}{3}+2(n-k)\pi\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\frac{2\pi}{3}+2(n+k)\pi\\ y=-\frac{2\pi}{3}+2(n-k)\pi\end{cases}.$$

(trong đó $k,\ n$ là các số nguyên.)

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình:

$$3^{x^2}=\cos x.$$

2. Giải phương trình:

$$2\cos\frac{x^2+3x}{5}=2^x+2^{-x}.$$

3. Giải phương trình:
$$3x^2 - 2x^3 = \log_2(x^2+1) - \log_2 x.$$

4. Giải phương trình:
$$\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{1-x} = 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

5. Giải phương trình:
$$x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy.$$

6. Giải phương trình:
$$\log_3(x^2+x+1) - \log_3 x = 2x - x^2.$$

7. Giải phương trình:
$$\sin^{2000} x + \cos^{2000} x = 1.$$

8. Giải phương trình:
$$2^{1+x} + 2^{1-x} + 3^{1+x} + 3^{1-x} = 5^{1+x} + 5^{1-x}.$$

9. Giải phương trình:
$$8^{\sin^2 x} + 8^{\cos^2 x} = 10 + \cos 2y.$$

10. Giải phương trình:
$$(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1).$$

11. Giải phương trình:
$$16x^4 - 72x^3 + 81x^2 - 28 + 16(x - \sqrt{x-2}) = 0.$$

12. Giải phương trình:
$$x^4 - 3x^2 - 8x + 20 = 0.$$

13. Giải phương trình:
$$5x^2 + 5y^2 - 8xy - 2x - 2y + 2 = 0.$$

14. Giải phương trình:
$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin x.\sin y + \sin x + \sin y - 1.$$

15. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình:
$$\sqrt{2-x^2}\sin x + \sqrt{2+x^2}\cos x = |a+1| + |a-1|.$$

16. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}.$$

17. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}.$$

18. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

4.3 Phương pháp đưa về hệ

Nếu trong phương trình đã cho có hai bộ phận có mối liên quan đặc biệt thì ta có thể đặt mỗi bộ phận là một ẩn mới, đưa phương trình đã cho về hệ hai ẩn. Phương trình thứ nhất của hệ là phương trình đã cho viết theo ẩn mới, Phương trình thứ hai của hệ thể hiện mối liên quan đặc biệt nói trên, viết theo ẩn mới. Ta cũng có thể chỉ đặt một ẩn mới, đưa về hệ hai ẩn: mới và cũ. Nếu khi đặt một ẩn mới mà thu được phương trình bậc hai đối với ẩn mới đó thì ta có thể đặt ẩn phụ tất.

Ví dụ 4.3.1. *Giải phương trình :*
$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{1-x}. \quad (1)$$

Đặt
$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{2-x} \\ v = \sqrt{x-1} \end{cases} \quad \text{với điều kiện } v \geqslant 0\ (*).$$

Khi đó
$$\begin{aligned}
(1) \to & \begin{cases} u = 1 - v \\ u^3 + v^2 = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} v = 1 - u \\ u^3 + (1-u)^2 = 1\ (\alpha) \end{cases} . (1.1) \\
(\alpha) \Leftrightarrow & \ u^3 + u^2 - 2u = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 1 \vee u = -2. \\
\text{Vậy } (1.1) \Leftrightarrow & \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases} \quad \text{(đều thoả mãn } (*)\text{).} \\
\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 0 \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = -2 \\ \sqrt{x-1} = 3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \ x = 2 \vee x = 1 \vee x = 10.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm : $x = 2 \vee x = 1 \vee x = 10$.

Ví dụ 4.3.2. *Giải phương trình :*

$$3.4^x + (3x - 10)2^x + 3 - x = 0. \quad (2)$$

Coi (2) là phương trình bậc hai với ẩn là 2^x. Có $\Delta = (3x-10)^2+12(x-3) = (3x-8)^2$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = \dfrac{-3x + 10 - (3x - 8)}{6} = 3 - x \quad (\alpha) \\ 2^x = \dfrac{-3x + 10 + (3x - 8)}{6} = \dfrac{1}{3} \quad (\beta) \end{array}\right.$$

$$(\alpha) \Leftrightarrow f(x) = 2^x + x = 3 = f(1) \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } f(x) \text{ là hàm số đồng biến).}$$

$$(\beta) \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{3} = -\log_2 3.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 1 \ \vee \ x = \log_2 3$.

Ví dụ 4.3.3. *Giải phương trình :*

$$2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}. \quad (3)$$

Đặt $\sqrt{4x + 5} = \alpha x + \beta$. Chọn $\alpha,\ \beta$ sao cho hệ hai ẩn $x,\ y$ thu được là hệ phương trình đối xứng loại hai ta được $\alpha = 2,\ \beta = -3$. Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 = 2y - 3 \\ 4x + 5 = 4y^2 - 12y + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \ (i) \\ x = y^2 - 3y + 1 \ (ii) \end{cases}.$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được

$$x - y = x^2 - y^2 - 3x + 3y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow y = x \ (\alpha) \vee y = 2 - x \ (\beta).$$

Thay (α) vào (i) được

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} := x_1 \ \vee \ x = 2 + \sqrt{3} := x_2.$$

Thay (β) vào (i) được

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} := x_3 \ \vee \ x = 1 + \sqrt{2} := x_4.$$

Thử lại vào phương trình ta thấy chỉ có hai nghiệm $x_2,\ x_3$ thoả mãn. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2 + \sqrt{3} \ \vee \ x = 1 - \sqrt{2}$.

Chú ý: Ví dụ này có thể được giải đơn giản hơn như sau:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \geqslant 0 \\ (2x^2 - 6x - 1)^2 = 4x + 5 \quad (a) \end{cases}. \quad (3.1)$$

$$
\begin{aligned}
(a) &\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 1 = 0 \ (\Rightarrow 2x^2 - 6x - 1 = 2x - 3) \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \ (\Rightarrow 2x^2 - 6x - 1 = 1 - 2x) \end{array}\right. . \\
\text{Vậy } (3.1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \geqslant 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - 2x \geqslant 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{2} \\ x = 2 - \sqrt{3} \ \vee \ x = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \ \vee \ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \ \vee \ x = 1 - \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2 + \sqrt{3} \ \vee \ x = 1 - \sqrt{2}$.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình :
$$2 - x^2 = \sqrt{2 - x}.$$

2. Giải phương trình :
$$x = 1 - 2004(1 - 2004x^2)^2.$$

3. Giải phương trình :
$$\log_2^2 x + (x - 1)\log_2 x = 6 - 2x.$$

4. Giải phương trình :
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} = 2.$$

5. Giải phương trình :
$$(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2.$$

6. Giải phương trình :
$$7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x + 9}{28}}.$$

7. Giải phương trình :
$$2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x + 3}{2}}.$$

8. Giải phương trình :
$$\sqrt{9x^2 + 16} \geqslant 2\sqrt{2x + 4} + 4\sqrt{2 - x}.$$

4.4 Phương pháp đảo ẩn

Bổ đề 6. *Xét phương trình $f(x;m) = 0 \quad (1) \qquad$ (ẩn x, tham số m) Ta có thể coi (1) là phương trình ẩn m, tham số x. Giải m theo x rồi quay trở lại ẩn x. Phương pháp này thường được sử dụng khi trong phương trình (1) tham số m có mặt với bậc hai và biệt thức Δ của phương trình bậc hai ẩn m đó là biểu thức chính phương. Trong một số trường hợp ta còn có thể coi số là ẩn.*

Ví dụ 4.4.1. *Giải phương trình*

$$x^4 - 10x^3 - 2(a-11)x^2 + 2(5a+6)x + 2a + a^2 = 0. \quad (1)$$

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn a:

$$a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x = 0. \quad (1.1)$$

Có $\Delta' = (x^2 - 5x - 1)^2 - (x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x) = (x-1)^2$ nên

$$(1.1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcc} a & = & x^2 - 4x - 2 \\ a & = & x^2 - 6x \end{array}\right. .$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 4x - a - 2 & = 0 \quad (\alpha) \\ \quad x^2 - 6x - a & = 0 \quad (\beta) \end{array}\right. .$$

Xét (α) có $\Delta'_1 = a+6$. Nếu $\Delta'_1 < 0 \Leftrightarrow a < -6$ thì (α) vô nghiệm . Nếu $\Delta'_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -6$ thì

$$(\alpha) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ = 2 - \sqrt{a+6} := x_1 \\ x \ = 2 + \sqrt{a+6} := x_2 \end{array}\right. .$$

Xét (β) có $\Delta'_2 = a+9$. Nếu $\Delta'_2 < 0 \Leftrightarrow a < -9$ thì (β) vô nghiệm . Nếu $\Delta'_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -9$ thì

$$(\alpha) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ = 3 - \sqrt{a+9} := x_3 \\ x \ = 3 + \sqrt{a+9} := x_4 \end{array}\right. .$$

Từ đó có kết luận: +) Nếu $a < -9$ thì phương trình (1) vô nghiệm. +) Nếu $-9 \leqslant a < -6$ thì phương trình (1) có hai nghiệm: $x = x_3 \vee x = x_4$. +) Nếu $a \geqslant -6$ thì phương trình (1) có bốn nghiệm:

$$x = x_1 \vee x = x_2 \vee x = x_3 \vee x = x_4.$$

Ví dụ 4.4.2. *Giải phương trình*

$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5. \quad (2)$$

Đặt $5 := a$ và coi (2) là phương trình ẩn a:

$$x^2 + \sqrt{x+a} = a. \quad (2.1)$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
(2.1) &\Leftrightarrow \sqrt{a+x} = a - x^2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a - x^2 & \geqslant 0 \quad (*) \\ a + x & = (a-x^2)^2 = a^2 - 2x^2a + x^4 \quad (\alpha) \end{cases}. \\
\text{Mà } (\alpha) &\Leftrightarrow a^2 - (2x^2+1)a + x^4 - x = 0 \quad (\text{ có } \Delta = (2x+1)^2 \text{ }) \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcc} a & = & x^2+x+1 \\ a & = & x^2 - x \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Nhưng } a = 5 \text{ nên } (2) &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x + 1 = 5 \\ 5 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x = 5 \\ 5 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \quad (\Rightarrow 5 - x^2 = x + 1) \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x - 5 = 0 \quad (\Rightarrow 5 - x^2 = -x) \\ -x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \vee \begin{cases} x \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}.
\end{aligned}
$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}.$$

Chú ý: Phương trình này còn có thể được giải như sau:

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 5 - x^2\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x^2 \geqslant 0 \quad (*)\\ x + 5 = (5 - x^2)^2 = x^4 - 10x^2 + 25 \quad (\alpha). \end{cases}\\
\text{Mà } (*) &\Leftrightarrow -\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}.\\
\text{Còn } (\alpha) &\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0\\
&\Leftrightarrow (x^2 + x - 4)(x^2 - x - 5) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 4 = 0\\ x^2 - x - 5 = 0 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x &=& \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad (\text{ không thoả mãn } (*))\\ x &=& \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad (\text{ thoả mãn } (*))\\ x &=& \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \quad (\text{ thoả mãn } (*))\\ x &=& \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \quad (\text{ không thoả mãn } (*)) \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}.$$

Ví dụ 4.4.3. *Giải phương trình*

$$a^7 - x = \sqrt[7]{a+x}. \quad (3)$$

Coi (3) là phương trình ẩn a. Ta có

$$(3) \Leftrightarrow a = \sqrt[7]{\sqrt[7]{a+x} + x} = f(f(a)). \quad (3.1)$$

Với $f(a) = \sqrt[7]{a+x}$ là hàm số đồng biến với mọi $a \in \mathbb{R}$. Do đó

$$(3.1) \Leftrightarrow f(a) = a \Leftrightarrow \sqrt[7]{a+x} = a \Leftrightarrow a + x = a^7 \Leftrightarrow x = a^7 - a.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = a^7 - a$.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình

$$(8a^2 + 1)\sin^3 x - (4a^2 + 1)\sin x + 2a\cos^3 x = 0.$$

2. Giải phương trình
$$x^2 - \sqrt{a - x} = a.$$

3. Giải phương trình
$$x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3.$$

4. Giải phương trình
$$x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + 3x + \sqrt{3} - 1 = 0.$$

5. Giải phương trình
$$x^6 + (c^2 - b^2)x^2 - bc^2 = 0.$$

6. Giải phương trình
$$a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 = 0.$$

7. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm thực phân biệt:
$$x^4 - 2mx^2 - x + m^2 - m = 0.$$

4.5 Phương pháp sử dụng các tính chất đặc biệt của hệ thức

Trong phần này ta sử dụng các nhận xét sau:

Bổ đề 7. *Nếu một hệ thức là chẵn đối với x (khi thay x bởi $-x$ hệ thức không đổi) mà có nghiệm $x = \alpha$ thì nó cũng có nghiệm $x = -\alpha$. Bởi vậy, hệ thức chẵn đối với x nếu có nghiệm duy nhất thì nghiệm đó là $x = 0$. Nếu một hệ thức là đối xứng đối với x và y (khi đổi chỗ x, y cho nhau thì hệ thức không đổi) mà có nghiệm $x = \alpha$; $y = \beta$ thì nó cũng có nghiệm $x = \beta$; $y = \alpha$. Bởi vậy, một hệ thức đối xứng đối với x và y mà có nghiệm duy nhất $(x; y) = (\alpha; \beta)$ thì ta phải có $\alpha = \beta$ hay là $x = y$.*

Bổ đề 8. *Nếu một khẳng định T nào đó đúng với mọi giá trị của chữ $x \in I(a, b)$ thì khẳng định T cũng đúng khi x nhận những giá trị cụ thể, $\in I(a, b)$, được chọn một cách thích hợp.*

Bổ đề 9. *Nếu đa thức bậc n mà có nhiều hơn n nghiệm thì đa thức đó đồng nhất bằng 0.*

Chú ý: Các bài tập sử dụng ba nhận xét trên thường có lời giải được trình bày theo phương pháp điều kiện cần và đủ. Các lập luận của các nhận xét này phải được trình bày rõ trong bài làm.

Bổ đề 10. *(ý nghĩa đại số của Min, Max)*

1. *Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trong miền liên thông $(*) \subseteq D_f$.*
   Xét phương trình: $f(x) = k$ (1).
   Gọi $m = \underset{(*)}{Min} f(x)$; $M = \underset{(*)}{Max} f(x)$; $I = \underset{(*)}{Inf} f(x)$; $S = \underset{(*)}{Sup} f(x)$. Khi đó:

$$\text{(1) có nghiệm } x \in (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leqslant k \leqslant M \\ m \leqslant k < S \\ I < k \leqslant M \\ I < k < S \end{array}\right.$$

   (chỉ xảy ra một trong các trường hợp này.)
   Như vậy, nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trong tập xác định D_f là miền liên thông thì tập giá trị $\mathbb{R}_f$ của nó chỉ có thể có một trong các dạng sau:

$$[m; M]\ ;\ (m; M]\ ;\ [m; M)\ ;\ (m; M).$$

2. *Giả sử hàm số $y = f(x)$ (không yêu cầu liên tục trong $I(a, b)$) có các giá trị m, M hoặc I, S trong $I(a, b)$ ($I(a, b)$ ở đây cũng không yêu cầu liên thông). Xét bất phương trình: $f(x) > k$ (2). Khi đó:*

   - *(2) có nghiệm $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k < M$ $[k < S]$.*
   - *(2) không có nghiệm $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k \geqslant M$ $[k \geqslant S]$.*
   - *(2) luôn đúng với mọi $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k < m$ $[k \leqslant I]$.*

   Xét bất phương trình: $f(x) \geqslant k$ (3). Khi đó:

   - *(3) có nghiệm $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k \leqslant M$ $[k < S]$.*
   - *(3) không có nghiệm $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k > M$ $[k \geqslant S]$.*
   - *(3) luôn đúng với mọi $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k \leqslant m$ $[k \leqslant I]$.*

   Xét bất phương trình: $f(x) < k$ (4). Khi đó:

   - *(4) có nghiệm $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k > m$ $[k > I]$.*
   - *(4) không có nghiệm $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k \leqslant m$ $[k \leqslant I]$.*
   - *(4) luôn đúng với mọi $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k > M$ $[k \geqslant S]$.*

   Xét bất phương trình: $f(x) \leqslant k$ (5). Khi đó:

   - *(5) có nghiệm $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k \geqslant m$ $[k > I]$.*
   - *(5) không có nghiệm $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k < m$ $[k \leqslant I]$.*
   - *(5) luôn đúng với mọi $x \in I(a, b) \Leftrightarrow k \geqslant M$ $[k \geqslant S]$.*

Ví dụ 4.5.1. *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} x^2 = 2^{|x|} + |x| - y - m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} . \quad (1)$$

Nhận xét rằng khi thay x bởi $-x$ hệ đã cho không đổi. Do đó, nếu hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ thì hệ cũng có nghiệm $\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \beta \end{cases}$. Bởi vậy, gỉa sử hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$, thế thì

$$\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow m = 0 \vee m = 2.$$

Ngược lại, khi $m = 0$, hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} x^2 = 2^{|x|} + |x| - y \quad (\alpha) \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (\beta) \end{cases} . \quad (1.1)$$

Từ (β) có $-1 \leqslant y \leqslant 1$ và $0 \leqslant |x| \leqslant 1 \Rightarrow |x|(1 - |x|) \geqslant 0$.
Từ (α) có $y = 2^{|x|} + |x|(1 - |x|) \geqslant 2^0 + 0 = 1$.
Từ các đánh giá trên đối với y ta được $y = 1$. Thay vào (β) được $x = 0$. Dễ thấy nghiệm $(x; y) = (0; 1)$ thoả mãn hệ (1.1). Vậy với $m = 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.
Khi $m = 2$ ta thấy ngay hệ thu được có ít nhất hai nghiệm phân biệt là

$$(x; y) = (0; -1) \text{ và } (x; y) = (1; 0),$$

tức là khi $m = 2$ hệ đã cho không có nghiệm duy nhất. Vậy chỉ có $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.5.2. *Tìm a để với mọi b, hệ phương trình sau luôn có ít nhất một nghiệm :*

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 \quad (\alpha) \\ a + bxy + x^2 y = 1 \quad (\beta) \end{cases} . \quad (2)$$

Giả sử tồn tại a để hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ với mọi b. Khi đó, nếu coi phương trình (β) là phương trình ẩn b thì nó có vô số nghiệm

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ a + x^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Ngược lại, khi $a = 1$ ta thấy ngay hệ đã cho có nghiệm $x = 0;\ y = 0$ với mọi b. Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.5.3. *Cho $y = 4x^3 + mx$. Tìm m để $|y| \leqslant 1 \quad (3)$ với mọi x thoả mãn $|x| \leqslant 1$.*

Giả sử (3) đúng với mọi x thoả mãn $|x| \leqslant 1$. Khi đó (3) cũng đúng với $x = 1;\ x = \dfrac{1}{2}$.
Tức là:

$$\begin{cases} |4 + m| \leqslant 1 \\ \left| \dfrac{1}{2} + \dfrac{m}{2} \right| \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leqslant m \leqslant -3 \\ -3 \leqslant m \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow m = -3.$$

Ngược lại, khi $m = -3$, với $x| \leqslant 1$ ta có thể đặt $x = \cos t$, khi đó

$$y = 4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t \Rightarrow |y| = |\cos 3t| \leqslant 1 \Rightarrow |y| \leqslant 1,\ \forall x,\ |x| \leqslant 1.$$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.5.4. *Tìm m để mọi $x \in [-4; 6]$ đều là nghiệm của bất phương trình sau*

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leqslant x^2 - 2x + m. \quad (4)$$

Giả sử (4) đúng với mọi $x \in [-4; 6]$, thế thì (4) cũng đúng với $x = 1$, hay là

$$\sqrt{(4+1)(6-1)} \leqslant 1^2 - 2.1 + m \Rightarrow m \geqslant 6.$$

Ngược lại, với $m \geqslant 6$ và $x \in [-4; 6]$ ta có $x + 4 \geqslant 0;\ 6 - x \geqslant 0$ nên

$$\begin{cases} VT(4) & \leqslant \dfrac{4+x+6-x}{2} = 5 \text{ (bất đẳng thức Cauchy)} \\ VP(4) & = (x-1)^2 + m - 1 \geqslant 0 + 6 - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow VT(4) \leqslant VP(4).$$

Nói cách khác, khi $m \geqslant 6$ thì (4) đúng với mọi $x \in [-4; 6]$. Vậy $m \geqslant 6$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.5.5. *Tìm m để bất phương trình*

$$x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 > 0 \quad (1)$$

thoả mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (|x - m|)^2 + 2|x - m| + 2 > m^2.$$

Đặt $t = |x - m|$. Với $x \in \mathbb{R}$ có $t \geqslant 0$ $(*)$. Bất phương trình đã cho (1) trở thành

$$f(t) = t^2 + 2t + 2 > m^2 \quad (1.1).$$

(1) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ (1.1) đúng với mọi $t \in I(a, b)$ $\Leftrightarrow m^2 < \cosh(*) Min\ f(t)$.
Mà với $t \in I(a, b)$ có

$$f(t) \geqslant 0^2 + 2.0 + 2 = 2 = f(0) \Rightarrow \cosh(*) Min\ f(t) = 2.$$

Vậy $m^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.5.6. *Tìm m để phương trình*

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+4} - m\sqrt{4-x} = 3m \quad (2) \quad \textit{có nghiệm.}$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+4 \geqslant 0 \\ 4-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant -4 \\ x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 4 \ (*)$$

Với $x \in I(a,b)$ có $\sqrt{4-x}+3 \neq 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{4-x}+3} := f(x). \quad (2.1)$$

Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên (*) nên (2.1) có nghiệm $\Leftrightarrow \cosh(*)Min\ f(x) \leqslant m \leqslant \cosh(*)Max\ f(x)$. Mà với $x \in I(a,b)$ ta có

$$\begin{cases} 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2 \\ 2 \leqslant \sqrt{x+4} \leqslant 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2 \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x+4} \leqslant 2+2\sqrt{2} \ (\alpha).$$

Mặt khác có:

$$0 < 3 = 0+3 \leqslant \sqrt{4-x}+3 \leqslant 2+3 = 5 \ (\beta).$$

Từ (α) và (β) có

$$f(0) = \frac{2}{5} \leqslant f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{4-x}+3} \leqslant \frac{2+2\sqrt{2}}{3} = f(4).$$

Vậy $\cosh(*)Min\ f(x) = \dfrac{2}{5}$; $\cosh(*)Max\ f(x) = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{3}$. Do đó $\dfrac{2}{5} \leqslant m \leqslant \dfrac{2+2\sqrt{2}}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.5.7. *Tìm a để bất phương trình*

$$x^3+3x^2-1 \leqslant a(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^3 \quad (3) \quad \textit{có nghiệm.}$$

Điều kiện

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 1 \ (*)$$

Với điều kiện đó ta có $\sqrt{x}+\sqrt{x-1} > 0$ nên

$$(3) \Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3(x^3+3x^2-1) \leqslant a(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^3.(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 = a$$

$$\Leftrightarrow a \geqslant (\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3(x^3+3x^2-1) := f(x).$$

(3) có nghiệm $\Leftrightarrow a \geqslant \cosh(*)Min\ f(x)$. Mà với $x \in I(a,b)$ ta có

$$\begin{cases} (\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 \geqslant (1+0)^3 = 1 > 0 \\ x^3+3x^2-1 \geqslant 1^3+3.1^2-1 = 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \geqslant 3 = f(1) \Rightarrow \cosh(*)Min\ f(x) = 3.$$

Vậy $a \geqslant 3$ là các giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự

1. Tìm a để hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ y+\cos x=2 \end{cases}$$
có nghiệm duy nhất.

2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2}+|y|=m \\ \sqrt{y^2+2}+|x|=m \end{cases}.$$

3. Tìm $a,\ b$ để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} xyz+z=a \\ xyz^2+z=b \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}.$$

4. Tìm $a,\ b$ để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}.$$

5. Tìm a để với mọi b, hệ phương trình sau luôn có ít nhất một nghiệm :
$$\begin{cases} (a-1)x^5+y^5=1 \\ e^{bx}+(a+1)by^4=a^2 \end{cases}.$$

6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (|x|+1)a=y+\cos x \\ \sin^4 x+y^2=1 \end{cases}$. 1) Giải hệ khi $a=2$. 2) Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất.

7. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} a^2x+ay+z=a^2 \\ b^2x+by+z=b^2 \\ c^2x+cy+z=c^2 \end{cases}.$$
Trong đó $a,\ b,\ c$ là các số thực đôi một khác nhau.

8. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} a^2x+ay+z+a^3=0 \\ b^2x+by+z+b^3=0 \\ c^2x+cy+z+c^3=0 \end{cases}.$$
Trong đó $a,\ b,\ c$ là các số thực đôi một khác nhau.

9. Tìm các cặp số $(a; b)$ để với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$a(\cos x - 1) + b^2 + 1 - \cos(ax + b^2) = 0.$$

10. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn $|f(x)| \leqslant 1$ với mọi $x \in [0; 1]$. Chứng minh rằng $|f'(0)| \leqslant 8$.

11. Tìm a để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - \sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 2a.$$

12. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{\sin x} = m + \sqrt{\cos x}.$$

13. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x} + \sqrt{4 + x} - m\sqrt{4 - x} \leqslant 3m.$$

4.6 Phương pháp Lượng giác

Lượng giác là một lý thuyết Toán học liên kết giữa Hình học, Đại số và Giải tích. Các tỷ số lượng giác được xây dựng trước hết nhằm phục vụ cho việc giải các bài toán tính toán trong Hình học. Sau đó ta thu được các hàm số lượng giác như là các đối tượng nghiên cứu của Giải tích. Các bài toán ngược dẫn đến việc giải các hệ thức lượng giác và đó là công việc của Đại số. Các hàm số lượng giác là những hàm số tuần hoàn đầu tiên mà học sinh được học. Chúng mô tả một quy luật thường gặp trong tự nhiên, đó là tính lặp lại (tuần hoàn) của một số hiện tượng. Ta có thể giải các bài toán lượng giác bằng phương pháp "Đại số hoá" (bằng cách đặt ẩn phụ). Trong một số trường hợp, quy trình ngược lại: Lượng giác hoá một bài toán đại số, có thể cho ta bài toán mới đơn giản hơn do có thể sử dụng được các biến đổi, dánh giá lượng giác vốn rất phong phú. Phương pháp "Lượng giác hoá" bài toán đại số như vậy được gọi là phương pháp lượng giác. Phương pháp lượng giác có thể được dùng để giải các bài toán Đại số như là: Giải phương trình, bất phương trình, hệ ; Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức ; Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất ; v.v....

4.6.1 Cơ sở lý thuyết

Cơ sở lý thuyết của phương pháp lượng giác dựa trên nhận xét sau:

Bổ đề 11. *Nếu có một đại lượng x biến thiên trong miền $I(a, b)$ thì luôn có thể đặt $x = \varphi(t)$ với $t \in (*_1)$, trong đó, $\varphi(t)$ là một hàm số lượng giác nào đó, còn $(*_1)$ được chọn sao cho ánh xạ $\varphi(t) : (*_1) \to (*)$ là song ánh.*

Các chú ý
1) Một số trường hợp đổi biến lượng giác thường gặp:

1. Nếu $x \in [a, b]$ thì có thể đặt:

$$\begin{aligned}
&\text{Hoặc } x = (\frac{b-a}{2})\cos t + \frac{b+a}{2} && \text{với } 0 \leqslant t \leqslant \pi.\\
&\text{Hoặc } x = (\frac{b-a}{2})\sin t + \frac{b+a}{2} && \text{với } -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.\\
&\text{Hoặc } x = (b-a)\cos^2 t + a && \text{với } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.\\
&\text{Hoặc } x = \tan t && \text{với } \arctan\ a \leqslant t \leqslant \arctan\ b.
\end{aligned}$$

2. Nói chung trong mọi trường hợp đều có thể đặt $x = \tan t$ với $t \in (*_1)$ trong đó $(*_1)$ được chọn thích hợp.

3. Nếu có hai đại lượng x, y biến thiên thoả mãn: $x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$ thì luôn có thể đặt:

$$x = a.\cos t, \quad \text{khi đó} \quad y = a.\sin t \quad \text{với } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

$$\text{Hoặc } \ x = a.\sin t, \quad \text{khi đó} \quad y = a.\cos t \quad \text{với } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

4. Nếu $|x| \geqslant a(> 0)$ thì có thể đặt $x = \dfrac{a}{\sin t}$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$.

2) Các dấu hiệu để nhận biết một bài toán có thể giải được bằng phương pháp lượng giác:

1. Tập biến thiên $I(a, b)$ của một biến số là tập giá trị của một hàm số lượng giác nào đó. $I(a, b)$ có thể được cho trong điều kiện hoặc ta phải tự tìm (tập xác định) hoặc ta phải tự đặt để có thể áp dụng phương pháp lượng giác.

2. Có một trở ngại đại số cần khắc phục, chẳng hạn: bậc cao, căn thức, điều kiện phức tạp, khó xử lý...

3. Trong đề bài (ở giả thiết hoặc kết luận) có một bộ phận tương tự với một công thức lượng giác nào đó. Chẳng hạn:

   - Bộ phận $1 + x^2$ tương tự với công thức: $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.
   - Bộ phận $4x^3 - 3x$ tương tự với công thức: $4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$.
   - Bộ phận $2x^2 - 1$ tương tự với công thức: $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$.
   - Bộ phận $\dfrac{2x}{1-x^2}$ tương tự với công thức: $\tan 2t = \dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$.
   - Bộ phận $\dfrac{2x}{1+x^2}$ tương tự với công thức: $\sin 2t = \dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$.
   - Bộ phận $\dfrac{x+y}{1-xy}$ tương tự với công thức: $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} \cdots$.

3) Cần nhớ thêm một số trường hợp gợi ý sau:

1. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = k\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}.$

2. $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}.$

3. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}\cos\frac{-A+B+C}{2} = 0.$$

4. $\tan A + \tan B + \tan C - \tan A.\tan B.\tan C = 1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}.$$

5. $\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A} + \dfrac{1+\tan B}{1-\tan B} + \dfrac{1+\tan C}{1-\tan C} = \dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}.\dfrac{1+\tan B}{1-\tan B}.\dfrac{1+\tan C}{1-\tan C}$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}.$$

6. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A+B) = 2 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos(A+B) = 0.$

4.6.2 Trình tự lời giải

Lời giải của một bài toán đại số sử dụng phương pháp lượng giác gồm 5 bước: **Bước 1:** Tìm điều kiện đối với biến số (nếu cần), **Bước 2:** Đặt ẩn số phụ, **Bước 3:** Đưa bài toán đại số đã cho về bài toán lượng giác mới, **Bước 4:** Giải bài toán lượng giác thu được, **Bước 5:** Quay về bài toán đại số xuất phát. Khi giải hệ thức đại số $f(x)$ $RRe\, 0$ (1) bằng phương pháp lượng giác, sau khi đặt
$$x = \varphi(t)\ (2); \quad x \in I(a,b) \Leftrightarrow t \in (*_1),$$
ta thu được hệ thức lượng giác:
$$f(\varphi(t))RRe\ 0 \Leftrightarrow F(t)RRe\ 0 \quad (3).$$
Ta có thể:

+) Hoặc giải (3) trong $(*_1)$. Thay t tìm được vào (2) để tìm x là nghiệm của (1).

+) Hoặc biến đổi (3) để thu được hệ thức đối với $\varphi(t)$. Trong hệ thức đó thay $\varphi(t) = x$ ta sẽ thu được nghiệm của (1).

Do có thể chọn $\varphi(t)$ và $(*_1)$ bằng nhiều cách khác nhau nên trong từng bài toán cụ thể, ta nên chọn $\varphi(t)$ và $(*_1)$ theo một cách thích hợp nhất.

4.6.3 Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 4.6.1. *Cho* $x, y, z > 0;\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \quad (*)$. *Chứng minh rằng:*

$$1 + xyz = x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}.$$

Từ điều kiện có: $0 < x; y; z < 1$ nên có thể đặt

$$x = \cos A;\ y = \cos B;\ z = \cos C \text{ với } 0 < A; B; C < \frac{\pi}{2}.\ (*_1)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
(*) &\Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1\\
&\overset{?}{\Rightarrow} \cos\frac{A+B+C}{2}.\cos\frac{-A+B+C}{2}.\cos\frac{A-B+C}{2}.\cos\frac{A+B-C}{2} = 0.\\
\text{Mà}\quad &\cos\frac{-A+B+C}{2}.\cos\frac{A-B+C}{2}.\cos\frac{A+B-C}{2} \overset{?}{\neq} 0\\
&\Rightarrow \cos\frac{A+B+C}{2} = 0\\
&\Rightarrow A+B+C = \pi\\
&\Rightarrow \cos(A+B+C) = -1\\
&\overset{?}{\Rightarrow} 1 + \cos A\cos B\cos C = \cos A\sin B\sin C + \sin A\cos B\sin C + \sin A\sin B\cos C\\
&\Rightarrow 1 + xyz = x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} +\\
&\qquad + x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}.\text{(đpcm)}
\end{aligned}$$

Ví dụ 4.6.2. *Giải phương trình:*

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2-2x^2}. \quad (1)$$

Điều kiện: $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1\ (*)$. Do $I(a,b)$ nên có thể đặt $x = \cos t \quad t \in (0;\pi)\ (*_1)$. Do $\sin t \geqslant 0$ với mọi $t \in (*_1)$ nên:

$$(1) \to \cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2}\sin t.\cos t$$

$$\Leftrightarrow (\sin t + \cos t)(1 - \sin t.\cos t) = \sqrt{2}\sin t.\cos t. \quad (2)$$

Đặt $z = \sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin(t + \dfrac{\pi}{4})$. Với $t \in (*_1)$, ta có: $-1 \leqslant z \leqslant \sqrt{2}\ (*_2)$.

Khi đó: $\sin t.\cos t = \dfrac{z^2-1}{2}$ và:

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow z(1 - \frac{z^2-1}{2}) = \sqrt{2}\frac{z^2-1}{2}\\
&\Leftrightarrow z^3 + \sqrt{2}z^2 - 3z - \sqrt{2} = 0\\
&\Leftrightarrow (z-\sqrt{2})(z^2 + 2\sqrt{2}z + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcll} z &=& \sqrt{2} & \text{(thoả mãn (*))}\\ z &=& 1-\sqrt{2} & \text{(thoả mãn } I(a,b))\\ z &=& -1-\sqrt{2} & \text{(không thoả mãn (*))}\end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Với $z = \sqrt{2}$ ta có: $\begin{cases} \sin t + \cos t = \sqrt{2} \\ \sin t.\cos t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $x = \cos t$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Với $z = 1 - \sqrt{2}$ ta có: $\begin{cases} \sin t + \cos t = 1 - \sqrt{2} \\ \sin t.\cos t = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $x = \cos t$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}.$$

Tóm lại, (1) có các nghiệm:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2};\ x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}$$

$$\text{và} \quad x = \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}.$$

Ví dụ 4.6.3. *Giải bất phương trình:*

$$\frac{1}{1 - x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}} - 1. \quad (1)$$

Điều kiện: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ $(*)$.

Do $I(a, b)$ nên có thể đặt $x = \sin t$; $\quad -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ $(*_1)$. Khi đó:

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t;\ \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{3\sin t}{\cos t} = 3\tan t.$$

(vì $\cos t > 0$ với mọi $t \in (*_1)$.)

$$\begin{aligned}
(1) &\rightarrow 1 + \tan^2 t > 3\tan t - 1 \\
&\Leftrightarrow \tan^2 t - 3\tan t + 2 > 0 \\
&\Leftrightarrow \tan t < 1 \vee \tan t > 2 \\
&\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{4} \vee \ \arctan\ 2 < t < \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy: $(1) \Leftrightarrow \sin(-\dfrac{\pi}{2}) < \sin t = x < \sin(\dfrac{\pi}{4}) \vee\ \sin(\arctan\ 2) < x < \sin(\dfrac{\pi}{2})$

(do hàm số sin đồng biến trong $(*_1)$.)

$$\Leftrightarrow -1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \ \sin(\arctan\ 2) < x < 1.$$

$$\text{Mà: } \sin(\arctan\ 2) = \frac{\tan(\arctan\ 2)}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan\ 2)}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Nên tóm lại, ta được (1) có nghiệm:

$$-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \ \frac{2\sqrt{5}}{5} < x < 1.$$

Ví dụ 4.6.4. *Giải hệ:*

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}. \quad (4)$$

Nếu $x^2 = 1$ thì từ phương trình đầu ta được $\pm 2 = 0$: vô lý. Vậy $x^2 \neq 1$. Tương tự ta cũng có $y^2 \neq 1;\ z^2 \neq 1$. Do đó

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2} \end{cases}. \quad (4.1)$$

Đặt $x = \tan t$ với $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \setminus \{\pm\frac{\pi}{4}\}$ $(*)$. Ta có

$$(4.1) \to \begin{cases} y = \dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t} = \tan 2t \quad (\alpha) \\ z = \dfrac{2\tan 2t}{1-\tan^2 2t} = \tan 4t \\ x = \dfrac{2\tan 4t}{1-\tan^2 4t} = \tan 8t \quad (\beta) \end{cases}. \quad (4.2)$$

Từ (α) và (β) ta được

$$\tan 8t = \tan t \Leftrightarrow 8t = t + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{7}.$$

Do $t \in I(a,b)$ nên ta được $k \in \overline{-3..3}$. Vậy hệ đã cho có 7 nghiệm :

$$\begin{cases} x = \tan\dfrac{k\pi}{7} \\ y = \tan\dfrac{2k\pi}{7} \\ z = \tan\dfrac{4k\pi}{7} \end{cases} \quad \text{với } k \in \overline{-3..3}.$$

Ví dụ 4.6.5. *Phương trình*

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2} \quad (5)$$

có bao nhiêu nghiệm?.

Điều kiện $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$ $(*)$. Với điều kiện dó ta có thể đặt $x = \cos t$ với $0 \leqslant t \leqslant \pi$ $(*_1)$. Phương trình đã cho trở thành

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t| = \sin t \quad (5.1)$$

$$(\text{do } t \in (*_1) \text{ nên } \sin t \geqslant 0 \Rightarrow |\sin t| = \sin t).$$

$$(5.1) \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \frac{\pi}{2} - t + 2k\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + 2n\pi \end{array}\right. \quad (k,\ n \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{4} + n\pi \end{array}\right.$$

Do $t \in (*_1)$ nên ta được $k = 0;\ k = 1;\ n = 0$. vậy ta được 3 nghiệm $\in (*_1)$ của phương trình (5.1) là

$$t = \frac{\pi}{8} := t_1; t = \frac{\pi}{4} := t_2; t = \frac{5\pi}{8} := t_3.$$

Do hàm số $\cos x$ nghịch biến trên $(*_1)$ và $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \pi$ nên phương trình (5) có ba nghiệm phân biệt thoả mãn $I(a,b)$ là

$$x_1 = \cos\frac{5\pi}{8} < x_2 = \cos\frac{\pi}{4} < x_1 = \cos\frac{\pi}{8}.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4.6.6. *Chứng minh rằng phương trình*

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (6)$$

có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$ thoả mãn:

$$x_3^2 = x_2 + 2.$$

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ta có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ngoài ra,

$$f(-2) = -1 < 0;\ f(-1) = 3 > 0;\ f(1) = -1 < 0;\ f(2) = 3 > 0$$

nên theo tính chất hàm số liên tục, phương trình (6) có ít nhất 3 nghiệm phân biệt (trong mỗi khoảng $(-2;-1)$; $(-1;1)$; $(1;2)$ phương trình (6) có ít nhất một nghiệm mà ba khoảng đó đôi một rời nhau). Nhưng (6) là phương trình bậc 3 nên (6) có nhiều nhất

3 nghiệm phân biệt. Vậy (6) có đúng ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$. Ngoài ra, từ trên ta thấy mọi nghiệm của (6) đều $\in (-2;2)$ nên để tìm nghiệm của (6) ta có thể đặt $x = 2\cos t$ với $0 < t < \pi$ $(*)$. Ta thu được phương trình

$$8\cos^3 t - 6\cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = -\frac{1}{2}. \quad (6.1)$$

$$(6.1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 3t = -\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2\pi}{9} + 2k\dfrac{\pi}{3} \\ t = -\dfrac{2\pi}{9} + 2n\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \ (k,\ n \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in I(a,b)$ nên ta được $k = 0;\ k = 1;\ n = 1$. Như vậy, (6.1) có ba nghiệm $\in I(a,b)$ là

$$t = \frac{8\pi}{9} := t_1;\ t = \frac{4\pi}{9} := t_2;\ t = \frac{2\pi}{9} := t_3 \quad (t_1 > t_2 > t_3).$$

Do hàm số $\cos x$ nghịch biến trên $I(a,b)$ nên ta được ba nghiệm phân biệt của phương trình (6) là

$$x_1 = 2\cos\frac{8\pi}{9} < x_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9} < x_3 = 2\cos\frac{2\pi}{9}.$$

Ngoài ra,

$$x_2 + 2 = 2\cos\frac{4\pi}{9} + 2 = 2(1 + \cos\frac{4\pi}{9}) = 2.2.\cos^2\frac{2\pi}{9} = x_3^2.$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Ví dụ 4.6.7. *Tìm m để hệ:* $\begin{cases} |x| + |y| = 1 & (\alpha) \\ x^2 + y^2 = m & (\beta) \end{cases}$ (7) *có nghiệm.*

Từ (α) có $0 \leqslant |x|;\ |y| \leqslant 1$ nên có thể đặt $|x| = \sin^2 t \Rightarrow |y| = \cos^2 t$. Ta thu được

$$\begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 & (\text{luôn đúng với mọi } t \in \mathbb{R}) \\ \sin^4 t + \cos^4 t = m \end{cases} \Leftrightarrow \sin^4 t + \cos^4 t = m \quad (7.1).$$

Mà (7.1) $\Leftrightarrow m = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2t$. (7.2), nên ta có: Phương trình (7) có nghiệm $\Leftrightarrow$(7.2) có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$. Vậy $\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.6.8. *Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:*

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} > m\sqrt{x - x^2} + 1. \quad (8)$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 1 - x \geqslant 0 \\ x - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1.\ (*)$$

Với điều kiện đó ta có thể đặt $x = \cos^2 t$ với $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ $(*_1)$. Ta thu được bất phương trình

$$\cos t + \sin t > m.\sin t.\cos t + 1. \quad (8.1)$$

(Do từ $(*_1)$ có $|\sin t| = \sin t;\ |\cos t| = \cos t;\ |\sin t \cos t| = \sin t \cos t$.)

Lại đặt $z = \cos t + \sin t$. Với $t \in (*_1)$ ta dễ thấy $z \in [1; \sqrt{2}]$. Ngoài ra, $\sin t.\cos t = \dfrac{z^2 - 1}{2}$ và bất phương trình (8.1) trở thành:

$$2z > m(z^2 - 1) + 2 \Leftrightarrow 2(z - 1) > m(z^2 - 1). \quad (8.2)$$

Nếu $z = 1$ thì (8.2) $\Leftrightarrow$ $2.0 > m.0$: vô lý. Vậy (8.2) không có nghiệm $z = 1$. Xét $z \in (1; \sqrt{2}]$ $(*_2)$. Khi đó $z - 1 > 0;\ z + 1 > 0$ nên

$$(8.2) \Leftrightarrow m < \frac{2}{z+1} := f(z).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: (8) có nghiệm } &\Leftrightarrow \text{(8.1) có nghiệm } t \in (*_1) \\ &\Leftrightarrow \text{(8.2) có nghiệm } z \in (*_2) \\ &\Leftrightarrow m < \cosh(*_2) Sup\ f(z). \end{aligned}$$

Dễ thấy $f(z)$ liên tục và nghịch biến trên $(*_2)$ nên $\cosh(*_2) Sup\ f(z) = f(1) = 1$. Vậy $m < 1$ là các giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự

1. Cho $x^2 + y^2 = 1;\ u^2 + v^2 = 1$. Chứng minh rằng
$$|xu + yv| \leqslant 1$$

2. Cho $y = x^4 - x^2 + \dfrac{1}{8}$. 1) Chứng minh rằng $|y| \leqslant \dfrac{1}{8}$ với mọi $x \in [-1; 1]$. 2) Chứng minh rằng phương trình:
$$x^4 - x^2 + \frac{1}{8} = 0$$
có bốn nghiệm phân biệt $x \in [-1; 1]$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của
$$y = \frac{1 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

4. Cho $ab; bc; ca$ cùng $\neq -1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-c}{1+bc}.\frac{c-a}{1+ca}$$

5. Cho $a, b, c > 0$; $a > c$; $b > c$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}$$

6. Cho $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

7. Chứng minh rằng với mọi $x \in (-1; 1)$ và $n \geqslant 2$, ta luôn có:
$$(1+x)^n + (1-x)^n < 2$$

8. Chứng minh rằng với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, ta luôn có:
$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leqslant \frac{1}{2}$$

9. Cho $a, b, c > 0$ và $abc + a + c = b$. Tìm $MaxP$ với:
$$P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$$

10. Cho dãy số (x_n) xác định như sau:
$$x_1 = \frac{1}{2};\;\; x_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{2}}$$
Chứng minh rằng:
$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{k+l} < 1,03$$
với mọi $k, l \in N^*$

11. Tìm a để phương trình : $x + \sqrt{1-x^2} = a$ có nghiệm.

12. Giải và biện luận: $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x$.

13. Tìm nghiệm của hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + t^2 = 9 \\ xt + yz \geqslant 6 \end{cases}$ với $x + z$ lớn nhất.

14. Giải phương trình: $x^2 + (\dfrac{x}{x-1})^2 = 1$.

15. Giải hệ:
$$\begin{cases} 3(x + \dfrac{1}{x}) = 4(y + \dfrac{1}{y}) = 5(z + \dfrac{1}{z}) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

16. Cho $y = |x|(4x^2 + m)$. Tìm m để $|y| \leqslant 1$ với mọi x; $|x| \leqslant 1$.

17. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$1 + \cos A.\cos B.\cos C \geqslant \sqrt{3}\sin A.\sin B.\sin C$$

18. Giải hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

19. Cho dãy $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{(1-\sqrt{2})u_n + 1} \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

Hãy tính u_{2004}

20. Cho $0 < x_1 < y_1$. Hai dãy $\{x_n\}$; $\{y_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n} \end{cases} \quad (n \geqslant 1)$$

Chứng minh rằng $\underset{n\to+\infty}{Lim}\, x_n = \underset{n\to+\infty}{Lim}\, y_n$. Hãy tìm giới hạn đó.

21. Cho dãy $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ thoả mãn:

$$\begin{cases} x_0 = 0;\ n = 50.000 \\ x_{k+1} = x_k + \frac{1}{30.000}\sqrt{1 - x_k^2} \quad (k \in \overline{0; n-1}) \end{cases}$$

Bất đẳng thức $x_n \leqslant 1$ đúng hay sai?.

22. Cho dãy các hàm số $\{T_n(x)\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng: 1) Nếu $|x| \leqslant 1$ thì $|T_n(x)| \leqslant 1$ với mọi $n \in N^*$. 2) Phương trình $T_n(x) = 0$ có đúng n nghiệm phân biệt và các nghiệm đó đều $\in [-1; 1]$. 3) Tìm tất cả các giá trị của x để $|T_n(x)| = 1$.

23. Chứng minh rằng với $a, b \geqslant 0$, ta luôn có:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

24. Chứng minh rằng với $a > c$; $b > c$; $c > 0$ ta luôn có:

$$\sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{(a-c)(b-c)} \leqslant 2\sqrt{ab}$$

25. Rút gọn biểu thức:

$$T = \frac{\sqrt{a - \sqrt{4(a-1)}} + \sqrt{a + \sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2 - 4(a-1)}}$$

26. Chứng minh rằng với $a > |b|$, ta luôn có

$$\sqrt{2}b\frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}} = \sqrt{(a+b)^3} - \sqrt{(a-b)^3}$$

27. Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - x}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - x}}{2}} = \sqrt{4 + \sqrt{x}} + \sqrt{16 - x}$$

28. Cho $xyz \neq 0$; $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

$$(x - \frac{1}{x})(y - \frac{1}{y}) + (y - \frac{1}{y})(z - \frac{1}{z}) + (z - \frac{1}{z})(x - \frac{1}{x}) = 4$$

29. Cho $x; y; z \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.\frac{3y - y^3}{1 - 3y^2}.\frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

30. Cho $xyz \neq 0$; $x + y + z - xyz = 1 - xy - yz - zx$. Chứng minh rằng

$$\frac{1 - x^2}{x} + \frac{1 - y^2}{y} + \frac{1 - z^2}{z} = \frac{1}{4}.\frac{1 - x^2}{x}.\frac{1 - y^2}{y}.\frac{1 - z^2}{z}$$

31. Cho $x_1; x_2; x_3$ là các nghiệm của phương trình

$$x^3 + ax^2 + x + b = 0$$

Chứng minh rằng

$$(x_1 - \frac{1}{x_1})(x_2 - \frac{1}{x_2}) + (x_2 - \frac{1}{x_2})(x_3 - \frac{1}{x_3}) + (x_3 - \frac{1}{x_3})(x_1 - \frac{1}{x_1}) = 4$$

32. Cho $x; y; x \neq 1$ thoả mãn:

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{1+y}{1-y} + \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x}{1-x}.\frac{1+y}{1-y}.\frac{1+z}{1-z}$$

Chứng minh rằng

$a)$ $$x + y + z - xyz = xy + yz + zx - 1$$

$b)$ $$\frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$c)$ $$\frac{(1-xy)^2 - (x+y)^2}{(1+x^2)(1+y)^2} = \frac{2z}{1+z^2}$$

33. Giải biện luận phương trình: $x + \sqrt{a^2 - x^2} < b$ với $a, b > 0$.

34. Giải hệ:

$$\begin{cases} |x+y| + |x-y| \leqslant 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

35. Giải hệ

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

36. Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = m+1 \\ \sqrt{y} + \sqrt{1-x} = m+1 \end{cases}$$

37. Giải hệ

$$\begin{cases} 4xy(2x^2-1) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

38. Giải biện luận phương trình:

$$(a+b)\sqrt{a^2+b^2+x^2} - (a-b)\sqrt{a^2+b^2-x^2} = a^2 + b^2$$

39. Giải phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5}{12}$$

40. Giải phương trình:

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}$$

41. Giải phương trình:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right) = 2 + \sqrt{1-x^2}$$

42. Giải phương trình:
$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$$

43. Giải phương trình:
$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$$

44. Giải biện luận phương trình:
$$\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x-\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x=1\quad(0<a<1)$$

45. Giải phương trình:
$$|2x-\sqrt{1-4x^2}|=\sqrt{2}(8x^2-1)$$

46. Giải bất phương trình:
$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$$

47. Giải bất phương trình:
$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}>\sqrt{3-x}$$

48. Giải bất phương trình:
$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}<2$$

49. Cho $f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x$ 1) Chứng minh rằng $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{4}$ với mọi $x;\ |x|\leqslant 1$. 2) Chứng minh rằng:
Phương trình $x^3-\dfrac{3}{4}x=m$ có nghiệm $x\in[-1;1]\Leftrightarrow|m|\leqslant\dfrac{1}{4}$

50. Chứng minh rằng với mọi $a,b,c\in\mathbb{R}$ ta luôn có
$$\frac{|a-c|}{\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}}\leqslant\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}}$$

51. Phương trình
$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=0$$
có bao nhiêu nghiệm $\in[0;1]$?.

52. Cho $0\leqslant a_k\leqslant 1\quad(k\in\overline{1;n})$. Chứng minh rằng
$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k^2)+\prod_{k=1}^{n}(1-a_k^2)\leqslant 2^n$$

53. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y=\dfrac{x^2}{1+x^4}$.

54. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = |x|\sqrt{1-x^2}$.
55. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$
56. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ với $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
57. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = x^3 - \dfrac{1}{2}x$ với $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

4.7 Sử dụng định lý Lagrange

Định lí 1 (Lagrange)**.** *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \quad (1) \quad \textit{hay là: } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (2)$$

Các công thức (1) và (2) đều được gọi là các công thức Lagrange. Trong định lý Lagrange a có thể $= b$. Khi đó, chỉ cần điều kiện $f(x)$ khả vi tại $x = a$, ta có $c = a$ và công thức (1) vẫn đúng. Các nhận xét sau đây là các hệ quả trực tiếp của định lý Lagrange.

Bổ đề 12. *Nếu:*

$$\begin{cases} 1)\ f'(x) + 1 \neq 0 \textit{ với mọi } x \in I(a,b) \subseteq D_f;\ \textit{(*) liên thông.} \\ 2)\ \varphi(**) \subseteq (*);\ \psi(**) \subseteq (*). \end{cases}$$

thì trong $(**)$ ta có:

$$f(\varphi(x)) - f(\psi(x)) = \psi(x) - \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x)$$

Bổ đề 13. *Nếu:*

$$\begin{cases} 1)\ f(x) \textit{đồng biến với mọi } x \in I(a,b) \subseteq D_f;\ \textit{(*) liên thông.} \\ 2)\ \varphi(**) \subseteq (*);\ \psi(**) \subseteq (*). \\ 3)\ h(x) > 0 \textit{ với mọi } x \in (**). \end{cases}$$

thì trong $(**)$ ta có:

$$f(\varphi(x)) - f(\psi(x)) = [\psi(x) - \varphi(x)].h(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x)$$

Bổ đề 14. *Nếu:*

$$\begin{cases} 1)\ f'(x) > 0;\ g'(x) \geqslant 0 \textit{ với mọi } x \in I(a,b) \subseteq D_f;\ \textit{(*) liên thông.} \\ 2)\ \varphi(**) \subseteq (*);\ \psi(**) \subseteq (*). \\ 3)\ h(x) \geqslant 0 \textit{ với mọi } x \in (**). \end{cases}$$

thì trong $(**)$ ta có:

$$f(\varphi(x)) - f(\psi(x)) = [g(\psi(x)) - g(\varphi(x))].h(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x)$$

Bổ đề 15. *Nếu $f(x)$ đồng biến trong $(*) \subseteq D_f$, $(*)$ liên thông, thì trong $I(a,b)$ ta có:*

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x \ ; \ \ f(f(f(x))) = x \Leftrightarrow f(x) = x$$

Nếu $f'(x) + 1 \neq 0$ với mọi $x \in I(a,b) \subseteq D_f$, $(*)$ liên thông, thì trong $I(a,b)$ ta có:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x \ ; \ \ f(f(f(x))) = x \Leftrightarrow f(x) = x$$

Ví dụ 4.7.1. *Giải phương trình:*

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}. \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}(1+x^3)\Big)^3 = f(f(x).$$

Với $f(x) = \frac{1}{2}(1+x^3)$. Có $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 \geqslant 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x-1 & = & 0 \\ x^2+x-1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcc} x & = & 1 \\ x & = & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x & = & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm

$$x = 1 \ \vee \ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ \vee \ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 4.7.2. *Giải phương trình:*

$$2^x - 2^{2x+1} = (x+1).3^x. \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x$ có $f'(x) = 2^x \ln 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Theo định lý Lagrange, tồn tại c nằm giữa x và $2x+1$ sao cho

$$2^x - 2^{2x+1} = f'(c).[x - (2x+1)] = -(x+1).2^c. \ln 2. \text{ Bởi vậy:}$$

$$(2) \Leftrightarrow -(x+1).2^c. \ln 2 = (x+1).3^x \Leftrightarrow (x+1)[3^x + 2^c. \ln 2] = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

(Do $[3^x + 2^c. \ln 2] > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Ví dụ 4.7.3. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$\pi.ar\cos x - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x - 1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3)$$

luôn có nghiệm $x \in (\frac{1}{\pi}; \frac{\pi}{4})$ $(*)$.

Đặt $f(x) = VT(3)$. Xét hàm số

$$F(x) = (\pi x - 1)(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[\frac{1}{\pi}; \frac{\pi}{4}]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(\frac{1}{\pi}) = 0 =;\ F(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(\frac{\pi}{4}) - F(\frac{1}{\pi})}{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}} = 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (3) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 4.7.4. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$(4x - 3)\log_3 x + \frac{2x^2 - 3x + 1}{x \ln 3} = 0. \quad (4)$$

luôn có nghiệm $x \in (\frac{1}{2}; 1)$ $(*)$.

Đặt $f(x) = VT(4)$. Xét hàm số

$$F(x) = (2x^2 - 3x + 1)\log_3 x.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[\frac{1}{2}; 1]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(\frac{1}{2}) = 0;\ F(1) = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (4) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 4.7.5. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$2(x - 1)\sin 2x - \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (5)$$

luôn có nghiệm $x \in (\frac{\pi}{8}; 1)$ $(*)$.

Đặt $f(x) = VT(5)$. Xét hàm số

$$F(x) = (x-1)(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[\frac{\pi}{8}; 1]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(\frac{\pi}{8}) = 0;\ F(1) = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(\frac{\pi}{8})}{1 - \frac{\pi}{8}} = 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (4) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 4.7.6. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$2(x^2 - x - 2)\cos 2x = (1-2x)\sin 2x. \quad (6)$$

luôn có ít nhất 3 nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1; 2)$ $(*)$.

$$(6) \Leftrightarrow f(x) := 2(x^2 - x - 2)\cos 2x - (1-2x)\sin 2x = 0 \qquad (6.1).$$ Xét hàm số

$$F(x) = 9x^2 - x - 2)\sin 2x.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[-1; 2]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(-1) = 0;\ F(0) = 0;\ F(\frac{\pi}{2}) = 0;\ F(2) = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in (-1; 0)$ $(*_1)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(0) - F(-1)}{0 - (-1)} = 0.$$

Tương tự, tồn tại $x_1 \in (0; \frac{\pi}{2})$ $(*_2)$ sao cho $f(x_1) = 0$;
tồn tại $x_2 \in (\frac{\pi}{2}; 2)$ $(*_3)$ sao cho $f(x_2) = 0$. Mà các khoảng $(*_1)$; $(*_2)$; $(*_3)$ đôi một không giao nhau
nên các nghiệm x_0; x_1; x_2 cũng đôi một khác nhau. Vậy, phương trình

$$f(x) = 0 \ (6.1) \Leftrightarrow (6)$$

luôn có ít nhất ba nghiệm phân biệt $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 4.7.7. *Cho phương trình:*

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (7)$$

Chứng minh rằng nếu

$$m > 0;\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ \ \textit{thoả mãn}\ \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \quad (*_1)$$

thì phương trình (7) *luôn có nghiệm* $x \in (0;1)$ $(*)$.

Đặt $f(x) = ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1} = x^{m-1}(ax^2 + bx + c)$. Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a}{m+2}x^{m+2} + \frac{b}{m+1}x^{m+1} + \frac{c}{m}x^m.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0;1]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(0) = 0;\ F(1) = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0.$$

hay là $x_0^{m-1}(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0 \Rightarrow ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ (vì $x_0 \in (0;1) \Rightarrow x_0^{m-1} \neq 0$).
Vậy, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (7) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 4.7.8. *Cho phương trình:*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a - 1x + a - 0 = 0. \quad (8)$$

Chứng minh rằng nếu

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \quad (*_1)$$

thì phương trình (8) *luôn có nghiệm* $x \in (0;1)$ $(*)$.

Đặt $f(x) = VT(8)$. Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0;1]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(0) = 0;\ F(1) = 0\ \text{(do } (*_1)\text{)}.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (8) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 4.7.9. *Cho phương trình:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a - 1x + a - 0 = 0. \quad (9)$$

Chứng minh rằng nếu tồn tại $m \in N^*$ *sao cho :*

$$\frac{a_n}{n+m} + \frac{a_{n-1}}{n+m-1} + \cdots + \frac{a_1}{m+1} + \frac{a_0}{m} = 0 \quad (*_1)$$

thì phương trình (8) *luôn có nghiệm* $x \in (0;1)$ $(*)$.

Đặt $f(x) = VT(9)$. Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a_n}{n+m}x^{n+m} + \frac{a_{n-1}}{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + \frac{a_1}{m+1}x^{m+1} + \frac{a_0}{m}x^m.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0;1]$ và có

$$F'(x) = x^{m-1}.f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(0) = 0;\ F(1) = 0\ \text{ (do } (*_1)).$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$F'(x_0) = x_0^{m-1}f(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1-0} = 0.$$

$$\Rightarrow f(x_0) = 0 \ \text{ do } x_0 \in (0;1) \Rightarrow x_0^{m-1} \neq 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (9) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 4.7.10. *Cho phương trình:*

$$a.\cos 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = 0. \quad (10)$$

Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ *thì phương trình* (10) *luôn có nghiệm* $x \in (0;2\pi)$.

Đặt $f(x) = VT(10)$. Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a}{3}\sin 3x + \frac{b}{2}\sin 2x + c\sin x - \cos x + 1.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0;2\pi]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(0) = 0;\ F(2\pi) = 0,\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi - 0} = 0.$$

Vậy, với mọi $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ phương trình $f(x) = 0$ (10) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình:

$$2^{2x+3} - 2^{x^2} = (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x+3})(x^2 + 1 + 2^x)$$

2. Giải phương trình:

$$(x^3+1)^5 - (x^2+1)^5 = (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^3+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$$

3. Giải phương trình: $x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}$

4. Giải phương trình: $x = \sqrt{a + \sqrt{a + x}}$

4.8 Sử dụng định lý Rolle

Định lí 2 (*Rolle*). *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; có đạo hàm trên khoảng (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Từ định lý Rolle ta thu được các hệ quả sau:

Bổ đề 16. *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì giữa hai nghiệm (liên tiếp) $\in (a; b)$ của phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.*

Bổ đề 17. *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; có đạo hàm trên khoảng (a, b) và phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm $x \in (a; b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $k - 1$ nghiệm $x \in (a; b)$.*

Ví dụ 4.8.1. *Giải phương trình:*

$$3^x + 2^x = 3x + 2. \quad (1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow f(x) = 3^x + 2^x - 3x - 2 = 0$. Nhận xét rằng $f(0) = 0;\ f(1) = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm thực phân biệt. Giả sử (1) có nhiều hơn hai nghiệm thực phân biệt, khi đó, theo hệ quả của định lý Rolle , phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực phân biệt. Cũng theo lý do trên, phương trình $f''(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Mà $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 3^x(\ln 3)^2 + 2^x(\ln 2)^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đó là điều mâu thuẫn với kết quả trên. Vậy giả sử của ta là sai, tức là (1) có không quá hai nghiệm thực phân biệt, Nói cách khác, (1) chỉ có đúng hai nghiệm là

$$x = 0;\ x = 1.$$

Ví dụ 4.8.2. *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình:*

$$a.\cos 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = 0. \quad (2)$$

luôn có nghiệm $x \in [0; 2\pi]$ $(*)$.

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{a}{3}\sin 3x + \frac{b}{2}\sin 2x + c.\sin x - \cos x.$$

Ta có $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm bậc nhất:

$$f'(x) = a.\cos 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = VT(2)$$

với mọi $x \in I(a, b)$. Ngoài ra,

$$f(0) = f(2\pi) = a + b + c.$$

Vậy, theo định lý Rolle , tồn tại $c \in (0; 2\pi) \subset [0; 2\pi] = (*)$ sao cho $f'(c) = 0$. Nói cách khác, phương trình (2) luôn có ít nhất một nghiệm $(x = c) \in I(a, b)$. Đó chính là điều cần chứng minh.

Ví dụ 4.8.3. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$; khả vi trên $(a; b)$ và $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{R}^*$, phương trình*

$$f(x) + k.f'(x) = 0 \quad (3)$$

luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a; b)$.

Xét $g(x) = e^{\frac{x}{k}}.f(x)$. Ta có $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$; khả vi trên $(a; b)$ và $g(a) = g(b) = 0$. Theo định lý Rolle , phương trình $g'(x) = 0 \quad (3.1)$ luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a; b)$. Mà

$$g'(x) = \frac{1}{k}e^{\frac{x}{k}}.f(x) + e^{\frac{x}{k}}.f'(x) = \frac{1}{k}e^{\frac{x}{k}}[f(x) + kf'(x)].$$

Còn $\frac{1}{k}e^{\frac{x}{k}} \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$(3.1) \Leftrightarrow f(x) + k.f'(x) = 0 \quad (3).$$

Vậy phương trình (3) luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a; b)$. Đó chính là đpcm.

Ví dụ 4.8.4. *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, đa thức:*

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

có không quá ba nghiệm thực phân biệt.

Giả sử $P(x)$ có nhiều hơn 3 nghiệm thực phân biệt. Khi đó, do $P(x)$ xác định, liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$ nên theo hệ quả của định lý Rolle , đa thức $P'(x)$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt. Lập luận tương tự ta được $P'''(x)$ có ít nhất một nghiệm thực. Mà

$$P'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2ax + b \Rightarrow P''(x) = 30x^3 - 24x^2 + 12x + 2a$$
$$\Rightarrow P'''(x) = 60x^2 - 48x + 12 = 12(x^2 + (2x-1)^2) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều mâu thuẫn thu được chứng tỏ giả sử trên là sai, tức là đa thức $P(x)$ đã cho có không quá ba nghiệm thực phân biệt (đpcm),

Ví dụ 4.8.5. *Chứng minh rằng nếu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, đôi một khác nhau thì phương trình:*

$$(x-a)(x-b)(x-c)+(x-b)(x-c)(x-d)+(x-c)(x-d)(x-a)+(x-d)(x-a)(x-b) = 0 \quad (4)$$

luôn có ba nghiệm phân biệt.

Xét

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Ta có $P(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và có bốn nghiệm thực phân biệt. Theo hệ quả của định lý Rolle , phương trình $P'(x) = 0 \quad (4.1)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt. Mặt khác, $P'(x)$ là đa thức bậc ba nên nó có không quá ba nghiệm thực phân biệt. Vậy $P'(x)$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt. Nhưng

$$P'(x) = VT(4) \ \text{ nên } (4.1) \Leftrightarrow (4).$$

Nói cách khác phương trình (4) luôn có đúng ba nghiệm thực phân biệt. Đó chính là điều phải chứng minh.

Ví dụ 4.8.6. *Tìm số nghiệm của phương trình:*

$$3\sin x = x. \quad (5)$$

Đặt $f(x) := 3\sin x - x$. Ta có $f(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$(5) \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (5.1)$$

Do với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ nên mọi nghiệm nếu có của phương trình (5) đều $\in (-3; 3)$ $(*)$. Nhận xét rằng $(*) \subset (-\pi; \pi) := (*_1)$. Ngoài ra, ta có

$$f'(x) = 3\cos x - 1$$

suy ra $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\in (*_1) \Rightarrow f'(x)$ có không quá hai nghiệm phân biệt $\in I(a, b)$. Sử dụng định lý Rolle ta được $f(x)$ có không quá ba nghiệm phân biệt. Mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$; $f(-\dfrac{\pi}{2}).f(-3) < 0$; $f(\dfrac{\pi}{3}).f(3) < 0$ nên $f(x)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt. Tóm lại phương trình (5) có đúng ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4.8.7. *Giải phương trình:*

$$2x - \sin \pi x = 0. \quad (6)$$

Đặt $f(x) := 2x - \sin \pi x$. Ta có $f(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$(6) \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (6.1)$$

Do với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có $-1 \leqslant \sin \pi x \leqslant 1$ nên mọi nghiệm nếu có của phương trình (5) đều $\in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ $(*)$. Nhận xét rằng $(*) \subset (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) := (*_1)$. Ngoài ra, ta có

$$f'(x) = 2 - \pi \sin \pi x$$

suy ra $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\in (*_1) \Rightarrow f'(x)$ có không quá hai nghiệm phân biệt $\in I(a, b)$. Sử dụng định lý Rolle ta được $f(x)$ có không quá ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Mà } f(0) = 0;\ f(-\frac{1}{2}) = 0;\ f(\frac{1}{2}) = 0$$

nên $f(x)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt. Tóm lại phương trình (5) có đúng ba nghiệm phân biệt là

$$x = 0;\ x = -\frac{1}{2};\ x = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4.8.8. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$2^x = x^2 + 1. \quad (7)$$

có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x) := 2^x - x^2 - 1$. Ta có $f(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$(7) \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (7.1)$$

Có $f(0) = f(1) = 0;\ f(2) = -1,\ f(5) = 6 \Rightarrow f(2).f(5) = -6 < 0 \Rightarrow f(x)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt. Giả sử $f(x)$ có $\geqslant 4$ nghiệm phân biệt. Theo hệ quả của định lý Rolle , $f''(x)$ có $\geqslant 2$ nghiệm phân biệt. Mà $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x;\ f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2 \Rightarrow f''(x)$ có đúng một nghiệm. Ta thu được hai kết quả mâu thuẫn nhau. Điều đó chứng tỏ rằng $f(x)$ có không quá ba nghiệm phân biệt. Vậy $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Từ đó thu được đpcm.

Bài tập tương tự

1. Giải và biện luận phương trình: $a^x = (a-1)x + 1 \quad (a > 0; \neq 1)$

2. Giải phương trình:
$$\sum_{k=2}^{n+1} k^x = n + \frac{n(n+1)}{2}x$$

3. Giải bất phương trình: $\dfrac{lg\dfrac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0$

4. Giải phương trình: $(4^x + 2)(2 - x) = 6$

5. Tìm nghiệm $x \geqslant 1$ của phương trình:
$$(x+1)\ \ln\frac{x+1}{x} + x - 1 = x(x^2+1)\ \ln\frac{x^2+1}{x^2}$$

6. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, phương trình:
$$a.\sin 6x + b.\cos 5x + c.\sin 4x + d.\cos 3x + e.\sin x = 0$$
luôn có nghiệm .

7. Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $m \in N^*$ sao cho:
$$\frac{a_n}{m+n} + \frac{a_{n-1}}{m+n-1} + \cdots + \frac{a_1}{m+1} + \frac{a_0}{m} = 0$$
thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$

8. Cho $f(x)$ xác định, liên tục và dương trên $[a; b]$; khả vi trên $(a; b)$.
1) Chứng minh rằng $\exists\ c \in (a; b)$ sao cho:
$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$
2) Chứng minh rằng phương trình:
$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(x)}{f(x)}}$$
luôn có nghiệm $x \in (a; b)$.

9. Chứng minh rằng với mọi $a_k; b_k \in \mathbb{R};\ a_n + b_n \neq 0$, phương trình:
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$$
luôn có ít nhất một nghiệm.

10. Chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{R}$, giữa hai nghiệm của đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ luôn có ít nhất một nghiệm của đa thức $f'(x) + a.f(x)$.

11. Giải phương trình: $(1+\cos x)(2+4^{\cos x}) = 3.4^{\cos x}$

12. Chứng minh rằng nếu n chẵn thì với mọi $p, q \in \mathbb{R}$, phương trình:
$x^n + px + q = 0$ không thể có quá hai nghiệm thực phân biệt.

13. Giải phương trình: $4^{x-1} - 2^{x^2-x} = \log_2 x - 1$

14. Giải phương trình: $x^2 + x + 6\sqrt{x+2} = 18$

15. Giải phương trình: $x^4 + x^3 + 5\sqrt{x+1} = 2 + 5\sqrt{2}$

16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp $n-1$ trên đoạn $[x_0; x_n]$ và có đạo hàm đến cấp n trên khoảng $(x_0; x_n)$. Ngoài ra:
$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \text{ với } x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$
Chứng minh rằng khi đó, phương trình: $f^{(k)}(x) = 0$ có ít nhất $n-k+1$ nghiệm trong khoảng $(x_0; x_n)$; $(k \in \overline{1; n})$.
Đặc biệt, phương trình $f^{(n)}(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(x_0; x_n)$.

17. Biết rằng đa thức: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (với $a_n \neq 0;\ n \geqslant 2$) có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $P^{(k)}(x) = 0$ có đúng $n-k$ nghiệm thực phân biệt.

18. Biết rằng phương trình $t^2 + \alpha x + \beta = 0 \quad (\alpha; \beta \in \mathbb{R})$ có nghiệm thực và đa thức $P(x)$ (bậc $n \geqslant 1;\ \in \mathbb{R}[x]$) có các nghiệm đều thực. Chứng minh rằng phương trình:
$$P(x) + \alpha P'(x) + \beta P''(x) = 0$$
cũng có các nghiệm đều thực.

19. Cho $x_1 < x_2 < x_3$ là các nghiệm của đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$.
Chứng minh rằng nếu tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + ax + b$ có các nghiệm nằm ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ thì phương trình:
$$P''(x) + aP'(x) + bP(x) = 0$$
có nghiệm trong đoạn $[x_1; x_3]$

20. Xét phương trình với hệ số thực:
$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(1+a^2)x^{n-2} + a_1 x^{n-3} + \cdots + a_{n-2} = 0$$
Tìm a để phương trình trên có các nghiệm đều thực.

21. Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ bậc n và có tất cả các nghiệm đều thực. Chứng minh rằng phương trình
$$P'(x) = 0$$
có các nghiệm đều thực ($n-1$ nghiệm đều thực.)

22. Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm thực phân biệt: $x_1; x_2; \cdots; x_n$. Chứng minh rằng:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_n)}{P'(x_n)} = 0$$

4.9 Hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh

Xét hệ :

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases} \qquad (1)$$

Hệ (1) được gọi là hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh (khi hoán vị vòng quanh các ẩn số

$$x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim \cdots x_{n-1} \sim x_n \sim x_1$$

thì hệ không đổi)

Định lí 3. *Nếu $f(x)$ và $g(x)$ cùng tính đơn điệu trên miền $I(a,b)$ liên thông, $(*) \subseteq D := D_f \cap D_g$ còn $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ là nghiệm của hệ (1) với các số $x_j \in I(a,b), j \in \overline{1;n}$ thì:*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Chứng minh. Giả sử $f(x), g(x)$ đồng biến và $x_1 = Min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Ta có:

$$\begin{aligned} x_1 \leqslant x_2 & \\ RRightarrow \quad & f(x_1) \leqslant f(x_2) \\ RRightarrow \quad & g(x_2) \leqslant g(x_3) \\ RRightarrow \quad & x_2 \leqslant x_3 \\ RRightarrow \quad & \cdots \\ RRightarrow \quad & x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_1 \\ RRightarrow \quad & \text{(đpcm)} \end{aligned}$$

Định lí 4. *Nếu $f(x)$ và $g(x)$ khác tính đơn điệu trên miền $I(a,b)$ liên thông, $(*) \subseteq D := D_f \cap D_g$ còn $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ là nghiệm của hệ (1) với các số $x_j \in I(a,b), j \in \overline{1;n}$ thì:*
Khi n lẻ thì:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Khi n chẵn thì:

$$x_1 = x_3 = \cdots = x_{n-1}$$

$$x_2 = x_4 = \cdots = x_n$$

Chứng minh định lý này hoàn toàn tương tự như chứng minh định lý trên.

Ví dụ 4.9.1. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3+3x-3+\ln(x^2-x+1)=y \\ y^3+3y-3+\ln(y^2-y+1)=z \\ z^3+3z-3+\ln(z^2-z+1)=x \end{cases}. \quad (1)$$

Đặt $f(t):=t^3+3t-3+\ln(t^2-t+1)$, có $f(t)$ xác định, liên tục với mọi $t\in\mathbb{R}$ và

$$f'(t)=3t^3+3+\frac{2t-1}{t^2-t+1}=3t^2+\frac{3t^2-t+2}{t^2-t+1}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Vậy $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases} y=f(x) \\ z=f(y) \\ x=f(z) \end{cases}$$

nên theo định lý trên thì $x=y=z=t$ là nghiệm của phương trình

$$f(t)=t\Leftrightarrow g(t):=t^3+2t-3+\ln(t^2-t+1)=0. \quad (1.2)$$

Nhưng

$$g'(t)=3t^2+2+\frac{2t-1}{t^2-t+1}=3t^2+\frac{2t^2+2}{t^2-t+1}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

nên $g(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $g(1)=0$ nên (1.2) có nghiệm duy nhất là $t=1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là

$$x=y=z=1.$$

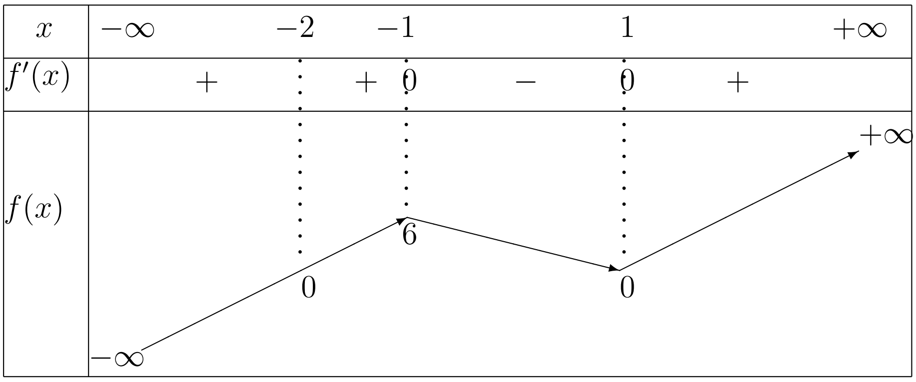
Ví dụ 4.9.2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x_1^3-3x_1=2x_2 \\ x_2^3-3x_2=2x_3 \\ x_3^3-3x_3=2x_4 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{99}^3-3x_{99}=2x_{100} \\ x_{100}^3-3x_{100}=2x_1 \end{cases}. \quad (2)$$

Xét các hàm số $f(t):=t^3-3t+2;\ g(t):=2t$. Có $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t)=3t^2-3.\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1\ \vee\ t=1.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên tập xác định $\mathbb{R}$.



Gọi $x_1 := Min\{x_1;\ x_2; \cdots ; x_n\}$. Ta có: Nếu $x_1 > 1$ thì $x_j > 1,\ \forall j \in \overline{1..100}$. Mà trên $(1; +\infty)$ cả hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$ đều đồng biến nên theo định lý ta được $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} := t$ là nghiệm $t > 1$ của phương trình

$$t^3 - 3t^2 = 2 = 2t \Rightarrow t = 2.$$

Nếu $x_1 < 0$ thì

$$g(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_{100}) < 0 \Rightarrow x_{100} < -2 \Rightarrow g(x_{100}) < -4 < 0 \Rightarrow f(x_{99}) < 0 \Rightarrow x_{99} < -2.$$

Tương tự ta được $x_j < -2$ với mọi $j \in \overline{1..100}$. Mà trên $(-\infty; -2)$ cả hai hàm số cùng đồng biến nên ta có $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} := t$ là nghiệm $t < -2$ của phương trình

$$t^3 - 3t^2 = 2 = 2t \Rightarrow t = -1 - \sqrt{2}.$$

Nếu $x_1 \in [0; 1]$ thì từ bảng biến thiên ta có $x_j \in [0; 1],\ \forall j \in \overline{1..100}$. Mà trên $[0; 1]$ ta có hàm số $f(t)$ nghịch biến, còn hàm số $g(t)$ đồng biến. Ngoài ra 100 là số chẵn nên theo định lý ta được

$$x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} := x \text{ và } x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} := y$$

trong đó x, y là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 2y \\ y^3 - 3y + 2 = 2x \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được các nghiệm $(x; y)$ với $x; y \in [0; 1]$ là

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ y = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Tóm lại ta được các nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} = 2; \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} = -1-\sqrt{2}; \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} = \sqrt{2}-1; \\ \begin{cases} x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 0 \\ x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} = 1 \end{cases}; \\ \begin{cases} x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 1 \\ x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} = 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Bài tập tương tự

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y4^{2x^3+x^2} = 1 \\ z4^{2y^3+y^2} = 1 \\ x4^{2z^3+z^2} = 1 \end{cases}$$

2. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2^3 - 4x_2^2 + ax_2 \\ x_2^2 = x_3^3 - 4x_3^2 + ax_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{n-1}^2 = x_n^3 - 4x_n^2 + ax_n \\ x_n^2 = x_1^3 - 4x_1^2 + ax_1 \end{cases} \quad (\text{với } n \in N;\ n > 1)$$

3. Cho $n \in N;\ n > 1;\ a \neq 0$. Chứng minh rằng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1^2 = x_2 + \dfrac{a^2}{x_2} \\ 2x_2^2 = x_3 + \dfrac{a^2}{x_3} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 2x_{n-1}^2 = x_n + \dfrac{a^2}{x_n} \\ 2x_n^2 = x_1 + \dfrac{a^2}{x_1} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1^2 = ax_2 + 1 \\ x_2^2 = ax_3 + 1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{999}^2 = ax_{1000} + 1 \\ x_{1000}^2 = ax_1 + 1 \end{cases}$$

với a là tham số, $|a| > 1$.

5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (S-x_1)^{2k-1} = x_1 \\ (S-x_2)^{2k-1} = x_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ (S-x_n)^{2k-1} = x_n \end{cases}$$

trong đó $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n;\ k \in N^*$

6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x_3+x_4+x_5)^5 = 3x_1 \\ (x_4+x_5+x_1)^5 = 3x_2 \\ (x_5+x_1+x_2)^5 = 3x_3 \\ (x_1+x_2+x_3)^5 = 3x_4 \\ (x_2+x_3+x_4)^5 = 3x_5 \end{cases}$$

7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

8. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^2 - y = \frac{1}{3} \\ y^3 - z^2 - z = \frac{1}{3} \\ z^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

9. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases}$$

10. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

11. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2z \\ (z-1)^2 = 2t \\ (t-1)^2 = 2x \end{cases}$$

12. Chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{R}$ hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 = y^3 + y + a \\ y^2 = z^3 + z + a \\ z^2 = x^3 + x + a \end{cases} \quad \text{luôn có nghiệm duy nhất.}$$

13. Tìm a để hệ:

$$\begin{cases} x^2 = y + a \\ y^2 = z + a \\ z^2 = x + a \end{cases}$$

chỉ có nghiệm dạng: $x = y = z$.

4.10 Các phương pháp khác

Trong phần này ta sẽ xét một số phương pháp khác, ít gặp hơn

4.10.1 Sử dụng phép biến đổi hệ quả

Xét hai hệ thức (α) và (β) cùng ẩn x. Nếu $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ thì $N(\alpha) \subseteq N(\beta)$. Có thể xảy ra khả năng $N(\beta) \setminus N(\alpha) \neq \emptyset$, tức là có những nghiệm của (β) mà không là nghiệm của (α). Các nghiệm đó được gọi là các nghiệm ngoại lai. Bởi vậy, khi giải một hệ thức bằng phương pháp biến đổi hệ quả, ta bắt buộc phải thử lại nghiệm. Vì vậy, tuyệt đói không được dùng phương pháp biến đổi hệ quả để giải bất phương trình và cũng hết sức hạn chế sử dụng phương pháp này để giải phương trình. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, khi phép biến đổi tương đương là phức tạp, ta cũng có thể giải phương trình bằng phương pháp biến đổi hệ quả. Ngoài ra, ta có thể sử dụng các nhận xét sau:

Bổ đề 18. *Nếu $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ và (β) vô nghiệm thì (α) vô nghiệm.*

Bổ đề 19. *Nếu* $\begin{cases} \text{1) Phương trình } (\alpha) \Rightarrow \text{phương trình } (\beta)\ ; \\ \text{2) Phương trình } (\alpha) \text{ có } k \text{ nghiệm phân biệt ;} \\ \text{3) Phương trình } (\beta) \text{ cũng có } k \text{ nghiệm phân biệt.} \end{cases}$ *thì $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$.*

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 4.10.1. *Giải và biện luận phương trình*

$$2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a - x + \sqrt{x(a+x)}}. \quad (1)$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow 4(a+x)+a-x-4\sqrt{(a+x)(a-x)} = a-x+\sqrt{x(a+x)}\\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{r} \sqrt{a+x}=0 \quad (\alpha)\\ 4\sqrt{a+x}-4\sqrt{a-x}=\sqrt{x} \quad (\beta) \end{array}\right. .\\
(\alpha) &\Rightarrow x=-a := x_1.\\
(\beta) &\Rightarrow 16(a+x)+16(a-x)-32\sqrt{(a+x)(a-x)} = x\\
&\Rightarrow 32\sqrt{a^2-x^2} = 32a-x\\
&\Rightarrow 32^2(a^2-x^2) = (32a-x)^2 = 32^2a^2-64ax+x^2\\
&\Rightarrow 1025x^2 = 64ax\\
&\Rightarrow x=0 := x_2 \ \vee \ x=\frac{64a}{1025} := x_3.
\end{aligned}
$$

Thay các nghiệm vừa tìm được vào phương trình đã cho ta được: +) $x = x_1$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow -2\sqrt{2a} = \sqrt{2a} \Leftrightarrow a = 0$. Khi đó $x_1 = 0$. +) $x = x_2$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{a} - \sqrt{a} = \sqrt{a} \Leftrightarrow a \geqslant 0$. +) $x = x_3$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a+\frac{64a}{1025}} - \sqrt{a-\frac{64a}{1025}} = \sqrt{a-\frac{64a}{1025}+\sqrt{\frac{64a}{1025}(a+\frac{64a}{1025})}}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2\sqrt{1089a}-\sqrt{961a} = \sqrt{961a+\sqrt{64a.1089a}}\\
&\Leftrightarrow 66\sqrt{a}-31\sqrt{a} = \sqrt{1225a} = 35\sqrt{a} \Leftrightarrow a \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Tổng hợp các kết quả trên ta được: +) Với $a < 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm. +) Với $a \geqslant 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = 0;\ x = \frac{64a}{1025}.$$

4.10.2 Sử dụng tính chất của hàm số liên tục

Bổ đề 20. *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x \in (a;b)$.*

Ta thường sử dụng tính chất này để chứng minh một phương trình có nghiệm hoặc có nghiệm trên một khoảng cho trước.

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 4.10.2. *Chứng minh rằng phương trình*

$$\cos x + m\cos 2x = 0 \quad (2)$$

luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Đặt $f(x) := \cos x + m\cos 2x$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định, liên tục trên $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$. Mà

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \forall m \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}).f(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2} < 0,\ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy theo tính chất của hàm số liên tục ta có phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ với mọi $m \in \mathbb{R}$. Nói cách khác, phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m. Đó chính là đpcm.

Ví dụ 4.10.3. *Chứng minh rằng phương trình*

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m \quad (3)$$

luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

$$(3) \Leftrightarrow f(x) := \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - m = 0. \quad (3.1)$$

Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $(\frac{\pi}{2}; \pi)$. Ngoài ra, ta còn có:

$$\cosh x \rightarrow \frac{\pi}{2}^{+} \lim f(x) = -\infty,\ \forall m \Rightarrow \exists\alpha \text{ đủ gần } \frac{\pi}{2},\ \alpha > \frac{\pi}{2}$$

sao cho $f(\alpha) < 0$, $\forall m$. Lại có

$$\cosh x \rightarrow \pi^{-} \lim f(x) = +\infty,\ \forall m \Rightarrow \exists\beta \text{ đủ gần } \pi,\ \pi > \beta > \alpha > \frac{\pi}{2}$$

sao cho $f(\beta) > 0$, $\forall m$. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[\alpha; \beta]$, có $f(\alpha).f(\beta) < 0$ với mọi m nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\in (\alpha; \beta)$ với mọi m. Nói cách khác, với mọi m, phương trình (3) luôn có nghiệm (đpcm).

4.10.3 Đẳng cấp hoá

Ví dụ 4.10.4. *Giải phương trình*

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}. \quad (5)$$

Để ý rằng

$$(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1;\ (x+1)+(x^2-x+1) = x^2+2.$$

Ngoài ra tập điều kiện của phương trình đã cho là $x \geqslant -1$ và

$$x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $u := x+1;\ v := x^2-x+1$ ($\Rightarrow v > 0$) ta được phương trình

$$2(u+v) = 5\sqrt{uv} \Leftrightarrow 2\frac{u}{v} - 5\sqrt{\frac{u}{v}} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{u}{v}} = 2 \\ \sqrt{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 4v \\ 4u = v \end{array}\right. .$$

Vậy

$$\text{Vậy } (5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} 4x^2-5x+3 & = & 0 \qquad \text{(vô nghiệm do } \Delta = -23 < 0) \\ x^2-5x-3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5-\sqrt{37}}{2} \ \vee\ x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}.$$

Hai nghiệm này cùng thoả mãn điều kiện $x \geqslant -1$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{5-\sqrt{37}}{2} \ \vee\ x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}.$$

Ví dụ 4.10.5. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x^3-9y^3 & = (x-y)(2xy+3) \\ x^2-xy+y^2 & = 3 \end{cases}. \quad (6)$$

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-9y^3 & = (x-y)(2xy+x^2-xy+y^2) = x^3-y^3 \quad (\alpha) \\ x^2-xy+y^2 & = 3 \quad (\beta) \end{cases}. \quad (6.1)$$

Mà $(\alpha) \Leftrightarrow x^3 = 8y^3 \Leftrightarrow x = 2y$. Thay vào (β) được

$$4y^2-2y^2+y^2 = 3 \Leftrightarrow 3y^2 = 3 \Leftrightarrow y = 1 \ \vee\ y = -1.$$

Với $y = 1$ có $x = 2$, với $y = -1$ có $x = -2$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Ví dụ 4.10.6. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{3x}(1+\dfrac{1}{x+y}) & = 2 \\ \sqrt{7y}(1-\dfrac{1}{x+y}) & = 4\sqrt{2} \end{cases}. \quad (7)$$

Với điều kiện $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x+y \neq 0 \end{cases}$ và từ hệ ta có $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ $(*)$. Do đó:

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+y} & = \dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1-\dfrac{1}{x+y} & = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y} & = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} - \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ 1 & = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \quad (\alpha) \end{cases}.$$

Nhân từng vế các phương trình của hệ cuối ta được

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x+y} = \Big(\frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\Big).\Big(\frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\Big) \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{x+y} = \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} \\ &\Leftrightarrow 21xy = (x+y)(7y-24x) \\ &\quad \Leftrightarrow \quad (y-6x)(7y+4x) = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow y = 6x \quad (\text{do từ điều kiện } I(a,b) \text{ ta có } 7y+4x > 0) \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (α) ta được

$$\begin{aligned} (\alpha) \Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7.6x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{21x} &= 2+\sqrt{7} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{11+4\sqrt{7}}{21} \Rightarrow y = \frac{22+8\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện $(*)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x = \dfrac{11+4\sqrt{7}}{21} \\ y = \dfrac{22+8\sqrt{7}}{7} \end{cases}.$$

4.10.4 Sử dụng hình học, vectơ, toạ độ

Ta thường sử dụng các nhận xét sau:

Bổ đề 21. *1.* $|\vec{u}+\vec{v}| \leqslant |\vec{u}|+|\vec{v}| \quad (=: \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}\ )$

2. $|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant |\vec{u}|.|\vec{v}| \quad (=: \vec{u} \| \vec{v}\ )$

3. $\vec{u}^2 \geqslant 0 \quad (=: \vec{u}=\vec{0})$

4. Với ba điểm A, B, C bất kỳ, luôn có: $AB+BC \geqslant AC \quad (=: \overrightarrow{A, B, C})$

5. Với ba điểm A, B, C bất kỳ, luôn có: $AB+BC \geqslant AC \quad (=: \overline{A, B, C}$ và C nằm ngoài đoạn AB).

Ví dụ 4.10.7. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+y+z & =3 \quad (\alpha) \\ x^2+y^2+z^2 & =3 \quad (\beta) \\ x^5+y^5+z^5 & =3 \quad (\gamma) \end{cases} . \qquad (8)$$

Đặt các vectơ với các toạ độ như sau:

$$\vec{u}(x; y; z);\ \vec{v}(y; z; x).$$

Ta có:

$$\vec{u}.\vec{v} = xy+yz+zx = \frac{1}{2}\Big((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\Big) = \frac{1}{2}(3^2-3) = 3$$

(sử dụng (α) và (β)).

Mà $\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{y^2+z^2+x^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{u}|.|\vec{v}| = x^2+y^2+z^2 = 3 \quad$ (theo (β)).

Từ đó có $\qquad \vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| \quad (*)$.

$$\begin{aligned} \text{Mà } (*) &\Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} \ \Big(= \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1\Big) \\ &\quad \text{(theo tính chất tỷ lệ thức)} \\ &\Leftrightarrow x=y=z=1 \quad (\text{do } (\alpha)\ ) \end{aligned}$$

Nghiệm $x=y=z=1$ thoả mãn (γ). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$x=y=x=1.$$

Ví dụ 4.10.8. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10} = \sqrt{29}. \quad (9)$$

Đặt các vectơ: $\vec{u}(x-1;2)$; $\vec{v}(-1-x;3)$. Ta có

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x-1)^2+2^2} = \sqrt{x^2-2x+5};\ |\vec{v}| = \sqrt{(-1-x)^2+3^2} = \sqrt{x^2+2x+10}.$$

Ngoài ra,

$$\vec{u}+\vec{v} = (-2;5) \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2+5^2} = \sqrt{29}.$$

Nhưng ta có $$|\vec{u}|+|\vec{v}| \geqslant |\vec{u}+\vec{v}| \Rightarrow VT(9) \geqslant VP(9).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-x-1} = \frac{2}{3} > 0.$$

$$\text{Vậy } (9) \Leftrightarrow \frac{x-1}{-x-1} = \frac{2}{3} > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{1}{5}$.

Ví dụ 4.10.9. *Giải phương trình*

$$\sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1} + \sqrt{x^2+(\sqrt{3}+1)x+1} = 3. \quad (10)$$

Nhân hai vế của phương trình (1) với $\sqrt{2}$ ta được phương trình mới tương đương:

$$\sqrt{4x^2-4x+2} + \sqrt{4x^2-2(\sqrt{3}-1)x+2} + \sqrt{2x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2} = 3\sqrt{2}. \ (10.1)$$

Đặt các vectơ

$$\vec{u}(1;1-2x);\ \vec{v}(1-\sqrt{3}x;x+1);\ \vec{w}(1+\sqrt{3}x;x+1).$$

Ta có

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+(1-2x)^2} = \sqrt{4x^2-4x+2}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(1-\sqrt{3}x)^2+(x+1)^2} = \sqrt{4x^2-2(\sqrt{3}-1)x+2}$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{(1+\sqrt{3}x)^2+(x+1)^2} = \sqrt{2x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2}$$
$$\Rightarrow VT(10.1) = |\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|.$$

Mà $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = (3;3) \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2} = VP(10.1)$. Từ bất đẳng thức

$$|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}| \geqslant |\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|,\ (=: \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w}).$$

Ta được $VT(10.1) \geqslant VP(10.1)$. Vậy phải xảy ra dấu bằng, tức là

$$(10.1) \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-\sqrt{3}x} = \dfrac{1-2x}{x+1} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1-\sqrt{3}x} = \dfrac{1+\sqrt{3}x}{x+1} \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-\sqrt{3}x} = \dfrac{1-2x}{x+1} \geqslant 0 \\ 1-2x = 1+\sqrt{3}x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

4.10.5 Sử dụng hàm số

Bổ đề 22. *Bằng cách xét tính đơn điệu hoặc lập bảng biến thiên của một hàm số cụ thể ta có thể lập được các phương trình có thể giải được bằng cách sử dụng hàm số đó.*

Ví dụ 4.10.10. *Giải phương trình*

$$x^2 - x - 1 = x^2 e^{x+1} - (x+1)e^{x^2}. \quad (11)$$

Ta sẽ giải bài toán tổng quát hơn:
Bài toán: Cho $g(x)$, $h(x)$ là hai hàm số bất kỳ. Khi đó

$$h(x).e^{g(x)} - g(x).e^{h(x)} = h(x) - g(x) \quad (I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x).h(x) = 0 \\ g(x) = h(x) \neq 0 \end{array}\right. .$$

Chứng minh: Xét hàm số $f(t) := \dfrac{e^t - 1}{t}$ xác định, liên tục với mọi $t \neq 0$. Có

$$f'(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2} := \frac{\varphi(t)}{t^2}.$$

Mà $\varphi'(t) = e^t + te^t - e^t = te^t$. $\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Lại có

$$\varphi''(t) = e^t(t+1) \Rightarrow \varphi''(0) = 1 > 0$$

nên hàm số $\varphi(t)$ đạt cực tiểu và cũng là giá trị nhỏ nhất $= 0$ tại $t = 0$. Nói cách khác $\varphi(t) > 0$, $\forall t \neq 0$. Từ đó có $f'(t) > 0$, $\forall t \neq 0$, tức là hàm số $f(t)$ đồng biến trong hai khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$. Xét phương trình (I). Thấy ngay nếu $g(x).h(x) = 0$ thì (I) đúng. Nếu $g(x).h(x) \neq 0$, khi đó

$$(I) \Leftrightarrow \frac{e^{g(x)} - 1}{g(x)} = \frac{e^{h(x)} - 1}{h(x)} \quad (I.1).$$

Từ nhận xét rằng hàm số $f(t)$ đồng biến trong hai khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$ và $\cosh x \to 0 \lim f(t) = 1$ ta được: Khi $t < 0$ ta có $f(t) < 1$, còn khi $t > 0$ thì $f(t) > 1$. Bởi vậy, nếu $(I.1)$ có nghiệm thì $g(x)$ và $h(x)$ phải cùng dấu vì nếu chúng trái dấu thì $(I.1)$ có một vế lớn hơn 1 còn vế kia nhỏ hơn 1. Thế nhưng nếu $g(x)$, $h(x)$ cùng dương thì $(I.1) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$ (vì $f(t)$ đồng biến trong $(0; +\infty)$). Tương tự, nếu $g(x)$, $h(x)$ cùng âm thì ta cũng có $(I.1) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$ (vì $f(t)$ đồng biến trong $(-\infty; 0)$). Tóm lại, trong mọi trường hợp, khi $g(x).h(x) \neq 0$ ta luôn có $(I.1) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$. Từ các lập luận trên ta thu được kết quả của bài toán đã nêu trên.

Trở lại ví dụ đang xét, áp dụng bài toán với $g(x) = x^2$; $h(x) = x + 1$ ta được

$$(11) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2(x+1) = 0 \\ x^2 = x + 1 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x = 0;\ x = 1;\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 4.10.11. *Cho hàm số* $f(x) = x^2 + bx + 1$ *với* $b \in (3; \frac{7}{2})$ $(*)$. *Giải bất phương trình*

$$f(f(x)) > x. \quad (12)$$

Ta sử dụng nhận xét sau: Nếu $f(x)$ là đa thức thì

$$f(f(x)) - x = (f(x) - x).T(x)$$

trong đó $T(x)$ là một đa thức nào đó. Ta có

$$\begin{aligned}
(12) &\Leftrightarrow f^2(x) + bf(x) + 1 - x > 0\\
&\Leftrightarrow f^2(x) - xf(x) + xf(x) - x^2 + bf(x) - bx + x^2 + bx + 1 - x > 0\\
&\Leftrightarrow (f(x) - x)(f(x) + x + b + 1) > 0\\
&\Leftrightarrow [x^2 + (b-1)x + 1][x^2 + (b+1)x + b + 2] > 0. \quad (12.1)
\end{aligned}$$

Xét

$$\Delta_1 = (b-1)^2 - 4 = (b+1)(b-3) \Rightarrow \Delta_1 > 0,\ \forall b \in I(a,b).$$

$$\Delta_2 = (b+1)^2 - 4(b+2) = (b-1)^2 - 8 \Rightarrow \Delta_2 < 0,\ \forall b \in I(a,b).$$

Vậy $[x^2 + (b+1)x + b + 2] > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned}
(12.1) &\Leftrightarrow x^2 + (b-1)x + 1 > 0\\
&\Leftrightarrow x < \frac{1 - b - \sqrt{(b+1)(b-3)}}{2} \ \vee\ x > \frac{1 - b + \sqrt{(b+1)(b-3)}}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là

$$x < \frac{1 - b - \sqrt{(b+1)(b-3)}}{2} \ \vee\ x > \frac{1 - b + \sqrt{(b+1)(b-3)}}{2}.$$

Bài tập tương tự

1. Giải và biện luận bất phương trình

$$\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} > a + b.$$

2. Giải và biện luận phương trình

$$\sqrt{x^2 - 4a + 16} = 2\sqrt{x^2 - 2a + 4} + \sqrt{x}.$$

3. Chứng minh rằng phương trình
$$x^3 - 3x = 1 = 0$$
có ba nghiệm phân biệt.

4. Chứng minh rằng phương trình
$$m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$$
luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

5. Chứng minh rằng nếu $2a + 6b + 19c = 0$ thì phương trình
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$
luôn có nghiệm $x \in [0; \frac{1}{3}]$.

6. Chứng minh rằng nếu
$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \quad (m > 0)$$
thì phương trình
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$
luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$.

7. Chứng minh rằng nếu $2a + 3b + 6c = 0$ thì phương trình
$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$
luôn có nghiệm $x \in (k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi)$.

8. Chứng minh rằng phương trình
$$x^3 + x - 1 = 0$$
luôn có nghiệm duy nhất $x = x_0$ thoả mãn $0 < x_0 < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Tìm $n \in N^*$ sao cho có thể chọn được các số dương $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ để với mọi $k \leqslant n$, phương trình
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^2 = 0$$
luôn có đúng k nghiệm thực.

10. Xác định số nghiệm dương của phương trình
$$12x^5 + 6x^4 - 4x^3 - x - 34 = 0.$$

11. Chứng minh rằng với mọi giá trị của các hệ số có mặt, phương trình
$$x^{2n+1} + ax^{2n} + bx^{2n-1} + \cdots + cx + d = 0$$
luôn có ít nhất một nghiệm thực.

12. Giải phương trình
$$|\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50}| = 5.$$

13. Giải phương trình
$$x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}.$$

14. Giải phương trình
$$\sqrt{x^3 + x^2 + 4x + 4} = x\sqrt{x} + 2.$$

15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 & = 1 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 & = \sqrt{7} \end{cases}.$$

16. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + 12x & = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 2x + 3z - 3 \end{cases}.$$

17. Giải phương trình
$$4\sin^3 x = \sin x + \cos x.$$

18. Giải phương trình
$$(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3.$$

19. Giải phương trình
$$3x^3 - 9x + 3 + \sqrt{3x^4 + 3x^3 + 3} = 0.$$

20. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 & = 1 \\ x^5 + y^5 & = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

21. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 & = 7 \\ xy(x-y) & = 2 \end{cases}.$$

22. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - 3y & = 4\dfrac{y}{x} \\ y - 3x & = 4\dfrac{x}{y} \end{cases}.$$

23. Chứng minh rằng

$$h(x)e^{g(x)} - g(x)e^{h(x)} = h(x) - g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x).g(x) = 0 \\ h(x) = g(x) \neq 0 \end{array}\right..$$

24. Giải phương trình

$$e^{\frac{1}{e}}\Big(|\sin x|^{\sin x} + |\cos x|^{\cos x}\Big) = \Big(|\sin x| + |\cos x|\Big)^2.$$

25. Giải và biện luận theo tham số $a; b$ phương trình sau

$$x = a - b(a - bx^2)^2.$$

26. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x + 3(m - 3x^2)^2 = m.$$

Chương 5

Số đối xứng và một số quy luật của phép nhân

Các quy luật của tự nhiên tồn tại khách quan với chúng ta. Các quy luật này thường thể hiện ra trớc mắt chúng ta ở dạng đơn giản nhất, tự nhiên nhất. Chúng làm cho ta không chú ý và ta thường coi đó như là điều tất yếu.

Bảng nhân 3 của bảng cửu chương chính là những trường hợp như vậy. Bảng nhân 2 có thể chia làm 3 nhóm: nhóm 1 gồm những tích nhỏ hơn 10, nhóm 2 gồm những tích lớn hơn 10 và nhỏ hơn 20, nhóm 3 gồm những tích lớn hơn 20.

Liên quan đến những quy luật này là các tính toán tích gắn với các số đối xứng.

Bài viết này [1]nêu một số nhận xét liên quan đến các quy luật này, nó cho ta kết quả tính toán thông qua quy luật mà không phải trực tiếp đặt bút tính toán thông qua các bảng cửu chương phức tạp.

5.1 Số đối xứng và một số tính chất liên quan

Số đối xứng là số có các chữ số đối xứng nhau, đọc xuôi và đọc ngược đều như nhau. Ví dụ: 12321, 14641, 15099051,. . . .
hai số đối xứng nhau là hai số có các chữ số đối xứng nhau, số này đọc xuôi là số kia và ngược lại. Ví dụ: 123 và 321. Số A và số B đối xứng nhau ta kí hiệu là :$A\|B$. Ta biết rằng, mỗi bảng nhân trong bảng cửu chương đều có tính chất riêng. Ví dụ, bảng 9 có tính chất:

$9 \times 2 = 18\|81 = 9 \times 9,\ 9 \times 3 = 27\|72 = 9 \times 8,\ 9 \times 4 = 36\|63 = 9 \times 7; 9 \times 5 = 45\|54 = 9 \times 6$. Ta thấy 2+9=3+8=4+7=5+6=11.

Nếu a là số nguyên lớn hơn 1 và nhỏ hơn 10 thì $9a\|9(11-a)$. Những con số có tính chất giống số 9 lập thành tập hợp E_1.

Quy luật 1. *Nếu $x_1 \in E_1$ thì với số nguyên a, $(1 < a < 10)$, ta có $ax_1\|(11-a)x_1$.*

[1]Đoàn Nhật Quang, Hà Nội

Những phần tử đầu thuộc E_1 là 9, 99, 909, 999. Số các phần tử thuộc E_1 có $2n-1$ và $2n$ chữ số đúng bằng 2^{n-1}.

Quy luật 2. *Nếu $x_2 \in E_2$ thì với số nguyên dương a, $(a < 10)$ ta có $ax_2 \| (10-a)x_2$.*

Những phần tử đầu thuộc E_2 là 1089, 10989, 109989. Tập hợp các số bập bênh chính là tập hợp E_2. Số các phần tử thuộc E_2 có $2n$ hoặc $2n+1$ chữ số đúng bằng số Fibonaxi thứ $n-1$. Ngoài tập E_1, E_2 ta còn có tập hợp E_3 và E_4. Những phần tử $x_3 \in E_3$ có dạng $\underbrace{1109\ldots9889}_{K \text{ số } 9}$, $k \geq 0$. Mỗi phần tử $x_3 \in E_3$ có một số liên kết x_3' có dạng $\underbrace{9\ldots90}_{K+3 \text{ số } 9}$.

Quy luật 3. *Nếu $x_3 \in E_3$ thì với số nguyên dương a, $(a < 10)$ ta có $ax_3 - x_3' \| (10-a)x_3$.*

Ví dụ : $8 \times 1109889 - 99990 \| 2 \times 1109889$,
$7 \times 1109889 - 99990 \| 3 \times 1109889$,
$3 \times 1109889 - 99990 \| 7 \times 1109889$,
$5 \times 1109889 - 99990 \| 5 \times 1109889$.

Những phần tử $x_4 \in E_4$ có dạng $\underbrace{1\ldots1}_{k_1+2 \text{ số } 1}\ 0\underbrace{9\ldots9}_{k_2 \text{ số } 9}\ \underbrace{8\ldots8}_{k_1+2 \text{ số } 8}\ 9$, $\quad (k_1 \geq 1, k_2 \geq 0)$. Mỗi $x_4 \in E_4$ có một số liên kết x_4' có dạng $\underbrace{1\ldots1}_{k_1 \text{ số } 1}0\ \underbrace{9\ldots9}_{k_2+2 \text{ số } 9}\ \underbrace{8\ldots8}_{k_1 \text{ số } 8}90$, $\quad (k_1 \geq 1, k_2 \geq 0)$.

Quy luật 4. *Nếu $x_4 \in E_4$ thì với số nguyên dương $a, a < 10$ ta có $ax_4 - x_4' \| (10-a)x_4$.*

Ví dụ $11108889 \times 9 - 1099890 \| 11108889$.
$11110988889 \times 8 - 1109998890 \| 11110988889 \times 2$.
$11110988889 \times 2 - 1109998890 \| 11110988889 \times 8$.

Ta thu được kết quả của phép nhân mà không cần làm các phép nhân.

Ta thấy số 1089 có tổng số đầu và số cuối bằng 10, tổng của hai số giữa bằng 8. Khi nhân số 1089 với số nguyên dương $a < 10$ thì số 1 đổi thành số a, số 0 đổi thành $a-1$, số 8 đổi thành $9-a$ và số 9 đổi thành $10-a$. Như vậy, sau khi nhân ta được một số mà tổng số đầu và cuối bằng 10, và tổng hai số giữa bằng 8.

Ví dụ $1089 \times 9 = 9801, 1089 \times 8 = 8712, 1089 \times 7 = 7623$.

Khi nhân số 10989 với số nguyên dương $a < 10$ thì số 1 đổi thành a, số 0 đổi thành $a-1$, số 9 ở giữa vẫn giữ nguyên, số 8 thành $9-a$ và số 9 cuối thành $10-a$. Nói chung các số có dạng $1\ldots109\ldots98\ldots89$ khi nhân với số nguyên dương $a < 10$ thì những số 1 đổi thành số a, số 0 đổi thành $a-1$, những số 9 ở giữa vẫn giữ nguyên, những số 8 đổi thành $9-a$ và số 9 cuối đổi thành $10-a$, và phép nhân được tính dễ dàng.

Ví dụ $1109889 \times 8 = 88791112, 11110998889 \times 7 = 77776992223$.

Vật ta thu được kết quả phép tính mà không cần làm các tính toán.

Giả sử cần tính $S = 8 \times 1109889 - 99990$. ta có S đối xứng với 1109889×2, mà $1109889 \times 2 = 2219778$. Vậy $s = 8779122$. Tương tự như vậy, ta tính $P = 7 \times$

$1110998889 - 109999890$. Do P đối xứng với 3×1110998889 mà $3 \times 1110998889 = 3332996667$. Vậy $P = 7666992333$.

Ngoài các tính chất chung của các phần tử trong cùng một tập hợp, mỗi phần tử lại có tính chất riêng khi nhân phần tử đó với các số nguyên dương có hai hoặc nhiều chữ số.

Ví dụ: Với các số nguyên dương $a, b, c, d < 10$ ta có

$$9(10a + b)\|9[10(11 - b) + 11 - a], \quad \text{khi } a \geq b, a > 1.$$

$$9(10a + b)\|9[10(10 - b) + 10 - a], \quad \text{khi } a < b.$$

$$99(10a + b)\|99[10(10 - b) + 10 - a].$$

$$999(100a + 10b + c)\|999[100(10 - c) + 10(9 - b) + 10 - a.$$

Nếu $(a + b) < 9, a \geq b$ thì

$$1089(10a + b)\|1089[10(9 - b) + 10 - a] + 990.$$

$$1089(10a + b) + 990\|1089[10(9 - b) + 10 - a].$$

Nếu $(a + b) < 9, a < b$ thì $1089(10a + b)\|1089[10(9 - b) + 10 - a]$.
Nếu $(a + b) \leq 9$ thì $10989(10a + b)\|10989[10(9 - b) + 10 - a]$, $a < 9$.
Nếu $(a + b) \geq 10$ thì $10989(10a + b)\|10989[10(10 - b) + 9 - a$.
Nếu $a \geq b, a + b \leq 9$ thì $110889(10a + b)\|110889[10(9 - b) + 10 - a] - 90000$.
Nếu $a \geq b, a + b < 9$ thì $110889(10a + b) - 90\|110889[10(9 - b) + 10 - a]$.
Nếu $a \geq b, a + b = 9$ thì $110889(10a + b) + 900\|110889[10(9 - b) + 10 - a]$.

Ta xét trong các hệ đếm cơ số khác.

Trong hệ đếm cơ số 2: $110\underbrace{1\ldots1}_{k \text{ số } 1}001 - \underbrace{1\ldots1}_{k+3 \text{ số } 1}0\|110\underbrace{1\ldots1}_{k \text{ số } 1}001,\ k \geq 0$.

$$\underbrace{1\ldots1}_{k_1+2 \text{ số } 1}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2 \text{ số } 1}\underbrace{0\ldots0}_{k_1+2 \text{ số } 0}1 - \underbrace{1\ldots1}_{k_1 \text{ số } 1}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2+2 \text{ số } 1}\underbrace{0\ldots0}_{k_1 \text{ số } 0}10\|\underbrace{1\ldots1}_{k_1+2 \text{ số } 1}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2 \text{ số } 1}\underbrace{0\ldots0}_{k_1+2 \text{ số } 0}1,\ k_1, k_2 \geq 0.$$

Trong hệ đếm cơ số 6: Trong hệ đếm này, số 6 viết là 10, số 7 viết là 11.

Quy luật 5. *Nếu $x_1 \in E_1$ thì với số nguyên $1 < a < 10$ ta có $ax_1\|(11 - a)x_1$.*

Ví dụ: $3 \times 55\|4 \times 55,\ 2 \times 5\|5 \times 5$.

Quy luật 6. *Nếu $x_2 \in E_2$ thì với số nguyên dương $a < 10$ ta có $ax_2\|(10 - a)x_2$.*

Ví dụ: $3 \times 1045\|3 \times 1045,\ 2 \times 10545\|4 \times 10545$. Những phần tử $x_3 \in E_3$ có dạng $110\underbrace{5\ldots5}_{k \text{ số } 5}45$, có một số liên kết x_3' có dạng $\underbrace{5\ldots5}_{k+3 \text{ số } 5}0$.

Quy luật 7. *Nếu $x_3 \in E_3$ thì với số nguyên dương $a < 10$ ta có $ax_3 - x_3'\|(10 - a)x_3$.*

Ví dụ: $110445 \times 2 \| 110445 \times 4 - 5550$, $1105445 \times 2 - 55550 \| 1105445 \times 4$.

Những phần tử $x_4 \in E_4$ có dạng $\underbrace{1\dots1}_{k_1+2 \text{ số } 1}0\underbrace{5\dots5}_{k_2 \text{ số } 5}\underbrace{4\dots4}_{k_1+2 \text{ số } 4}5$, $k_1, k_2 \geq 0$. Mỗi $x_4 \in E_4$ có một số liên kết x'_4 có dạng $\underbrace{1\dots1}_{k_1 \text{ số } 1}0\underbrace{5\dots5}_{k_2+2 \text{ số } 5}\underbrace{4\dots4}_{k_1 \text{ số } 4}50$.

Quy luật 8. *Nếu $x_4 \in E_4$ thì với số nguyên dương $a < 10$ ta có $ax_4 - x'_4 \| (10-a)x_4$.*

Ví dụ: $111054445 - 10555450 \| 111054445 \times 5$.
$1111044445 \times 2 - 110554450 \| 1111044445 \times 4$.
$11111055444445 \times 3 - 110554450 \| 11111055444445 \times 3$.
$33333255222223 - 1110555544450 = 32222255233333$.

Vậy, trong các hệ đếm cơ số khác, ta cũng có các kết quả tương tự.

5.2 Nhận xét về một số quy luật trong bản cửu chương

Các quy luật của tự nhiên tồn tại khách quan với chúng ta. Các quy luật này thường thể hiện ra trớc mắt chúng ta ở dạng đơn giản nhất, tự nhiên nhất. Chúng làm cho ta không chú ý và coi đó là điều tất yếu.
Bảng nhân 3 của bảng cửu chương chính là những trường hợp như vậy. Bảng nhân 3 có thể chia làm 3 nhóm: nhóm 1 gồm những tích nhỏ thua 10, nhóm 2 gồm những tích lớn hơn 10 và nhỏ thua 20, nhóm 3 gồm những tích lớn hơn 20.
Ta hãy khoan nói tới nhóm 1, ta xét ngay nhóm 2 và nhóm 3. Ta có
$3 \times 4 = 12$; 12 đối xứng với $21 = 3 \times 7$ $\quad 3 \times 7$ đối xứng với 3×4.
$3 \times 5 = 15$; 15 đối xứng với $51 = 3 \times 17$ $\quad 3 \times 8$ đối xứng với 3×14.
$3 \times 6 = 18$; 18 đối xứng với $81 = 3 \times 27$ $\quad 3 \times 9$ đối xứng với 3×24.
3×4 đối xứng với 3×7 là trường hợp riêng của
$\underbrace{3\dots3}_{K_1 \text{ số } 3} \times \underbrace{4\dots4}_{K_2 \text{ số } 4}$ đối xứng với $\underbrace{3\dots3}_{K_1 \text{ số } 3} \times \underbrace{7\dots7}_{K_2 \text{ số } 7}$ hoặc $K_1 < 4$ hoặc $K_2 < 4$.
3×5 đối xứng với 3×17 là trường hợp riêng của
$\underbrace{3\dots3}_{K \text{ số } 3} \times 5$ đối xứng với $\underbrace{3\dots3}_{K \text{ số } 3} \times 17$.
3×6 đối xứng với 3×27 là trường hợp riêng của
$\underbrace{3\dots3}_{K \text{ số } 3} \times 6$ đối xứng với $\underbrace{3\dots3}_{K \text{ số } 3} \times 27$.
3×8 đối xứng với 3×14 là trường hợp riêng của
$\underbrace{3\dots3}_{K \text{ số } 3} \times 8$ đối xứng với $\underbrace{3\dots3}_{K \text{ số } 3} \times 14$.
3×9 đối xứng với 3×24 là trường hợp riêng của
$\underbrace{3\dots3}_{K \text{ số } 3} \times 9$ đối xứng với $\underbrace{3\dots3}_{K \text{ số } 3} \times 24$.
Bây giờ ta quay lại nhóm 1, phải chăng vì nhóm 1 đơn giản quá không có gì đáng nói?

Không phải vậy, mà chính cái đơn giản của nó đang ẩn dấu một quy luật khá lý thú. Ta có $3 \times 1 = 3$, ta được tích là một số 3 đơn lẻ không có số hàng chục, hàng trăm đứng trước nên ta có thể viết $3 \times 1 = 03$ (không có dấu phẩy ở giữa số 0 và 3.)
Nhưng $33 \times 31 = 1023$ và $\underbrace{3\ldots3}_{K+1 \text{ số } 3} \times \underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}1 = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K+2} + \underbrace{2\ldots2}_{K \text{ số } 2}3.$

Vậy $3 \times 1 = 03$ là trường hợp riêng của
$\underbrace{3\ldots3}_{K+1 \text{ số } 3} \times \underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}1 = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K+2} + \underbrace{2\ldots2}_{K \text{ số } 2}3 = \underbrace{1\ldots1}_{K \text{ số } 1}0\underbrace{2\ldots2}_{K \text{ số } 2}3.$

Tương tự ta có
$3 \times 2 = 06$ là trường hợp riêng của

$$\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}\underbrace{(3\ldots3)}_{K \text{ số } 3}2 = \underbrace{1\ldots1}_{K \text{ số } 1}0\underbrace{5\ldots5}_{K \text{ số } 5}6.$$

$3 \times 3 = 09$ là trường hợp riêng của $\underbrace{(3\ldots3)^2}_{K+1 \text{ số } 3} = \underbrace{1\ldots1}_{K \text{ số } 1}0\underbrace{8\ldots8}_{K \text{ số } 8}9.$

$3 \times 4 = 12$ là trường hợp riêng của $\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}\underbrace{(3\ldots3)}_{K \text{ số } 3}4) = \underbrace{1\ldots1}_{K+1 \text{ số } 1}\underbrace{2\ldots2}_{K+1 \text{ số } 2}.$

$3 \times 5 = 15$ là trường hợp riêng của $\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}\underbrace{(3\ldots3)}_{K \text{ số } 3}5) = \underbrace{1\ldots1}_{K+1 \text{ số } 1}\underbrace{5\ldots5}_{K+1 \text{ số } 5}.$

$3 \times 6 = 18$ là trường hợp riêng của $\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}\underbrace{(3\ldots3)}_{K \text{ số } 3}6) = \underbrace{1\ldots1}_{K+1 \text{ số } 1}\underbrace{8\ldots8}_{K+1 \text{ số } 8}.$

$3 \times 7 = 21$ là trường hợp riêng của $\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}\underbrace{(3\ldots3)}_{K \text{ số } 3}7) = \underbrace{1\ldots1}_{K \text{ số } 1}\underbrace{2\ldots2}_{K+1 \text{ số } 2}1.$

$3 \times 8 = 24$ là trường hợp riêng của $\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}\underbrace{(3\ldots3)}_{K \text{ số } 3}8) = \underbrace{1\ldots1}_{K \text{ số } 1}2\underbrace{5\ldots5}_{K \text{ số } 5}4.$

$3 \times 9 = 27$ là trường hợp riêng của $\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}\underbrace{(3\ldots3)}_{K \text{ số } 3}9) = \underbrace{1\ldots1}_{K \text{ số } 1}2\underbrace{8\ldots8}_{K \text{ số } 8}7.$

Các trường hợp lại là trường hợp riêng của các quy luật sau:

Quy luật 9. *Nếu ta nhân số 3 với một số x có một chữ số ta được tích số bằng $10a + b$ thì*

- *Khi $x = 3t + 1$ ta được*
  $\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}(\underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}0 + x) = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K+2} + 10^{K+1}a + \underbrace{2\ldots2}_{K \text{ số } 2}0 + b.$

- *Khi $x = 3t + 2$ ta được*
  $\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}(\underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}0 + x) = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K+2} + 10^{K+1}a + \underbrace{5\ldots5}_{K \text{ số } 5}0 + b.$

- *Khi $x = 3t$ ta được*
  $\underbrace{(3\ldots3)}_{K+1 \text{ số } 3}(\underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}0 + x) = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K+2} + 10^{K+1}a + \underbrace{8\ldots8}_{K \text{ số } 8}0 + b.$

Quy luật 1 lại là trường hợp riêng của quy luật sau:

Quy luật 10. *Nếu ta nhân số 3 với một số x có một chữ số ta được tích số bằng $10a+b$ thì*
- Khi $x = 3t+1$ ta được
$$\underbrace{(3\ldots3)}_{K_1+K+1 \text{ số } 3}(\underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}0+x) = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K_1+K+2} + 10^{K_1+K+1}a + \underbrace{3\ldots3}_{K_1 \text{ số } 3}\underbrace{2\ldots2}_{K \text{ số } 2}0+b.$$
- Khi $x = 3t+2$ ta được
$$\underbrace{(3\ldots3)}_{K_1+K+1 \text{ số } 3}(\underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}0+x) = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K_1+K+2} + 10^{K_1+K+1}a + \underbrace{6\ldots6}_{K_1 \text{ số } 6}\underbrace{5\ldots5}_{K \text{ số } 5}0+b.$$
- Khi $x = 3t$ ta được
$$\underbrace{(3\ldots3)}_{K_1+K+1 \text{ số } 3}(\underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}0+x) = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K_1+K+2} + 10^{K_1+K+1}a + \underbrace{9\ldots9}_{K_1 \text{ số } 9}\underbrace{8\ldots8}_{K \text{ số } 8}0+b.$$

Quy luật 11. *Nếu ta nhân số 33 với một số x có hai chữ số bằng $10x+y$, ta được tích số bằng $10^3a+10^2b+10c+d$ thì*

- *Khi $x+y = 3t+1$ ta được*
$$\underbrace{(3\ldots3)}_{K_1+K+2 \text{ số } 3}(\underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}00+10x+y) = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K_1+K+4} + 10^{K_1+K+3}a + 10^{K_1+K+2}b + \underbrace{3\ldots3}_{K_1 \text{ số } 3}\underbrace{2\ldots2}_{K \text{ số } 2}00+10c+d.$$
- *Khi $x+y = 3t+2$ ta được*
$$\underbrace{(3\ldots3)}_{K_1+K+2 \text{ số } 3}(\underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}00+10x+y) = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K_1+K+4} + 10^{K_1+K+3}a + 10^{K_1+K+2}b + \underbrace{6\ldots6}_{K_1 \text{ số } 6}\underbrace{5\ldots5}_{K \text{ số } 5}00+10c+d.$$
- *Khi $x = 3t$ ta được*
$$\underbrace{(3\ldots3)}_{K_1+K+2 \text{ số } 3}(\underbrace{3\ldots3}_{K \text{ số } 3}00+10x+y) = \underbrace{(1\ldots1)}_{K \text{ số } 1}10^{K_1+K+4} + 10^{K_1+K+3}a + 10^{K_1+K+2}b + \underbrace{9\ldots9}_{K_1 \text{ số } 9}\underbrace{8\ldots8}_{K \text{ số } 8}00+10c+d.$$

Tổng quát:

Quy luật 12. *Nếu ta nhân số có n chữ số đều là 3 với một số có n chữ số $(10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2+\cdots+10x_{n-1}+x_n$, ta được tích số bằng $10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2+\cdots+10a_{2n-1}+a_{n-2}$ thì*

- *Khi* $x_1 + \cdots + x_n = 3t + 1$ *ta được*

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(3\ldots3)}_{K_1+K+n\ số\ 3}\ (\underbrace{3\ldots3}_{K\ số\ 3}\underbrace{0\ldots0}_{n\ số\ 0}+10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 + \cdots + 10x_{n-1} + x_n)\\
&\qquad = \underbrace{(1\ldots1)}_{K\ số\ 1}10^{K_1+K+2n} + 10^{K_1+K+2n-1}a_1 + \cdots + 10^{K_1+K+n}a_n\\
&\qquad + \underbrace{3\ldots3}_{K_1\ số\ 3}\underbrace{2\ldots2}_{K\ số\ 2}\underbrace{0\ldots0}_{n\ số\ 0}+10^{n-1}a_{n+1} + 10^{n-2}a_{n+2} + \cdots + 10a_{2n-1} + a_{2n}.
\end{aligned}$$

- *Khi* $x_1 + \cdots + x_n = 3t + 2$ *ta được*

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(3\ldots3)}_{K_1+K+n\ số\ 3}\ (\underbrace{3\ldots3}_{K\ số\ 3}\underbrace{0\ldots0}_{n\ số\ 0}+10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 + \cdots + 10x_{n-1} + x_n)\\
&\qquad = \underbrace{(1\ldots1)}_{K\ số\ 1}10^{K_1+K+2n} + 10^{K_1+K+2n-1}a_1 + \cdots + 10^{K_1+K+n}a_n\\
&\qquad + \underbrace{6\ldots6}_{K_1\ số\ 6}\underbrace{5\ldots5}_{K\ số\ 5}\underbrace{0\ldots0}_{n\ số\ 0}+10^{n-1}a_{n+1} + 10^{n-2}a_{n+2} + \cdots + 10a_{2n-1} + a_{2n}.
\end{aligned}$$

- *Khi* $x_1 + \cdots + x_n = 3t$ *ta được*

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(3\ldots3)}_{K_1+K+n\ số\ 3}\ (\underbrace{3\ldots3}_{K\ số\ 3}\underbrace{0\ldots0}_{n\ số\ 0}+10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 + \cdots + 10x_{n-1} + x_n)\\
&\qquad = \underbrace{(1\ldots1)}_{K\ số\ 1}10^{K_1+K+2n} + 10^{K_1+K+2n-1}a_1 + \cdots + 10^{K_1+K+n}a_n\\
&\qquad + \underbrace{9\ldots9}_{K_1\ số\ 9}\underbrace{8\ldots8}_{K\ số\ 8}\underbrace{0\ldots0}_{n\ số\ 0}+10^{n-1}a_{n+1} + 10^{n-2}a_{n+2} + \cdots + 10a_{2n-1} + a_{2n}.
\end{aligned}$$

Ví dụ
$3 \times 9 = 27 \to 3333 \times 39 = 129987$.
$3 \times 8 = 24 \to 33333 \times 338 = 11266554$.
$3 \times 7 = 21 \to 3333333 \times 3337 = 111223332221$.
$33 \times 79 = 2607 \to 33333333 \times 333379 = 11112633222207$.
$33 \times 83 = 2739 \to 333333333 \times 333383 = 111127666555539$.
$33 \times 87 = 2871 \to 333333 \times 33387 = 11128988871$.
$333 \times 1937 = 6456021 \to 3333333333 \times 331937 = 1106456666556021$.
$333 \times 1945 = 6482685 \to 333333333 \times 331945 = 110648333222685$.
$333 \times 1968 = 6559344 \to 3333333333 \times 331968 = 110655999889344$.

Chương 6

Một số phương pháp giải bài toán chia hết

Khi có số nguyên a và số tự nhiên b một trong những câu hỏi hiển nhiên được đặt ra là: Liệu a có chia hết cho b không? Có nhiều phương pháp giải bài toán chia hết. Song việc vận dụng phương pháp lại phải phụ thuộc vào dạng bài toán. Dưới đây xin trình bầy một trong các phương pháp đó: phương pháp dùng phép chia có dư, phương pháp đồng dư, phương pháp dùng tính tuần hoàn khi nâng lên lũy thừa, phương pháp quy nạp và sử dụng tiêu chuẩn chia hết.

6.1 Các số nguyên và các phép tính số nguyên

Tập hợp các số nguyên gồm các số tự nhiên $1, 2, 3$, số không 0 và các số nguyên âm $-1, -2, -3$ Trong tập hợp đó luôn luôn thực hiện được phép cộng và phép trừ. Nói cách khác, nếu m và n là các số nguyên, thì tổng $m + n$ của chúng cũng là số nguyên. Hơn nữa, với hai số nguyên m, n tuỳ ý tồn tại duy nhất một số x thoả mãn phương trình

$$n + x = m$$

Số đó được gọi là hiệu của các số m và n đồng thời ký hiệu bằng $m - n$. Hiệu hai số nguyên bất kỳ cũng là số nguyên.

Trong tập hợp các số nguyên cũng luôn luôn thực hiện được phép nhân, nghĩa là, nếu m và n là các số nguyên, thì tích $m.n$ của chúng cũng là số nguyên. Tuy vậy, phép chia (là phép tính ngược của phép nhân) không phải khi nào cũng thực hiện được trong tập hợp các số nguyên. Kết quả của phép chia số a cho số $b \neq 0$ là số x được ký hiệu bằng $a : b$ hoặc $\frac{a}{b}$ thoả mãn phương trình

$$bx = a$$

Số x đó tồn tại và duy nhất. Song kết quả của phép chia một số nguyên cho một số nguyên khác không phải khi nào cũng là một số nguyên. Thí dụ, các thương

$3 : 2, 6 : 5, (-50) : 7, (-60) : (-21)$ không phải là các số nguyên. Điều đó có nghĩa là phép chia không phải luôn luôn thực hiện được trong tập hợp các số nguyên. Thương của phép chia số nguyên a cho số nguyên $b \neq 0$ có thể không thuộc tập hợp các số nguyên; còn chính trong tập hợp các số nguyên không tìm được một số nào để ta có thể gọi là thương của phép chia a cho b.

Tất nhiên, ta cũng gặp các trường hợp: Thương của phép chia một số nguyên cho số nguyên khác cũng lại là một số nguyên, chẳng hạn

$$8 : (-2) = -4, 48 : 12 = 4, (-6) : 6 = -1$$

Định nghĩa. Nếu a và b $(b \neq 0)$ là các số nguyên, mà thương $a : b$ cũng là số nguyên, thì ta nói rằng số a chia hết cho số b và viết $a \vdots b$.

Cũng có thể nói cách khác: Số nguyên a chia hết cho số nguyên $b \neq 0$, nếu tồn tại một số nguyên k, sao cho $a = kb$. Định nghĩa về chia hết trên đây sẽ thường dùng sau này.

Vì chỉ nói đến các số nguyên, nên để ngắn gọn ta sẽ viết "số", nhưng luôn luôn hiểu là số nguyên. Xin nhấn mạnh rằng, chỉ có thể nói về thương $a : b$ khi $b \neq 0$. Trường hợp $b = 0$ thương $a : b$ không xác định, nghĩa là biểu thức $a : 0$ hay $\frac{a}{0}$ không có nghĩa. Tóm lại không thể chia cho số không.

Ngược lại, khi $a = 0$ (và với mọi $b \neq 0$) thương $a : b$ xác định (và bằng không)

$$\frac{0}{b} = 0 \text{ khi } b \neq 0$$

Vì trong trường hợp này số không là số nguyên, nên nó chia hết cho mọi số nguyên khác không (ngoài ra thương bằng không).

6.2 Các định lý về chia hết

Định lý 1. Nếu các số $a_1, a_2, ..., a_n$ chia hết cho m, thì tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ chia hết cho m.

Thật vậy, vì $a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ chia hết cho m, nên tồn tại số nguyên k_i , để $a_i = k_i m$. Bởi vậy

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots + a_n &= k_1 m + k_2 m + \cdots + k_i m + \cdots + k_n m \\ &= (\sum_{i=1}^{n} k_i) m. \end{aligned}$$

Vì tổng các số nguyên là số nguyên, nên tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots + a_n$ chia hết cho m.

Định lý 2. Nếu c hai số a và b đều chia hết cho m, thì hiệu $a - b$ và $b - a$ đều chia hết cho m.

Thật vậy, vì a, b đều chia hết cho m, nên tồn tại các số nguyên t, s để $a = t.m$ và $b = s.m$. Do đó,

$$\begin{aligned} a - b &= tm - sm = (t - s)m \\ b - a &= sm - tm = (s - t)m \end{aligned}$$

Vì hiệu hai số nguyên là một số nguyên nên $(a - b) \vdots m$ và $(b - a) \vdots m$.

Hệ quả 1. Nếu tổng một số số hạng chia hết cho m và trừ một số hạng, còn tất cả các số khác đều chia hết cho m, thì số hạng này cũng chia hết cho m.

Thật vậy, giả sử tổng $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + \cdots + a_n$ chia hết cho m và chỉ có a_i, còn $a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n$ đều chia hết cho m. Khi đó tồn tại các số nguyên $s, t_j (1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i)$ để $S = sm, a_j = t_j m$. Và

$$\begin{aligned} a_i &= S - a_1 - a_s - \cdots - a_{i-1} - a_{i+1} - \cdots - a_n \\ a_i &= sm - t_1 m - t_2 m - \cdots - t_{i-1} m - t_i m - t_{i+1} m - \cdots - t_n m \\ a_i &= (s - t_1 - t_2 - \cdots - t_{i-1} - t_i - t_{i+1} - \cdots - t_n)m \end{aligned}$$

nêna_i chia hết cho m.

Định lý 3. Nếu mỗi số a_i chia hết cho $m_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ thì tích $a_1 a_2 ... a_i a_{i+1} ... a_n$ chia hết cho tích $m_1 m_2 ... m_i m_{i+1} ... m_n$.

Thật vậy, vì a_i chia hết cho $m_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, nên tồn tại số nguyên $k_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ để $a_i = k_i m_i$. Khi đó

$$\begin{aligned} a_1.a_2 a_i.a_{i+1} ... a_{n-1} a_n &= k_1 m_1.k_2 m_2 ... k_i m_i k_{i+1} m_{i+1} ... k_{n-1} m_{n-1} k_n m_n \\ &= (k_1 k_2 k_i k_{i+1} ... k_{n-1} k_n)(m_1.m_2 ... m_i.m_{i+1} ... m_{n-1} m_n) \end{aligned}$$

Nên tích $a_1.a_2 a_n$ chia hết cho tích $m_1 m_2 ... m_n$.

Hệ quả 2. Nếu a chia hết cho m, thì với số tự nhiên n tuỳ ý a^n chia hết cho m^n.

Hệ quả 3. Nếu chỉ một thừa số chia hết cho m, thì tích cũng chia hết cho m.

Thật vậy, giả sử số a_i chia hết cho m, còn $a_1, a_2, , a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n$ là các số tuỳ ý. Do a_i chia hết cho m nên tồn tại số nguyên t, để $a_i = t_m$. Khi đó

$$a_1.a_2 a_{i-1}.a_i.a_{i+1} ... a_n = a_1.a_2 ... a_{i-1} t.m a_{i+1} ... a_n = (a_1.a_2 ... a_{i-1} t.a_{i+1} ... a_n)m,$$

nên $a_1.a_2 ... a_{i-1}.a_i.a_{i+1} ... a_n$ chia hết cho m.

6.3 Phép chia có dư

Nếu số a chia cho b có thương là q và số dư là r, thì có thể viết

$$a = bq + r$$

Tuy vậy, không phải mọi cách viết $a = bq + r$ đều được xem là cách viết phép chia có dư. Chẳng hạn, đẳng thức $30 = 4.5 + 10$ đúng, nhưng không thể nói rằng 30 chia cho 5 còn dư 10, vì số dư phải bé hơn số chia. Tương tự như vậy, cách viết $30 = 4.8 + (-2)$ cũng không có nghĩa là 30 chia cho 4 còn dư -2,vì số dư không thể âm. Từ những điều phân tích ở trên nhận thấy rằng, để cách viết

$$a = bq + r$$

Biểu thị phép chia a cho b với số dư r, cần đặt điều kiện cho r không âm và bé hơn b, nghĩa là $0 \leqslant r < b$. Bởi vậy có định nghĩa

6.3.1 Định nghĩa

Giả sử a, b là hai số nguyên và $b > 0$. Ta nói rằng số a chia cho số b có thương là q và số dư là r, nếu a có thể biểu diễn bằng đẳng thức $a = bq + r$, trong đó $0 \leqslant r < b$.

6.3.2 Sự tồn tại và duy nhất của phép chia có dư

Có hai vấn đề được đặt ra đối với định nghĩa phép chia có dư là

1. Liệu có thể luôn luôn thực hiện được phép chia có dư hay không? Nói cách khác, nếu cho số nguyên a và số tự nhiên b, thì luôn luôn có thể chọn được các số nguyên q và r, để $0 \leqslant r < b$ và $a = bq + r$ hay không?

2. Phép chia có dư có duy nhất hay không? Nói cách khác, nếu số a được biểu diễn bằng hai cách khác nhau dưới dạng

$$a = bq_1 + r_1,\ 0 \leqslant r_1 < b$$
$$a = bq_2 + r_2,\ 0 \leqslant r_2 < b$$

thì hai cách này có nhất thiết phải trùng nhau hay không, nghĩa là, phải có $q_1 = q_2$ và $r_1 = r_2$?

Định lý sau sẽ giải đáp cả hai câu hỏi trên và khẳng định phép chia có dư luôn luôn tồn tại và duy nhất.

Định lý 4. Giả sử a là số nguyên và b là số tự nhiên. Khi đó có thể chọn được các số nguyên q và r, sao cho $0 \leqslant r < b$ và $a = bq + r$. Các số q, và r xác định theo các điều kiện trên là duy nhất.

Chọn số tự nhiên c, sao cho $|a| < c$ và xét dãy số

$$-cb,\ (-c+1)b,\ (-c+2)b,\ ..., -2b,\ -b,\ 0b,\ 2b, ..., (c-1)b,\ cb \tag{1}$$

Trong đó kể từ số thứ hai đều lớn hơn số ngay trước nó b đơn vị. Nên đây là một dãy tăng và có số đầu $-cb < a$, số cuối $cb > a$ (do $|a| \leqslant c \leqslant cb$ vì $b \geqslant 1$). Điều này chứng tỏ rằng trong dãy (1) có một số bé hơn hay bằng a, còn số tiếp theo lớn hơn a. Ký hiệu số này là qb. Khi đó số tiếp theo là $(q+1)b$ đã lớn hơn a.

$$qb \leqslant a < (q+1)b \tag{2}$$

Như vậy là thương q đã chọn được. Ký hiệu r là số $a - qb$, nên

$$a = qb + r$$

Khi đó bất đẳng thức (2) có dạng

$$q_b \leqslant qb + r < (q+1)b$$

Bớt cả hai vế của bất đẳng thức trên đi qb đơn vị ta có

$$0 \leqslant r < b$$

Vậy thương q và số dư r đã tìm được.

Ta chứng minh tính duy nhất của dạng biểu diễn phép chia có dư. Giả sử số a có thể biểu diễn bằng ít nhất hai cách khác nhau và hai trong các cách biểu diễn đó là

$$a = bq_1 + r_1, \text{ với } 0 \leqslant r_1 < b$$
$$a = bq_2 + r_2, \text{ với } 0 \leqslant r_2 < b$$

Trừ vế với vế hai đẳng thức trên có

$$(q_1 - q_2)b + (r_1 - r_2) = 0, \tag{3}$$

nghĩa là $r_1 - r_2 = -(q_1 - q_2)b$. Do đó $r_1 - r_2$ chia hết cho b.

Giả sử $r_1 \neq r_2$ và để xác định, ta giả sử $r_1 > r_2$. Khi đó $r_1 - r_2 > 0$. Mặt khác $r_1 - r_2 \leqslant r_1 < b$. Khi đó $r_1 - r_2$ là số tự nhiên bé hơn b, nên nó không thể chia hết cho b. Ta đã đi tới mâu thuẫn, nên $r_1 = r_2$. Bởi vậy đẳng thức (3) có dạng

$$(q_1 - q_2)b = 0$$

Vì $b \neq 0$ (b là số tự nhiên), nên suy ra $q_1 - q_2 = 0$. Nghĩa là $q_1 = q_2$ và dạng biểu diễn phép chia có dư là duy nhất.

Từ định lý trên suy ra rằng, mỗi số nguyên a có thể biểu diễn bằng một trong các dạng sau

$$\begin{gathered} a = b.q \\ a = b.q + 1, \\ a = b.q + 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a = b.q + (b-1). \end{gathered}$$

6.4 Phương pháp dùng phép chia có dư

Căn cứ vào số chia b, mà xét mọi khả năng phân tích $a = b.q + k$ với $k \in \{1, 2, ..., q-1\}$. Sau đó, với mỗi khả năng phân tích này lý luận để suy ra đáp án của bài toán. Chẳng hạn với $q = 3$ mỗi số nguyên a có thể phân tích thành một trong ba dạng là $3q, 3q+1, 3q+2$. Sau đó thế mỗi dạng biểu diễn vào các vị trí của a rồi lý luận để suy ra đáp số.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, số $a^3 - a$ chia hết cho 6.

Giải. Phân tích biểu thức $a^3 - a$ thành tích của ba thừa số

$$a^3 - a = a(a-1)(a+1)$$

Số a có thể biểu diễn bằng một trong các dạng sau

$$6q,\ 6q+1,\ 6q+2,\ 6q+3,\ 6q+4,\ 6q+5$$

Ta xét từng khả năng phân tích số a

Với $a = 6q$ số $a^3 - a = 6q(6q-1)(6q+1)$ chia hết cho 6;

Với $a = 6q+1$ số $a^3 - a = (6q+1)6q(6q+2)$ chia hết cho 6

Với $a = 6q+2$ số

$$\begin{aligned} a^3 - a &= (6q+2)(6q+1)(6q+3) \\ &= 2(3q+1)(6q+1)3(2q+1) \\ &= 6(3q+1)(6q+1)(2q+1) \end{aligned}$$

chia hết cho 6

Với $a = 6q + 3$ số

$$\begin{aligned} a^3 - a &= (6q + 3)(6q + 2)(6q + 4) \\ &= 3(2q + 1)2(3q + 1)2(3q + 2) \\ &= 12(2q + 1)(3q + 1)(3q + 2) \end{aligned}$$

chia hết cho 6.

Với $a = 6q + 4$ số

$$\begin{aligned} a^3 - a &= (6q + 4)(6q + 3)(6q + 5) \\ &= 2(3q + 2)3(2q + 1)(6q + 5) \\ &= 6(3q + 2)(2q + 1)(6q + 5) \end{aligned}$$

chia hết cho 6.

Với $a = 6q + 5$ số

$$\begin{aligned} a^3 - a &= (6q + 5)(6q + 4)(6q + 6) \\ &= (6q + 5)2(3q + 2)6(q + 1) \\ &= 12(6q + 5)(3q + 2)(q + 1) \end{aligned}$$

chia hết cho 6.

Vậy với mọi số nguyên a số $a^3 - a$ chia hết cho 6.

Nhận xét.

Ngoài cách giải trên có thể lý luận ngắn gọn như sau.

Số

$$a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$$

chứa hai số nguyên liên tiếp, nên nó chia hết cho 2. Ngoài ra, số này còn chứa ba số nguyên liên tiếp, nên nó chia hết cho 3. Bởi vậy số $a^3 - a$ chia hết cho 6.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, số $a(a^6 - 1)$ chia hết cho 7 ?

Giải.

Phân tích biểu thức $a(a^6 - 1)$ thành tích ta được

$$a(a^6 - 1) = a(a^3 - 1)(a^3 + 1) = a(a - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$$

Số a có thể biểu diễn bằng một trong các dạng sau

$$a = 7q,\ a = 7q + 1,\ a = 7q + 2,\ a = 7q + 3,\ a = 7q + 4,\ a = 7q + 5,\ a = 7q + 6$$

Ta xét từng khả năng phân tích số a

Với$a = 7q$ số

$$a(a^6 - 1) = 7q(7q-1)(7q+1)\{(7q)^2 - 7q + 1)\}\{(7q)^2 + 7q + 1)\}$$

chia hết cho 7.

Với $a = 7q + 1$ số

$$a(a^6 - 1) = (7q+1)7q(7q+2)\{(7q+1)^2 - 7q\}\{(7q+1)^2 + 7q + 2\}$$

chia hết cho 7.

Với $a = 7q + 2$ số

$$\begin{aligned} a(a^6 - 1) &= (7q+2)(7q+1)(7q+3)\{(7q+2)^2 - 7q - 1\}\{(7q+2)^2 + 7q + 3)\} \\ &= (7q+2)(7q+1)(7q+3)\{49q^2 + 28q + 4 - 7q - 1\}\{49q^2 + 28q + 4 + 7q + 3)\} \\ &= (7q+2)(7q+1)(7q+3)\{49q2 + 21q + 3\}7\{7q^2 + 5q + 1\} \end{aligned}$$

chia hết cho 7;

Với $a = 7q + 3$ số

$$\begin{aligned} a(a^6 - 1) &= (7q+3)(7q+2)(7q+4)\{(7q+3)^2 - 7q - 2\}\{(7q+3)^2 + 7q + 4)\} \\ &= (7q+3)(7q+2)(7q+4)\{(49q^2 + 42q + 9 - 7q - 2\}\{49q^2 + 42q + 9 + 7q + 4)\} \\ &= (7q+3)(7q+2)(7q+4)7\{7q^2 + 5q + 1\}\{49q^2 + 7q + 13\} \end{aligned}$$

chia hết cho 7.

Với $a = 7q + 4$ số

$$\begin{aligned} a(a^6 - 1) &= (7q+4)(7q+3)(7q+5)\{(7q+4)^2 - 7q - 3\}\{(7q+4)^2 + 7q + 5)\} \\ &= (7q+4)(7q+3)(7q+5)\{49q^2 + 56q + 16 - 7q - 3\}\{49q^2 + 56q + 16 + 7q + 5\} \\ &= (7q+4)(7q+3)(7q+5)\{49q^2 + 49q + 13\}7\{7q^2 + 9q + 3\} \end{aligned}$$

chia hết cho 7.

Với $a = 7q + 5$ số

$$\begin{aligned} a(a^6 - 1) &= (7q+5)(7q+4)(7q+6)\{(7q+5)^2 - 7q - 4\}\{(7q+5)^2 + 7q + 6\} \\ &= (7q+5)(7q+4)(7q+6)\{49q^2 + 70q + 25 - 7q - 4\}\{49q^2 + 70q + 25 + 7q + 6\} \\ &= (7q+5)(7q+4)(7q+6).7.\{7q^2 + 9q + 3\}\{49q^2 + 77q + 31\} \end{aligned}$$

chia hết cho 7.

Với $a = 7q + 6$ số

$$\begin{aligned}a(a^6-1) &= (7q+6)(7q+5)(7q+7)\{(7q+6)^2-7q-5\}\{(7q+6)^2+7q+7\}\\ &= (7q+6)(7q+5).7.(q+1)\{49q^2+84q+36-7q-5\}\{49q^2+84q+36+7q+7\}\\ &= (7q+6)(7q+5).7.(q+1)\{49q^2+77q+31\}\{49q^2+91q+43\}\end{aligned}$$

chia hết cho 7.

Vậy số $a(a^6-1)$ chia hết cho 7.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng không có giá trị nào của a, để số a^2+1 chia hết cho 3.

Giải. Số a có thể biểu diễn bằng một trong ba cách sau

$$a = 3q,\ a = 3q+1,\ a = 3q+2$$

Xét mọi khả năng phân tích số a

Với $a = 3q$ số$a^2+1 = 9q^2+1$ chia cho 3 còn dư 1, nên a^2+1 không chia hết cho 3.

Với $a = 3q+1$ số

$$\begin{aligned}a^2+1 &= (3q+1)2+1\\ &= 9q^2+6q+2\\ &= 3(3q^2+2q)+2\end{aligned}$$

chia cho 3 còn dư 2, nên a^2+1 không chia hết cho 3.

Với $a = 3q$+2 số

$$\begin{aligned}a^2+1 &= (3q+2)^2+1\\ &= 9q^2+12q+4+1\\ &= 3(3q^2+4q+1)+2\end{aligned}$$

chia cho 3 còn dư 2, nên a^2+1 không chia hết cho 3.

Vậy a^2+1 không chia hết cho 3.

hvua Bài tập

1. Chứng minh rằng nếu các số a và b không chia hết cho 3. Nhưng có cùng số dư khi chia cho 3, thì số $ab-1$ chia hết cho 3. Ngược lại nếu $ab-1$ chia hết cho 3 thì các số a và b không chia hết cho 3 và có cùng dư số khi chia cho 3.

2. Chứng minh rằng nếu các số a và b không chia hết cho 3 và có số dư khác nhau khi chia cho 3, thì số $ab+1$ chia hết cho 3. Ngược lại, nếu $ab+1$ chia hết cho 3, thì các số a và b không chia hết cho 3 và có số dư khác nhau khi chia cho 3.

3. Chứng minh rằng với các số a và b bất kỳ số $ab(a^2-b^2)(4a^2-b^2)$ luôn luôn chia hết cho 5.

4. Chứng minh rằng nếu dù chỉ một số a hay b không chia hết cho 7 thì a^2+b^2 cũng không chia hết cho 7.

5. Chứng minh rằng với các số nguyên a, b, c bất kỳ, số $a^2+b^2+c^2+1$ không chia hết cho 8.

6. Chứng minh rằng nếu tổng của ba số nguyên chia hết cho 6, thì tổng lập phương của chúng cũng chia hết cho 6.

7. Cho hai số gồm ba chữ số, không có số nào chia hết cho 37, còn tổng của chúng chia hết cho 37. Viết số này kề với số kia, ta nhận được một số gồm sáu chữ số. Chứng minh rằng số này chia hết cho 37.

8. Cho hai số gồm ba chữ số có cùng số dư khi chia cho 7. Viết số này kề số kia ta nhận được một số gồm sáu chữ số. Chứng minh rằng số đó chia hết cho 7.

9. Cho x, y là các số nguyên. Chứng minh rằng x^2+y^2 chia hết cho 3 khi và chỉ khi cả hai số x, y đồng thời chia hết cho 3.

10. Với a là số nguyên. Chứng minh rằng a^5-a chia hết cho 3.

6.5 Phương pháp đồng dư

6.5.1 Phép đồng dư

Định nghĩa. Nếu hai số a và b có cùng số dư khi chia cho m, thì ta nói rằng a và b đồng dư theo modun m và viết

$$a \equiv b \pmod m$$

Và đọc là a đồng dư với b theo modun m. Sử dụng cách viết trên đây thuận tiện cho việc phát biểu và tính toán. Sau đây sẽ trình bày một số định lý đơn giản về đồng dư.

Định lý 5. Phép đồng dư $a \equiv b \pmod m$ có nghĩa khi và chỉ khi hiệu $a-b$ chia hết cho m. Nói cách khác, các số a và b có cùng số dư khi chia cho m, nếu và chỉ nếu hiệu $a-b$ chia hết cho m.

Chứng minh. Giả sử $a \equiv b \pmod m$. Khi đó các số a và b có cùng số dư (r) khi chia cho m. Bởi vậy

$$a = mq + r,\ b = mq' + r,$$

trong đó q, q' là các số nguyên nào đó. Trừ vế với vế hai đẳng thức trên ta được

$$a - b = mq - mq' = m(q - q')$$

Do đó hiệu $a - b$ chia hết cho m.
Ngược lại, giả sử hiệu $a - b$ chia hết cho m. Khi đó tồn tại số nguyên k, để

$$a - b = k.m \tag{1}$$

Chia (có dư) số b cho m:

$$b = q.m + r, \quad \text{trong đó } 0 \leqslant r < m \tag{2}$$

Cộng vế với vế đẳng thức (1) và (2) ta được

$$a = k.m + q.m + r = (k + q).m + r$$

đồng thời r vẫn thoả mãn bất đẳng thức kép $0 \leqslant r < m$, nghĩa là a có cùng số dư với b khi chia cho m, tức $a \equiv b \pmod m$.

Định lý 6. Các phép đồng dư có thể cộng vế với vế, nghĩa là, nếu $a_i \equiv b_i \pmod m$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, thì

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots . + a_n \equiv b_1 + b_2 + \cdots + b_i + \cdots . + b_n \pmod m$$

Nói cách khác, nếu a_i và $b_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ có cùng số dư khi chia cho m, thì các tổng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{và} \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

cũng có cùng số dư khi chia cho m.

Chứng minh. Vì $a_i \equiv b_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, nên theo Định lý 5, các số $a_i - b_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ chia hết cho m. Bởi vậy tồn tại các số nguyên k_i để $a_i - b_i = k_i m$. Khi đó

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_m - b_m) \\ &= k_1 m + k_2 m + \cdots + k_n m \\ &= (k_1 + k_2 + \cdots + k_n) m\end{aligned}$$

Vậy hiệu $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ chia hết cho m, nên, theo Định lý 5,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \cdots + b_i + \cdots + b_n \pmod m$$

Định lý 7. Các phép đồng dư có thể trừ vế với vế, nghĩa là từ $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$ suy ra $a - c \equiv b - d \pmod m$.

Chứng minh. Vì $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$, nên theo định lý 5, các số $a-b$ và $c-d$ chia hết cho m. Do đó tồn tại các số nguyên k, l, để $a-b = k.m,\ c-d = l.m$. Trừ vế với vế hai đẳng thức trên ta được

$$(a-c)-(b-d) = (a-b)-(c-d) = km - lm = (k-l)m$$

Bởi vậy $(a-c)-(b-d)$ chia hết cho m. Do đó, theo định lý 5, $(a-c) \equiv (b-d) \pmod m$.

Định lý 8. Các phép đồng dư có thể nhân vế với vế, nghĩa là, nếu $a_1 \equiv b_1 \pmod m$, $a_2 \equiv b_2 \pmod m, ..., a_i \equiv b_i \pmod m, ..., a_n \equiv b_n \pmod m$, thì

$$a_1a_2...a_i....a_n \equiv b_1b_2...b_i...b_n \pmod m$$

Chứng minh. Định lý được chứng minh bằng quy nạp theo n.

Cơ sở quy nạp: Với $n = 2$ ta có $a_1 \equiv b_1 \pmod m$, $a_2 \equiv b_2 \pmod m$ nên theo định lý 5, các hiệu $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$ chia hết cho m. Khi đó tồn tại các số nguyên k_1, k_2 để

$$a_1 - b_1 = k_1m,\ \ a_2 - b_2 = k_2m$$

Do đó

$$\begin{aligned}
a_1a_2 - b_1b_2 &= a_1a_2 - a_1b_2 + a_1b_2 - b_1b_2 \\
&= (a_1a_2 - a_1b_2) + (a_1b_2 - b_1b_2) \\
&= a_1(a_2 - b_2) + b_2(a_1 - b_1) \\
&= a_1k_2m + b_2k_1m \\
&= (a_1k_2 + b_2k_1)m
\end{aligned}$$

Bởi vậy $a_1a_2 - b_1b_2$ chia hết cho m nên, theo định lý 4, $a_1a_2 \equiv b_1b_2 \pmod m$.

Quy nạp, giả sử khẳng định đã đúng với $n = t$, $t \geqslant 2$, nghĩa là từ t phép đồng dư tùy ý

$$a_1 \equiv b_1 \pmod m,\ \ a_2 \equiv b_2 \pmod m, ..., a_i \equiv b_i \pmod m, ..., a_t \equiv b_t \pmod m$$

đã suy ra được

$$a_1a_2...a_i...a_t \equiv b_1b_2...b_i...b_t \pmod m \tag{1}$$

Xét $t+1$ phép đồng dư bất kỳ, $a_1 \equiv b_1 \pmod m$, $a_2 \equiv b_2 \pmod m, ..., a_t \equiv b_t \pmod m, ..., a_{t+1} \equiv b_{t+1} \pmod m$.
Khi đó, theo giả thiết quy nạp từ t phép đồng dư đầu đã có

$$a_1a_2...a_t \equiv b_1b_2...b_t \pmod m$$

Ký hiệu, $a_1a_2...a_t$ bằng A_t, còn $b_1b_2...b_t$ bằng B_t. Khi đó, theo định lý 5, hiệu $A_t - B_t$ chia hết cho m, nên tồn tại số nguyên l, để $A_t - B_t = l.m$.

Do $a_{t+1} \equiv b_{t+1} \pmod m$, nên, theo định lý 5, $a_{t+1} - b_{t+1}$ chia hết cho m. Bởi vậy tồn tại số nguyên k, để $a_{t+1} - b_{t+1} = k.m$.
Xét hiệu

$$\begin{aligned} A_t a_{t+1} - B_t.b_{t+1} &= A_t a_{t+1} - A_t b_{t+1} + A_t b_{t+1} - B_t b_{t+1} \\ &= A_t(a_{t+1} - b_{t+1}) + b_{t+1}(A_t - B_t) \\ &= A_t.k.m + b_{t+1}.l.m \\ &= (A_t.k + b_{t+1}.l)m \end{aligned}$$

nên $a_1a_2....a_ta_{t+1} - b_1b_2...b_tb_{t+1} = A_ta_{t+1} - B_tb_{t+1}$ chia hết cho m. Do đó, theo định lý 5, thì

$$a_1a_2...a_n \equiv b_1b_2...b_n \pmod m$$

Từ định lý 7 suy ra các hệ quả sau:

Hệ quả 2. Các phép đồng dư có thể nâng lên lũy thừa, nghĩa là, nếu $a \equiv b \pmod m$ thì với mọi số nguyên không âm n đều có $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Hệ quả 3. Giả sử $P(x)$ là đa thức tùy ý với hệ số nguyên

$$P(x) = t_o + t_1x + t_2x^2 + \cdots . + t_nx^n$$

Khi đó nếu $a \equiv b \pmod m$, thì

$$P(a) = t_0 + t_1a + t_2a^2 + \cdots + t_na^n \equiv t_o + t_1b + t_2b^2 + \cdots + t_nb^n = P(b) \pmod m$$

6.5.2 Phương pháp đồng dư

Ta sẽ vận dụng các tính chất của phép đồng dư để giải bài toán chia hết.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng số $5^{8^{2004}} + 23$ chia hết cho 24.

Giải. Ta sẽ chứng minh khẳng định tổng quáât rằng với mọi số tự nhiên n số $5^{8^n} + 23$ chia hết cho 24. Thật vậy, do $5^{8^n} = 5^{8.8^{n-1}} = 25^{4.8^{n-1}}$ và $25 \equiv 1 \pmod{24}$ nên $25^{4.8^{n-1}} \equiv 1 \pmod{24}$. Bời vậy, $5^{8^n} \equiv 1 \pmod{24}$. Do đó

$$5^{8^n} + 23 \equiv 24 \equiv 0 \pmod{24}$$

Nên $5^{8^n} + 23$ chia hết cho 24.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, số $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133.

Giải. Ta có $12^{2n+1} = 12.12^{2n} = 12\{(12)^2\}^n = 12.144^n$. Vì $144 \equiv 11 \pmod{133}$, nên $144^n \equiv 11^n \pmod{133}$. Nhân cả hai vế với 12 ta có

$$12.144^n = 12.11^n$$

Bởi vậy

$$12^{2n+1} \equiv 12.11^n \pmod{133} \qquad (1)$$

Mặt khác,

$$1^{n+2} = (11^2)^n = 121^n$$

Do

$$121 \equiv -12 \pmod{133}$$

Nên

$$121.11^n \equiv -12.11^n \pmod{1}33$$

Bởi vậy

$$11^{n+2} \equiv -12.11^n \pmod{133} \qquad (2)$$

Cộng vế với vế các phép đồng dư (1) và (2) được

$$12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133}$$

Do đó $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng, nếu $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 9, thì ít nhất một trong các hiệu $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$, $b^2 - c^2$ chia hết cho 9.

*Giải.*Khi chia số nguyên tuỳ ý n cho 9 nhận được một trong các số dư $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Bởi vậy,

Nếu $n \equiv 0 \pmod 9$, thì $n^2 \equiv 0 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 1 \pmod 9$, thì $n^2 \equiv 1 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 2 \pmod 9$, thì $n^2 \equiv 4 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 3 \pmod 9$, thì $n^2 \equiv 9 \equiv 0 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 4 \pmod 9$, thì $n^2 \equiv 16 \equiv 7 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 5 \pmod 9$, thì $n^2 \equiv 25 \equiv 7 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 6 \pmod 9$, thì $n^2 \equiv 36 \equiv 0 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 7 \pmod 9$, thì $n^2 \equiv 49 \equiv 4 \pmod 9$

Nếu $n \equiv 8 \pmod 9$, thì $n^2 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 9$

Vậy dù với số nguyên n nào đi chăng nữa, số n^2 cũng chỉ có thể có một trong các số dư $0, 1, 4, 7$ khi chia cho 9. Dùng r_1, r_2, r_3 để ký hiệu các số dư tương ứng của a_2, b_2, c_2 khi chia cho 9.

Khi đó

$$a_2 \equiv r_1 \pmod 9,\ b_2 \equiv r_2 \pmod 9,\ c_2 \equiv r_3 \pmod 9$$

Cộng vế với vế các phép đồng dư trên ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv r_1 + r_2 + r_3 \pmod 9$$

Vì $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 9, nên

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod 9$$

Do đó

$$r_1 + r_2 + r_3 \equiv 0 \pmod 9$$

Vì mỗi số r_1, r_2, r_3 chỉ có thể nhận các giá trị $0, 1, 4, 7$, nên $r_1 + r_2 + r_3$ chỉ có thể chia hết cho 9 trong các trường hợp sau

1) $r_1 = r_2 = r_3 = 0$,
2) Một trong các số r_1, r_2, r_3 bằng 1 và hai số còn lại bằng 4,
3) Một trong các số r_1, r_2, r_3 bằng 7, hai số còn lại bằng 1,
4) Một trong các số r_1, r_2, r_3 bằng 4, hai số còn lại bằng 7,

Trong mọi trường hợp đều có ít nhất hai trong các số r_1, r_2, r_3 bằng nhau. Điều này có nghĩa là ít nhất hai trong các số a_2, b_2, c_2 có cùng số dư khi chia cho 9, nên có ít nhất một trong các hiệu $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$, $b^2 - c^2$ chia hết cho 9.

Bài tập

11. Với mọi số nguyên không âm n hãy chứng minh rằng
    a) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ chia hết cho 11.
    b) $6.2^{5n+3} + 5^n.3^{n+1}$ chia hết cho 17
    c) $5^{2n+1}.2^{n+2} + 3^{n+2}.2^{2n+1}$ chia hết cho 19.

12 Chứng minh rằng không tồn tại một số n nào để các số $3n-1$, $5n+2$, $5n-2$, $7n+3$, $7n-2$ là các số chính phương.

13 Chứng minh rằng, với các số tự nhiên k, n tuỳ ý số $1^{2k-1} + 2^{2k-1} + \cdots + (2n)^{2k-1}$ chia hết cho $2n+1$.

14 Chứng minh rằng số 100...001 (với số số 0 chẵn) chia hết cho 11.

6.6 Phương pháp sử dụng tính tuần hoàn khi nâng lên lũy thừa

6.6.1 Sự tuần hoàn của các số dư khi nâng lên lũy thừa

Xét các lũy thừa liên tiếp của số 2;

$$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, ...$$

và tìm xem khi chia các luỹ thừa này cho 5 nhận được các loại số dư nào? Nếu tìm trực tiếp thì khá phức tạp và lũy thừa càng lớn, thì càng khó khăn. Song, nhờ việc nâng lên lũy thừa hai vế của phép đồng dư có thể tìm các số dư của lũy thừa một cách dễ dàng.

Thật vậy, ta có

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8 \equiv 3 \pmod 5),\ 2^4 = 16 \equiv 1 \pmod 5 \tag{1}$$

Để tìm số dư khi chia 25 cho 5 ta nhân cả hai vế phép đồng dư (1) với 2 sẽ được

$$\begin{aligned} &2^5 \equiv 2 \pmod 5\\ &2^6 \equiv 4 \pmod 5\\ &2^7 \equiv 4.2 \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5\end{aligned}$$

Tiếp theo

$$\begin{aligned} &2^8 \equiv 3.2 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5\\ &\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Viết các kết quả vào hai hàng. Hàng trên ghi các luỹ thừa, hàng dưới ghi số dư tương ứng khi chia các lũy thừa này cho 5.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & 2^{10} & 2^{11} & \cdots \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & \cdots \end{array}$$

Hàng thứ hai cho ta thấy rằng các số dư lập lại một cách tuần hoàn: sau 4 số dư $2, 4, 3, 1$ lại lặp lại theo đúng thứ tự trên và cứ tiếp tục lặp lại theo thứ tự trên v.v

Xét các số dư của phép chia lũy thừa của 3 cho 7

Ta có

$$\begin{aligned} &3^1 = 3\\ &3^2 = 9 \equiv 2 \pmod 7\end{aligned}$$

Nhân phép đồng dư trên với 3, sau lại nhân phép đồng dư nhận được với 3, ta được

$$\begin{aligned}
&3^3 \equiv 6 \pmod 7\\
&3^4 \equiv 6 \times 3 \equiv 4 \pmod 7\\
&3^5 \equiv 4 \times 3 \equiv 5 \pmod 7\\
&3^6 \equiv 5 \times 3 \equiv 1 \pmod 7
\end{aligned}$$

Tiếp tục tính toán như trên sẽ được hai hàng sau

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 & 3^7 & 3^8 & 3^9 & 3^{10} & 3^{11} & 3^{12} & \cdots\\
3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & \cdots
\end{array}$$

(dưới mỗi lũy thừa là số dư của nó khi chia cho 7)

Xét các số dư khi chia luỹ thừa của 5 cho 16 ta được hai hàng tương ứng:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 & 5^5 & 5^6 & 5^7 & 5^8 & 5^9 & 5^{10} & 5^{11} & \cdots\\
5 & 9 & 13 & 1 & 5 & 9 & 13 & 1 & 5 & 13 & 1 & \cdots
\end{array}$$

(dưới mỗi lũy thừa là số dư của nó khi chia cho 16)

Nhìn vào hàng hai ta dễ dàng nhận thấy các số dư lặp lại sau 4 số dư $5, 9, 13, 1$, rồi lại lặp lại đúng thứ tự như trên.vv...

quảan sát sự tuần hoàn của các số dư khi nâng lên lũy thừa trong các ví dụ trên một câu hỏi tự nhiên đặt ra là: Phải chăng với các số tự nhiên bất kỳ a và m các số dư của phép chia các lũy thừa của a cho m lặp lại một các tuần hoàn? Thật vậy, để giải đáp câu hỏi trên ta chứng minh khẳng định sau

Định lý 9. Đối với các số tự nhiên a và m tùy ý các số dư của phép chia $a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 \cdots$ cho m lặp lại một cách tuần hoàn (có thể không bắt đầu từ đầu).

Chứng minh. Ta lấy $m+1$ lũy thừa đầu tiên

$$a,\ a^2,\ a^3, ..., a^m, a^{m+1}$$

và xét các số dư của chúng khi chia cho m. Vì khi chia cho m chỉ có thể có các số dư $\{0, 1, 2, ..., m-2, m-1\}$, mà lại có $m+1$ số, nên trong các số trên phải có hai số có cùng số dư khi chia cho m. Chẳng hạn, hai số đó là a^k và a^{k+l}, trong đó $l > 0$.

Khi đó

$$a^k \equiv a^{k+l} \pmod m \tag{1}$$

Với mọi $n \geqslant k$ nhân cả hai vế của phép đồng dư (1) với a^{n-k} sẽ được

$$a^n \equiv a^{n+l} \pmod m$$

Điều này chứng tỏ rằng bắt đầu từ vị trí tương ứng với a^k các số dư lặp lại tuần hoàn, tức bắt đầu từ số tương ứng với a^k có một số dư lặp lại và lặp lại v.v...

Số l được gọi là chu kỳ tuần hoàn của các số dư khi chia lũy thừa của a cho m.

Nhận xét.

Từ chứng minh trên nhận thấy rằng sự tuần hoàn của các số dư bắt đầu từ chỗ ta phát hiện ra hai số dư trùng nhau. Mặt khác để phát hiện ra hai số dư giống nhau khi chia cho m ta không phi quảåan tâm đến cả số a mà chỉ cần lấy $m+1$ lũy thừa đầu tiên là đủ.

Nếu tồn tại số l, để $a^l \equiv l \pmod{m}$, thì với mọi số tự nhiên n $a^{n+l} \equiv a^n \pmod{m}$, nên l chẳng những là chu kỳ tuần hoàn của các số dư, mà còn có thể xem là chỉ số bắt đầu sự tuần hoàn của các số dư.

6.6.2 Thuật toán

Để giải bài toán chia hết, cần xác định số dư của lũy thừa a^n chia cho m, ta cần tìm các số tự nhiên k, l nhỏ nhất, để

$$a^k \equiv a^{k+l} \pmod{m}$$

Sau đó căn cứ vào số dư r của n chia cho l, mà xác định số dư tương ứng với a^{k+r}.

Chú ý.

1) Trong trường hợp tồn tại số tự nhiên s, để

$$a^s \equiv 1 \pmod{m}$$

ta chỉ việc tìm các số tự nhiên nhỏ nhất k, l sao cho

$$a^k \equiv a^{k+l} \equiv 1 \pmod{m}$$

sau đó tìm số dư r của n chia cho l và xác định số dư của a^r khi chia cho m. Đây chính là số dư của a^n chia cho m.

2) Khi lũy thừa có số mũ không phải là hàm tuyến tính của n, chẳng hạn, $a^{p(n)}$ với $p(n)$ là một hàm mũ, mà ta có thể thay đổi cơ số từ a sang b, để có

$$a^{p(n)} = b^{q(n)} \quad \text{và} \quad b \equiv 1 \pmod{m}$$

thì

$$a^{p(n)} \equiv 1^{q(n)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Trường hợp không biến đổi được cơ số như trên cần tìm cách thay đổi cơ số, để lũy thừa có số mũ là một số tự nhiên rồi tìm số dư như thuật toán đã nêu.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng số $5^{8^{2004}} + 5$ chia hết cho 6.

Giải. Ta sẽ chứng minh trường hợp tổng quáat: Với mọi số tự nhiên n số $5^{8^n} + 5$ chia hết cho 6. Do

$$5^{8^n} = 5^{8\times 8^{n-1}} = 5^{2\times 4\times 8^{n-1}} = (25)^{4\times 8^{n-1}}$$

Vì $25 \equiv 1 \pmod 6$, nên

$$5^{8^n} = (25)^{4\times 8^{n-1}} \equiv 1 \pmod 6$$

Mặt khác $5 \equiv 5 \pmod 6$.
Vậy $5^{8^n} + 5 \equiv 6 \equiv 0$ (mod). Do đó $5^{8^n} + 5$ chia hết cho 6. Thay $n = 2004$ ta được $5^{8^{2004}} + 5$ chia hết cho 6.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng $14^{8^{2004}} + 10$ chia hết cho 11.

Giải. Tìm số dư của $14^{8^{2004}}$+8 chia cho 11. Do $14 \equiv 3 \pmod{11}$, nên $14^{8^{2004}} \pmod{11}$.

Do $3^8 = 6561 \equiv 5 \pmod{11}$, nên $3^{8^{2004}} = 6561^{2004} \equiv 5^{2004} \pmod{11}$.

Xét các số dư thuộc lũy thừa của 5 khi chia cho 11

5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8
5	4	9	1	5	4	9	1

nên

$$5^{4\times 501} = (5^4)^{501} \equiv 1^{501} \equiv 1 \pmod{11} \tag{1}$$

Mặt khác,

$$10 \equiv 10 \pmod{11} \tag{2}$$

Cộng vế với vế phép đồng dư (1) và (2) có

$$14^{8^{2004}} + 10 \equiv 11 \equiv 0 \pmod{11}$$

Nên $14^{8^{2004}} + 10$ chia hết cho 11.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng số $222^{555} + 555^{222}$ chia hết cho 7.

Giải.
1) Do $222 = 7 \times 31 + 5$, nên $222 \equiv 5 \pmod 7$. Bởi vậy,

$$222^{555} \equiv 5^{555} \pmod 7$$

Xét sự tuần hoàn của các số dư khi chia lũy thừa của 5 cho 7 ta được

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 & 5^5 & 5^6 & 5^7 & 5^8 & \cdots \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & \cdots \end{array}$$

Như vậy

$$5^6 \equiv 1 \pmod 7 \tag{1}$$

Với mọi số tự nhiên t, nâng cả hai vế của phép đồng dư (1) lên lũy thừa t ta có

$$5^{6t} \equiv 1 \pmod 7$$

Mặt khác $555 = 6.92 + 3$, nên $5^{555} = 5^{6.92+3} = 5^{6.92}.5^3 \equiv 6 \pmod 7$. Do đó

$$222^{555} \equiv 6 \pmod 7 \tag{2}$$

2) Do $555 = 7.79 + 2$, nên $555 \equiv 2 \pmod 7$. Bởi vậy, $555^{222} \equiv 2^{222} \pmod 7$.

Xét sự tuần hoàn của các số dư khi chia lũy thừa của 2 cho 7 ta được

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & \cdots \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 1 & \cdots \end{array}$$

Như vậy

$$2^3 \equiv 1 \pmod 7 \tag{3}$$

Với mọi số tự nhiên s nâng cả hai vế của phép đồng dư (3) lên lũy s ta có

$$2^{3s} \equiv 1 \pmod 7$$

Mặt khác, $222 = 3.74$, nên

$$555^{222} \equiv 2^{3\times 74} \equiv 1 \pmod 7 \tag{4}$$

Cộng vế với vế các phép đồng dư (2) và (4) có

$$222^{555} + 555^{222} \equiv 6 + 1 \equiv 0 \pmod 7$$

Vậy số $222^{555} + 555^{222}$ chia hết cho 7.

Bài tập

15 Chứng minh rằng số $7^{100} + 11^{100}$ chia hết cho 13.

16 Chứng minh rằng số $6^{592} + 8$ chia hết cho 11.

17 Chứng minh rằng số $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

18 Chứng minh rằng $777^{777} - 7$ chia hết cho 10.

19 Hãy tìm chữ số tận cùng của số

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$$

20 Chứng minh rằng số $14^{14^{14}} - 6$ chia hết cho 10.

21 Chứng minh rằng số $11^{10^{1967}} - 1$ chia hết cho 10^{1968}.

22 Chứng minh rằng số $222^{333} + 333^{222}$ chia hết cho 13.

23 Với mọi số nguyên không âm chứng minh rằng số

$$2^{5n+3} + 5^n.3^{n+1}$$

chia hết cho 17.

6.7 Phương pháp quy nạp

Phương pháp quy nạp có vai trò vô cùng quảan trọng trong toán học, khoa học và cuộc sống. Đối với nhiều bài toán chia hết, phương pháp quy nạp cũng cho ta cách giải hữu hiệu.

Suy diễn là quảá trình từ "tính chất" của tập thể suy ra "tính chất" của cá thể, nên luôn luôn đúng, còn quảá trình ngược lại, tức quảá trình quy nạp: đi từ "tính chất" của một số cá thể suy ra "tính chất" của tập thể, thì không phi lúc nào cũng đúng, mà quảá trình này chỉ dùng khi nó tho mãn một số điều kiện nào đó, tức tho mãn nguyên lý quy nạp.

6.7.1 Nguyên lý quy nạp

Nếu khẳng định $S(n)$ thoả mãn hai điều kiện sau

a) Đúng với $n = k_o$ (số tự nhiên nhỏ nhất mà $S(n)$ xác định).

b) Từ tính đúng đắn của $S(n)$ đối với $n = t$ (hoặc đối với mọi giá trị của n, $k_0 \leqslant n \leqslant t$) suy ra tính đúng đắn của $S(n)$ đối với $n = t + 1$, thì $S(n)$ đúng với mọi $n \geqslant k_0$.

6.7.2 Phương pháp chứng minh bằng quy nạp

Giả sử khẳng định $T(n)$ xác định với mọi $n \geqslant t_0$. Để chứng minh $T(n)$ đúng với mọi $n\,(n \geqslant t_0)$ bằng quy nạp, ta cần thực hiện hai bước.

a. Cơ sở quy nạp.

Thực hiện bước này tức là ta thử xem sự đúng đắn của $T(n)$ với $n = t_0$, nghĩa là xét $T(t_0)$ có đúng hay không?

b. Quy nạp.

Giả sử khẳng định $T(n)$ đã đúng đối với $n = t$ (hoặc đối với mọi n $(t_0 \leqslant n \leqslant t)$ $(t \geqslant t_0)$. Trên cơ sở giả thiết này mà suy ra tính đúng đắn của $T(n)$ đối với $n = t + 1$, tức $T(t + 1)$ đúng. Nếu cả hai bước trên đều thoả mãn, thì theo nguyên lý quy nạp, $T(n)$ đúng với mọi $n \geqslant t_0$.

Chú ý. Trong quảá trình quy nạp nếu không thực hiện đầy đủ cả hai bước cơ sở quy nạp và quy nạp, thì có thể dẫn đến kết luận sai lầm, chẳng hạn:

- Do bỏ bước cơ sở quy nạp, ta đưa ra kết luận không đúng: Mọi số tự nhiên đều bằng nhau! Bằng cách quy nạp như sau: giả sử các số tự nhiên không vượt quảá $k + 1$ đã bằng nhau. Khi đó ta có $k = k + 1$.

Thêm vào mỗi vế của đẳng thức trên một đơn vị sẽ có

$$k + 1 = k + 1 + 1 = k + 2$$

Cứ như vậy suy ra mọi số tự nhiên không nhỏ hơn k đều bằng nhau. Kết hợp với giả thiết quy nạp: mọi số tự nhiên không vượt quảá k đều bằng nhau, đi đến kết luận sai lầm: Tất cả các số tự nhiên đều bằng nhau!

- Do bỏ qua khâu quy nạp, nên nhà Toán học Pháp P. Fermat (1601 - 1665) đã cho rằng các số dạng $2^{2^n} + 1$ đều là số nguyên tố. P. Fermat xét 5 số đầu tiên

Với $n = 0$ cho $2^{2^n} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ là số nguyên tố.

Với $n = 1$ cho $2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ là số nguyên tố.

Với $n = 2$ cho $2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ là số nguyên tố.

Với $n = 3$ cho $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ là số nguyên tố.

Với $n = 4$ cho $2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$ là số nguyên tố.

Nhưng vào thế kỷ 18 Euler đã phát hiện với $n = 5$ khẳng định trên không đúng bởi vì

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

là hợp số.

6.7.3 Vận dụng phương pháp quy nạp để giải các bài toán chia hết

Phương pháp quy nạp được sử dụng trong tính toán, trong chứng minh và suy luận dưới nhiều dạng khác nhau, nhưng trong phần này chỉ trình bày việc vận dụng phương pháp quy nạp để giải các bài toán chia hết.

Ví dụ 11. Với n là số tự nhiên, đặt

$$A_n = 7^{7^{\cdot^{\cdot^{7}}}}\Big\}\, n \text{ lần}$$

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geqslant 2$ số $A_n + 17$ chia hết cho 20?

Giải.

Để có khẳng định phát biểu trong bài toán trước hết ta chứng minh: Với mọi số tự nhiên $n \geqslant 2$ đều có

$$A_n = 20t_n + 3 \tag{1}$$

Khẳng định (1) được chứng minh bằng quy nạp theo n.

1. Cơ sở quy nạp.

Với $n = 2$ có $A_2 = 7^7 = 7^4.7^3$, mà

$$7^3 = 343 = 20.17 + 3 = 20.p + 3 \tag{2}$$
$$7^4 = 2401 = 20.120 + 1 = 20.q + 1, \tag{3}$$

Nên

$$\begin{aligned} A_2 &= (20.17 + 3)(20.120 + 1) \\ &= 20.20.17.120 + 20.17 + 20.120.3 + 3 \\ &= 20.41177 + 3 \end{aligned}$$

2. Quy nạp

Giả sử đẳng thức (1) đã đúng với $n = k \geqslant 2$, tức đã có

$$A_k = 20t_k + 3 \tag{4}$$

Cần chứng minh đẳng thức (1) đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, theo định nghĩa, và (2), (3), (4) có

$$\begin{aligned}A_{k+1}7^{A_k} &= 7^{20t_k+3} = 7^{4.5t_k+3} = (7^4)^{5t_k}.7^3 = (20q+1)^{5t_k}(20p+3)\\ &= \{(20q)^{5t_k} + C^1_{5t_k}(20q)^{5t_k-1} + \cdots + C^{5t_k-1}_{5t_k}.20q + 1\}(20p+3)\\ &= 20p\{(20)^{5t_k} + C^1_{5t_k}(20q)^{5t_k-1} + \cdots + C^{5t_k-1}_{5t_k}.20q + 1\}+\\ &20q\{(20q)^{5t_k-1} + C^1_{5t_k}(20q)^{5t_k-2} + \cdots + C^{5t_k-1}_{5t_k}\}3 + 3 = 20t_{k+1} + 3\end{aligned}$$

Từ (1) có:

$$A_n + 17 = 20t_n + 3 + 17 = 20t_n + 20 = 20(t_n + 1)$$

nên $A_n + 17$ chia hết cho 20.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geqslant 2$ số

$$2^{2^n} + 4$$

chia hết cho 10 (hay tận cùng bằng số 0)?

Giải. Chứng minh bằng quy nạp theo n.

1. Cơ sở quy nạp.

Với $n = 2$ có $2^{2^2} = 2^4 + 4 = 16 + 4 = 20$ chia hết cho 10.

2. Quy nạp.

Giả sử khẳng định đã đúng với $n = k \geqslant 2$, nghĩa là

$$2^{2^k} + 4 = 10t_k \tag{1}$$

Cần chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, từ (1) có

$$\begin{aligned}2^{2^{k+1}} + 4 &= (3^{2^k})^2 + 4\\ &= (10t_k - 4)^2 + 4\\ &= (10t_k)^2 - 8.10t_k + 16 + 4\\ &= 10(10t_k^2 - 8t_k + 2)\end{aligned}$$

nên số $2^{2^{k+1}} + 4$ chia hết cho 10.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n

$$A(n) = 4^n + 15n - 1$$

chia hết cho 9.

Giải. Chứng minh bằng quy nạp theo n.

1. Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$, $A(1) = 4^1 + 15.1 - 1 = 18$ chia hết cho 9.

2. Quy nạp.

Giả sử khẳng định đã đúng với số tự nhiên $n = k \geqslant 1$, nghĩa là,

$$A(k) = 4^k + 15k - 1$$

đã chia hết cho 9.

Cần chứng minh khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned} A(k+1) &= 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \\ &= 4.4^k + 15k + 14 \\ & 4.4^k + 4.15k + 14 + 3.15k - 4 + 4 - 3.15k \\ &= 4.4^k + 4.15k - 4 + 3.15k + 18 \\ &= 4(4^k + 15k - 1) + 9(5k + 2) \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp $4^k + 15k - 1$ chia hết cho 9, nên $4(4^k + 15k - 1)$ chia hết cho 9 và $9(5k + 2)$ chia hết cho 9. Bởi vậy $A(k + 1)$ chia hết cho 9.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng chia hết cho 9.

Giải. Chứng minh bằng quy nạp theo thứ tự số tự nhiên.

1. Cơ sở quy nạp.

Với ba số tự nhiên đầu tiên $1, 2, 3$ ta có

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

chia hết cho 9.

2. Quy nạp.

Giả sử khẳng định đã đúng với ba số tự nhiên liên tiếp tùy ý nào đó $k (k \geqslant 1)$, $k + 1$, $k + 2$, nghĩa là số

$$A(k) = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$$

đã chia hết cho 9. Khi đó

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 - k^3$$

Do

$$\begin{aligned}(k+3)^3 - k^3 &= (k+3-k)\{(k+3)^2 + k(k+3) + k^2\} \\ &= 3\{k^2 + 6k + 9 + k^2 + 3k + k^2\} \\ &= 3\{3k^2 + 9k + 9\} \\ &= 9(k^2 + 3k + 3)\end{aligned}$$

chia hết cho 9, và theo giả thiết quy nạp $A(k) \vdots 9$, nên $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ chia hết cho 9. Khẳng định được chứng minh.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ số $2^{3^n} + 1$ chia hết cho 3^{n+1} và không chia hết cho 3^{n+2}.

Giải. Khẳng định được chứng minh bằng quy nạp theo n.

1. Cơ sở quy nạp

Với $n = 0$ số $2^{3^0} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$ chia hết cho 3 ($3 = 3^{0+1}$) và không chia hết cho 9 ($9 = 3^2 = 3^{0+2}$).

Với $n = 1$ số $2^{3^1} + 1 = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$ chia hết cho 9.

2. Quy nạp

Giả sử khẳng định đã đúng với $n = k \geqslant 2$, nghĩa là

$$A_k = 2^{3^k} + 1$$

đã chia hết cho 3^{k+1} và không chia hết cho 3^{k+2}. Khi đó tồn tại số nguyên M, để

$$A_k = M.3^{k+1}$$

và do A_k không chia hết cho 3^{k+2}, nên M không chia hết cho 3.

Cần chứng minh $A_{k+1} = 2^{3^{k+1}} + 1$ chia hết cho 3^{k+2} và không chia hết cho 3^{k+3}.

Thật vậy, do

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 2^{3^{k+1}} + 1 = 2^{3^{k}.2} + 1 = (2^{3^k})^2 + 1 \\ &= (2^{3^k} + 1)\{(2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1\} \\ &= 3^{k+1}.M\{(2^{3^k})^2 + 2.2^{3^k} + 1 - 3.2^{3^k}\} \\ &= 3^{k+1}.M.\{(2^{3^k} + 1)^2 - 3.2^{3^k}\} \\ &= 3^{k+1}.M.\{(2^{3^k}.M)^2 - 3.2^{3^k}\} \\ &= 3^{k+1}M\{3^{2k+2}M^2 - 3.2^{3^k}\} \\ &= 3^{k+2}.M.\{3^{2k+1}.M^2 - 2^{3^k}\} \end{aligned}$$

nên A_{k+1} chia hết cho 3^{k+2}.

Vì M không chia hết cho 3, nên $3^{k+2}.M$ không chia hết cho 3^{k+3}.

Do $k \geqslant 2$, nên $k - 2 \geqslant 0$, và có

$$3^{2k+1}.M = 3^{k+3+k-2}.M = 3^{k+3}.3^{k-2}.M$$

chia hết cho 3^{k+3}.

Mặt khác $2^{3^k} = (2^3)^k = 8^k \equiv \pm 1 \pmod 9$ và $3^{k+3} = 9.3^{k+1}$, nên 2^{3^k} không chia hết cho 3^{k+3}.

Do $3^{2k+1}.M^2 - 2^{3^k}$ không chia hết cho 3^{k+3}. Bởi vậy A_{k+1} không chia hết cho 3^{k+2}. Khẳng định được chứng minh.

Bài tập

23 Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geqslant 0$
a) $(2^{5n+3} + 5^n.3^{n+2})$ chia hết cho 17
b) $(2^{n+5}.3^{4n} + 5^{3n+1})$ chia hết cho 37
c) $(5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1})$ chia hết cho 23
d) $(7^{n+2} + 8^{2n+1})$ chia hết cho 57

24 Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n tổng

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{5n-3} + 2^{5n-2} + 2^{5n-1}$$

chia hết cho 31?

25 Giả sử a là số tự nhiên nào đó, mà $2^a - 2$ chia hết cho a, chẳng hạn $a = 3$ có $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ chia hết cho 3. Xác định dãy số (x_n) nhờ các điều kiện sau

$$x_1 = a, \;\; x_{k+1} = 2^{x_k} - 1$$

Chứng minh rằng với mọi só tự nhiên k số $2^{x_k} - 2$ chia hết cho x_k?

6.8 Tiêu chuẩn chia hết

Đối với số nguyên tuỳ ý a và số tự nhiên bất kỳ m để trả lời câu hỏi: a có chia hết cho m không? Trong rất nhiều trường hợp có thể dựa vào tiêu chuẩn chia hết. Bởi vậy việc tìm ra các tiêu chuẩn chia hết dễ vận dụng là hết sức cần thiết. Căn cứ vào tính chất của dãy số dư nhận được khi chia lũy thừa cơ số 10 cho m, mà có thể xác định các tiêu chuẩn chia hết tiện ích khác nhau. Trong phần này trình bày một số cách xác định tiêu chuẩn chia hết, như

Phương pháp sử dụng tính đồng dư với 1 của lũy thừa cơ số 10, mà gọi tắt là "phương pháp đồng dư với 1".

Phương pháp dựa vào dãy số dư của lũy thừa cơ số 10, mà gọi tắt là "phương pháp dãy số dư".

Phương pháp chia các chữ số thành các nhóm, mà gọi tắt là "phương pháp nhóm chữ số".

6.8.1 Phương pháp đồng dư với 1

Với số tự nhiên tuỳ ý $m \geqslant 2$ cần tìm tiêu chuẩn, để số nguyên bất kỳ

$$\begin{aligned} a &= \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_i a_{i-1} \ldots . a_1 a_0} \\ &= a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_i 10^i + a_{i-1} 10^{i-1} + \cdots + a_i 10 + a_0 \end{aligned}$$

chia hết cho m.

Nếu tồn tại số tự nhiên k, để $10^k \equiv 1 \pmod{m}$ thì với mọi số tự nhiên t đều có $10^{kt} \equiv 1 \pmod{m}$. Ta thực hiện thuật toán sau

Thuật toán.

1. Tìm số tự nhiên l nhỏ nhất, để $10^l \equiv 1 \pmod{m}$.
2. Chia dãy chữ số của a từ phi sang trái theo các nhóm liên tiếp độ dài l. Khi đó với số tự nhiên s, mà $sl < n \leqslant (s+1)l$ có

$$\begin{aligned} a &= \overline{a_n a_{sl+1} a_{sl}} 10^{sl} + \cdots + \overline{a_{2l-1} \ldots a_{l+1} a_l} 10^l + \overline{a_{l-1} \ldots a_1 a_0} \\ &\equiv \overline{a_n a_{sl+1} a_{sl}} + \cdots + \overline{a_{2l-1} \ldots a_{l+1} a_l} + \overline{a_{l-1} \ldots a_1 a_0} \pmod{m} \end{aligned}$$

Bởi vậy ta có tiêu chuẩn chia hết sau đây.

Tiêu chuẩn chia hết 1

Nếu l là số tự nhiên nhỏ nhất để $a^l \equiv 1 \pmod m$ và s là số tự nhiên để $sl < n \leqslant (s+1)l$, thì a chia hết cho m khi và chỉ khi tổng

$$\overline{a_n a_{sl+1} a_{sl}} + \cdots + \overline{a_{2l-1} ... a_{l+1} a_l} + \overline{a_{l-1} ... a_1 a_0}$$

chia hết cho m.

Vận dụng tiêu chuẩn chia hết 1 cho các trường hợp $m = 3, 9, 11, 111$ ta được các tiêu chuẩn chia hết tưng ứng sau đây.

1. Với $m = 3$, ta có $10 \equiv 1 \pmod 3$, nên $l = 1$ và dãy chữ số a được chia thành các nhóm gồm một chữ số và ta có tiêu chuẩn chia hết cho 3 như sau

Số nguyên $a = \overline{a_n a_{n-1} a_1 a_0}$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ chia hết cho 3.

Tương tự ta cũng có tiêu chuẩn chia hết cho 9 như sau:

Số nguyên $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi tổng

$$a_n + a_{n-1} + \cdots +_a 1 + a_0$$

chia hết cho 9.

Ví dụ.

$$23456781 \equiv 2+3+4+5+6+7+8+1 \equiv 0 \pmod 3 \text{ nên } 23456781 \vdots 3.$$

$$54326781 \equiv 5+4+3+2+6+7+8+1 \equiv 0 \pmod 9, \text{ nên } 54326781 \vdots 9$$

$$4354063 = 4+3+5+4+0+6+3 = 25 \equiv 1 \pmod 3$$

nên 4354063 không chia hết cho 3.

$$1997199819991 = 1+9+9+7+1+9+9+8+1+9+9+9+1 = 82 \equiv 1 \pmod 9$$

nên 1997199819991 không chia hết cho 9.

2. Với $m = 11$ ta có $10^2 \equiv 1 \pmod 1)1$, nên $l = 2$ và dãy chữ số của a được phân thành các nhóm độ dài 2 từ phải sang trái và ta có tiêu chuẩn chia hết cho 11 như sau

Với n lẻ số nguyên $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi tổng

$$\overline{a_n a_{n-1}} + \overline{a_{n-2} a_{n-3}} + \cdots + \overline{a_1 a_0}$$

chia hết cho 11.

Với n chẵn số nguyên $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi tổng

$$a_n + \overline{a_{n-1} a_{n-2}} + \cdots + \overline{a_1 a_0}$$

chia hết cho 11.

Ví dụ.

$$719981999 \equiv 7 + 19 + 98 + 19 + 99 = 242 \equiv 0 \pmod 11$$

nên 719981999 chia hết cho 11.

$$53467874 \equiv 53 + 46 + 78 + 74 = 251 \equiv 8 \pmod 11$$

nên 53467874 không chia hết cho 11.

3. Với $m = 111$ ta có $10^3 \equiv 1 \pmod{111}$, nên $l = 3$ và dãy chữ số của a được phân thành các nhóm độ dài 3 từ phi sang trái và ta có tiêu chuẩn chia hết cho 11 như sau

- Với $n = 3t$ (t là số tự nhiên) số nguyên $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi tổng

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}} + \overline{a_{n-3} a_{n-4} a_{n-5}} + \cdots + \overline{a_2 a_1 a_0}$$

chia hết cho 111.

- Với $n = 3t + 1$ số nguyên $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ chia hết cho 111 khi và chỉ khi tổng

$$a_n + \overline{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3}} + \cdots + \overline{a_2 a_1 a_0}$$

chia hết cho 111.

- Với $n = 3t + 2$ số nguyên $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ chia hết cho 111 khi và chỉ khi tổng

$$\overline{a_n a_{n-1}} + \overline{a_{n-2} a_{n-3} a_{n-4}} + \cdots + \overline{a_2 a_1 a_0}$$

chia hết cho 111.

Ví dụ.

$$582004080 = 582 + 004 + 080 = 582 + 4 + 80 = 666 \equiv 0 \pmod{111}$$

nên 582004080 chia hết cho 111.

$$6573864 = 6 + 573 + 864 = 1443 \equiv 0 \pmod{111}$$

nên 6573864 chia hết cho 111.

$$13661325 \equiv 13 + 661 + 325 = 999 \equiv 0 \pmod{111}$$

nên 13661325 chia hết cho 111.

$$154635811 \equiv 154 + 63 = 1600 \equiv 35 \pmod{111}$$

nên 15463811 chia hết cho 111.

6.8.2 Phương pháp dãy số dư

Giả sử

$$a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_i . a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_i 10_i + \cdots a_1 10 + a_0$$

là số nguyên tùy ý và m là số tự nhiên bất kỳ không nhỏ hơn 2. Khi đó, theo các tính chất của phép đồng dư, ta có hệ quả: Nếu $d_i \, (i = 0, 1, 2)$ là số nguyên tùy ý đồng dư với 10^i theo modun m, thì

$$a \equiv a_n d_n + a_{n-1} d_{n-1} + \cdots + a_i d_i + \cdots + a_1 d_1 + a_0 \pmod m$$

Từ hệ quả trên suy ra thuật toán xây dựng tiêu chuẩn chia hết cho m.

Thuật toán.

Để có một tiêu chuẩn chia hết cho m ta thực hiện các bước sau

1. Đối với mỗi $i = 1, 2$ chọn số nguyên d_i đồng dư với 10^i theo modun m và có trị tuyệt đối ($|d_i|$) nhỏ nhất;

2. Viết dãy số đồng dư d_i ($i = 1, 2.$) một cách tương ứng dưới dãy chữ số của a;

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & ...a_{i+1} & a_i ... & a_1 & a_0 \\ d_n & d_{n-1} & ... \; d_{i+1} & d_i ... & d_i 1 & \end{array}$$

3. Tìm tổng

$$d = a_n d_n + a_{n-1} d_{n-1} + a_{i+1} d_{i+1} + a_i d_i + \cdots + a_1 d_1 + a_0$$

4. Xét tổng d

   - Nếu $d \equiv 0 \pmod m$, thì a chia hết cho m

   - Nếu $d \equiv 0 \pmod m$, thì a không chia hết cho m.

   Khi đó tiêu chuẩn chia hết cho m được phát biểu như sau: Số a chia hết m khi và chỉ khi d chia hết cho m.

Dựa vào thuật toán trên ta có thể xây dựng tiêu chuẩn chia hết cho bất kỳ số tự nhiên $m \geqslant 2$, chẳng hạn, $m = 4, 7, 11, 13$.

1. Tiêu chuẩn chia hết cho 4

Xét tính đồng dư của lũy thừa cơ số 10 theo modun 4 ta có

$$10 \equiv 2 \pmod 4,\ 10^2 \equiv 20 \equiv 0 \pmod 4,\ 10^i \equiv 0 \pmod 4\ (i = 3, 4...)$$

Tổng d tưng ứng với số $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_{i+1} a_i ... a_2 a_1 a_0}$ có dạng

$$d = a_n 0 + a_{n-1} 0 + \cdots + a_{i+1} 0 + a_i 0 + \cdots + a_2 0 + a_1 2 + a_0 = 2a_1 + a_0$$

Vậy tiêu chuẩn chia hết cho 4 là: Số a chia hết cho 4 khi và chỉ khi tổng $d = 2a_1 + a_0$ chia hết cho 4.

Ví dụ.

453452 có $d = 2 \times 5 + 2 = 12$ chia hết cho 4, nên $453452 \vdots 4$,

582422 có $d = 2 \times 2 + 2 = 6$ không chia hết cho 4, nên 582422 không chia hết cho 4.

2. Tiêu chuẩn chia hết cho 7

Xét tính đồng dư của lũy thừa cơ số 10 theo modun 7 ta có

$$10 \equiv 3 \pmod 7,\ 10^2 \equiv 30 \equiv 2 \pmod 7,\ 10^3 \equiv 20 \equiv -1 \pmod 7$$
$$10^4 \equiv -10 \equiv -3 \pmod 7,\ 10^5 \equiv -30 \equiv -2 \pmod 7,\ 10^6 \equiv -20 \equiv 1 \pmod 7 ...$$

Giả sử $n = 6t + 1$ với $t \geqslant 2$. Khi đó dãy số đồng dư tương ứng với dãy chữ số của a sẽ là

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} ... & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & -2 & -3 & -1 ... & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Và tổng d tương ứng với a có dạng

$$d = a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3} + \cdots + a_6 - 2a_5 - 3a_4 - a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0$$

Vậy tiêu chuẩn chia hết cho 7 là: Số $a \vdots 7$ khi và chỉ khi tổng

$$d = a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3} + \cdots + a_6 - 2a_5 - 3a_4 - a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0$$

chia hết cho 7,

7546357 có $d = 7 - 2 \times 5 - 3 \times 4 - 6 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 7 = 7$ chia hết cho 7, nên $7546357 \vdots 7$.

863425 có

$$d = -2 \times 8 - 3 \times 6 - 3 + 2 \times 4 + 2 \times 3 + 5 = -16 - 18 - 3 + 8 + 6 + 5 = -8$$

không chia hết cho 7, nên 863425 không chia hết cho 7.

3. Tiêu chuẩn chia hết cho 11

Xét tính đồng dư của lũy thừa cơ số 10 theo mod 11, ta có

$$10 \equiv -1 \pmod{11},\ 10^2 \equiv -10 \equiv 1 \pmod{11},$$
$$10^{2k+1} \equiv -1 \pmod{11},\ 10^{2k} \equiv 1 \pmod{11}$$

Với $k = 0, 1, 2, ...$ khi đó dãy đồng dư tương ứng với dãy chữ số của a sẽ là

$$\begin{array}{l} a_n,\quad a_{n-1},\quad a_{n-2},\quad a_2\ a_1\ a_0 \\ (-1)^n(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}...1\ -1\,1 \end{array}$$

Và tổng d tương ứng với a có dạng

$$d(-1)^n a_n + (-1)^{n-1}a_{n-1} + (-1)^{n-2}a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$$

Vậy tiêu chuẩn chia hết cho 11 là: Số $a \vdots 11$ khi và chỉ khi

$$d = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1}a_{n-1} + (-1)^{n-2}a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$$

chia hết cho 11.

Ví dụ.
3811581939 có $d = -3+8-1-5+8-1+9-3+9 = 22$ chia hết cho 11, nên $3811581939 \vdots 11$

256743258 có $d = 2-5+6-7+4-3+2-5+8 = 2$ không chia hết cho 11, nên 256743258 không chia hết cho 11.

4. Tiêu chuẩn chia hết cho 13

Xét tính đồng dư của lũy thừa cơ số 10 theo modun 13 ta có
$10 \equiv -3 \pmod{13}$, $10^2 \equiv -4 \pmod{13}$, $10^3 \equiv -40 \equiv -1 \pmod{13}$, $10^4 \equiv -10 \equiv 3 \pmod{13}$, $10^5 \equiv 30 \equiv 4 \pmod{13}$, $10^6 \equiv 40 \equiv 1 \pmod{13}$, $10^7 \equiv 10 \equiv -3 \pmod{13}$

Giả sử $n = 6t$ với $t \geqslant 2$. Khi đó dãy số đồng dư tương ứng với dãy chữ số của a là

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & a_{n-5} & ... & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 & -3 & 1 & 4 & 3 & -1 & -4 & -3 & 1 & \end{array}$$

và tổng d tương ứng với a có dạng

$$d = a_n + 4a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} - 4a_{n-4} - 3a_{n-5} + \cdots$$
$$+ a_6 + 4a_5 + 3a_4 - a_3 - 4a_2 - 3a_1 + a_0$$

Vậy tiêu chuẩn chia hết cho 13 là: Số a chia hết cho 13 khi và chỉ khi tổng

$$\begin{aligned} d = a_n + 4a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} - 4a_{n-4} - 3a_{n-5} + \cdots \\ + a_6 + 4a_5 + 3a_4 - a_3 - 4a_2 - 3a_1 + a_0 \end{aligned}$$

chia hết cho 13.

Ví dụ.

8588112 có $d = 8 + 20 + 24 - 8 - 4 - 3 + 2 = 39$ chia hết cho 13, nên 8588112 chia hết cho 13.

1111111 có $d = 1 + 4 + 3 - 1 - 4 - 3 + 1 = 1$ không chia hết cho 13, nên 1111111 không chia hết cho 13.

6.8.3 Phương pháp nhóm chữ số

Giả sử $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_i ... a_1 a_0}$ là số nguyên tùy ý, còn m là số tự nhiên bất kỳ không nhỏ hơn 2. Với số tự nhiên l tuỳ ý không nhỏ hơn 2. Giả sử d_i là số nguyên đồng dư với 10^{il} $(i = 0, 1, 2,)$ theo modun m và có trị tuyệt đối nhỏ nhất. Khi đó nhờ các tính chất của phép đồng dư ta có hệ quả sau:
Số

$$\begin{aligned} a &= \overline{a_n a_{n-1} ... a_{tl} a_{tl-1} a_{tl-2} ... a_{(t-1)l} ... a_l a_{l-1} ... a_1 a_0} \\ &= \overline{a_n a_{n-1} ... a_{tl} d_t}.10^{tl} + \overline{a_{tl-1} a_{tl-2} ... a_{(t-1)l}} 10^{(t-1)l} + \\ &\quad \cdots + \overline{a_{2l-1} a_{2l-2} ... a_l} 10^l + \overline{a_{l-1} a_{l-2} ... a_1 a_0} \\ &\equiv \overline{a_n a_{n-1} ... a_{tl}} d_t + \overline{a_{tl-1} a_{tl-2} ... a_{(t-1)l}} d_{t-l} + \cdots \\ &\quad + \overline{a_{2l-1} a_{2l-2} ... a_l} d_1 + \overline{a_{l-1} a_{l-2} ... a_l a_0} \pmod m \end{aligned}$$

Dựa vào hệ quả trên có thuật toán xây dựng tiêu chuẩn chia hết cho m như sau

Thuật toán.

1. Chọn số tự nhiên bé nhất có thể $l \geqslant 2$ thích hợp với m theo nghĩa: Số d_i đồng dư với 10^{il} theo modun m có trị tuyệt đối bé nhất.
2. Liệt kê dãy các số đồng dư tương ứng với dãy 10^{il} $(i = 1, 2,)$

$$\begin{array}{llllllll} 10^{tl} & 10^{(t-1)l} & ... & 10^{il} & ... & 10^{2l} & 10^l & 10^0 \\ d_0 & d_{t-1} & ... & d_i & ... & d_2 & d_1 & 1 \end{array}$$

3. Lập tổng

$$d = \overline{a_n a_{n-1}...a_{tl}}d_t + \overline{a_{tl-1}a_{tl-2}...a_{(t-1)l}}d_{t-1} + \cdots \\ + \overline{a_{2l-1}a_{2l-2}...a_{l+1}a_1}d_1 + \overline{a_{l-1}a_{l-2}...a_1a_0}.$$

4. Nếu d chia hết cho m, thì a chia hết cho m. Nếu d không chia hết cho m, thì a không chia hết cho m. Bằng thuật toán trên ta có tiêu chuẩn chia hết cho m bằng phương pháp nhóm chữ số như sau: Số a chia hết cho m khi và chỉ khi tổng

$$d = \overline{a_n a_{n-1}...a_{tl}}d_t + \overline{a_{tl-1}a_{tl-2}...a_{(t-1)l}}d_{t-1} + \cdots \\ + \overline{a_{2l-1}a_{2l-2}...a_{l+1}a_1}d_1 + \overline{a_{l-1}a_{l-2}...a_1a_0}.$$

chia hết cho m.

Dựa vào thuật toán trên ta có thể xây dựng tiêu chuẩn chia hết cho bất kỳ số tự nhiên m nào không nhỏ hơn 2, chẳng hạn $m = 7, 33$.

Tiêu chuẩn chia hết cho 7

Để có tiêu chuẩn chia hết cho 7 ta thực hiện các bước của thuật toán trên như sau

1. Do $1000 \equiv -1 \pmod 7$, $1000^2 \equiv 1 \pmod 7$, $1000^{2i} \equiv 1 \pmod 7$, $1000^{2i+l} \equiv -1 \pmod 7$ $i = 0, 1, 2$, nên chọn $l = 3$.
2. Dãy số đồng dư tương ứng với 1000^k, $k = 0, 1, 2$,

$$\begin{array}{llllll} 1000^t & 1000^{t-1} & ... & 1000^2 & 1000 & 1 \\ (-1)^t & (-1)^{t-1} & ... & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

3. Tổng d tương ứng với số a có dạng

$$d \;=\; (-1)^t\overline{a_na_{n-1}a_{3t}} \;+\; (-1)^{t-1}\overline{a_{3t-1}a_{3t-2}a_{3(t-1)}} \;+\; \cdots \;-\; \overline{a_5a_4a_3} \;+\; \overline{a_2a_1a_0}$$

Khi đó tiêu chuẩn chia hết cho 7 được phát biểu như sau: Số a chia hết cho 7 khi và chỉ khi tổng d chia hết cho 7.

Ví dụ.

5781139 có $d = 5 - 781 + 139 = 637$ chia hết cho 7, nên 5781139 chia hết cho 7
811582 có $d = -811 + 582 = 229$ không chia hết cho 7, nên 811582 không chia hết cho 7.

Tiêu chuẩn chia hết cho 33

Để có tiêu chuẩn chia hết cho 33 ta thực hiện các bước của thuật toán trên như sau

1. Do $100 \equiv 1 \pmod{33}$, nên với mọi $s = 0, 1, 2...$ đều có $100^s \equiv 1 \pmod{33}$ nên chọn $l = 2$.

2. Dãy số đồng dư tương ứng với 100^k, $k = 0, 1, 2$

$$\begin{array}{llllll} 100^t & 100^{t-1} & ... & 100^2 & 100 & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

3. Tổng d tương ứng với số a có dạng

$$d = \overline{a_n a_{n-1}} + \overline{a_{n-2} a_{n-3}} + \cdots + \overline{a_3 a_2} + \overline{a_1 a_0}, \text{ nếu } n \text{ lẻ}$$
$$d = a_n + \overline{a_{n-1} a_{n-2}} + \cdots + \overline{a_3 a_2} + \overline{a_1 a_0}, \text{ nếu } n \text{ chẵn.}$$

Khi đó tiêu chuẩn chia hết cho 33 được phát biểu như sau: Số a chia hết cho 33 khi và chỉ khi d chia hết cho 33.

Ví dụ.

6021939 có $d = 6 + 02 + 19 + 39 = 66$ chia hết cho 33, nên 6021939 chia hết cho 33. 524631 có $d = 52 + 46 + 31 = 129$ không chia hết cho 33, nên 524531 không chia hết cho 33.

Chương 7

Biểu diễn toạ độ của các phép biến hình phẳng

Lời mở đầu

Trong chương trình phổ thông, theo truyền thống, các phép biến hình được trình bày theo ngôn ngữ hình học hoặc vectơ. Cách tiếp cận vấn đề như vậy tuy ngắn gọn nhưng không cho học sinh thấy rõ mối liên hệ giữa hình học và giải tích, không áp dụng được các phép biến hình giải các bài toán giải tích và không thấy rõ được mối liên hệ chung của những phép biến hình được học. Hơn thế nữa, nhiều tính chất của các phép biến hình mà trong SGK bỏ qua hoặc không chứng minh lại có thể được chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng biểu diễn toạ độ của phép biến hình. Vì vậy, trong tài liệu này đưa ra một cách trình bày lý thuyết các phép biến hình theo ngôn ngữ toạ độ[1].

7.1 Các khái niệm

7.1.1 Các khái niệm đã biết

Những khái niệm sau được coi là đã biết và không được trình bày ở đây:

1. Mặt phẳng toạ độ, toạ độ của vectơ và toạ độ của điểm. Các phép toán đối với vectơ thông qua toạ độ. Tích vô hướng của hai vectơ. Độ dài vectơ và khoảng cách giữa hai điểm . Góc lượng giác giữa hai vectơ (ta lấy góc $\in (-\pi; \pi]$). Điều kiện cộng tuyến, vuông góc giữa hai vectơ.

2. Đường và phương trình của đường trên mặt phẳng toạ độ. Các loại phương trình đường thẳng trên mặt phẳng toạ độ. Điều kiện song song, vuông góc giữa hai đường thẳng. Các công thức tính khoảng cách, góc. Chùm đường thẳng.

3. Phương trình đường tròn. Điều kiện để đường tròn tiếp xúc với đường thẳng, với đường tròn. Trục đẳng phương và phương trình của nó. Chùm đường tròn.

[1]Ths. Nguyễn văn Tiến, THPT Chuyên Bắc Giang

4. Phương trình chính tắc của Elip, Hyperbol và Parabol.
5. Hệ phương trình hai ẩn (hệ tuyến tính và hệ phương trình bậc hai hai ẩn). Định thức cấp hai và cấp ba.

7.1.2 Các khái niệm bổ sung

1.

Định nghĩa 1. *1 Cho hai vectơ $\vec{u}(x;y)$; $\vec{v}(x';y')$. Tích ngoài của chúng là một số thực được ký hiệu là $<\vec{u},\vec{v}>$ hoặc $\vec{u}\wedge\vec{v}$ và được xác định như sau:*

$$<\vec{u},\vec{v}>=\vec{u}\wedge\vec{v}:=xy'-x'y.$$

2. **Một số tính chất** *Tích ngoài của hai vectơ có một số tính chất quan trọng sau:*

1. $\forall\vec{u},\ \forall\vec{v}\ :\ \vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}.$
2. $\forall\vec{u},\ \forall\vec{v}\ :\ (\vec{u}\wedge\vec{v})^2+(\vec{u}.\vec{v})^2=|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2$. *Hệ thức trên còn được gọi là hệ thức Jacobi.*
3. *+) Nếu $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$ thì $\vec{u}\wedge\vec{v}=0$. +) Nếu $\vec{u}\neq\vec{0}$ & $\vec{v}\neq\vec{0}$ thì*

   $$\vec{u}\wedge\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.sin(\vec{u},\vec{v}).$$

   Trong công thức trên $(\vec{u},\vec{v})$ là số đo góc lượng giác (góc định hướng) giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$. Nhớ rằng $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})$.
4. $\forall\vec{u},\ \forall\vec{v},\ \forall\vec{w}\ :\ \vec{u}\wedge(\vec{v}\pm\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}\pm\vec{u}\wedge\vec{w}.$
5. *Với mọi vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ và với mọi số $k,\ l\in\mathbb{R}$, ta luôn có: i) $<k\vec{u},\vec{v}>=k<\vec{u},\vec{v}>=<\vec{u},k\vec{v}>$. ii) $<-\vec{u},\vec{v}>=-<\vec{u},\vec{v}>=<\vec{u},-\vec{v}>$. iii) $<k\vec{u},l\vec{v}>=kl<\vec{u},\vec{v}>$. iiii) $<\vec{u}\pm\vec{v},\vec{w}>=<\vec{u},\vec{w}>\pm<\vec{v},\vec{w}>$.*
6. *+) $\vec{u}\parallel\vec{v}\Leftrightarrow<\vec{u},\vec{v}>=0$. +) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow|<\vec{u},\vec{v}>|=|\vec{u}|.|\vec{v}|$. +) Đặc biệt. $<\vec{u},\vec{u}>=0$.*
7. *Gọi $[\vec{u}]$ là vectơ thoả mãn $(\vec{u},[\vec{u}])=90^o$. khi đó, $<\vec{u},\vec{v}>=[\vec{u}].\vec{v}$.*
8. *Gọi $[ABC]$ là diện tích định hướng của tam giác ABC. ($[ABC]$ là một số thực có trị tuyệt đối bằng diện tích tam giác ABC và mang dấu dương khi $(\Longrightarrow AB,\Longrightarrow AC)>0$; mang dấu âm khi $(\Longrightarrow AB,\Longrightarrow AC)<0$). Khi đó: $[ABC]=\dfrac{1}{2}<\Longrightarrow AB,\Longrightarrow AC>$.*
9. *Diện tích định hướng của hình bình hành dựng trên hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ là $<\vec{u},\vec{v}>$.*
10. *Cho tam giác ABC với $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $C(x_C;y_C)$. Ta có*

    $$[ABC]=\frac{1}{2}\left((x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\right)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}.$$

Các loại hệ toạ độ trên mặt phẳng

1. Hệ toạ độ affin.

Định nghĩa 2. *1 Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cộng tuyến (thường được đặt chung gốc O) lập thành một hệ cơ sở affin trên mặt phẳng chứa hai vectơ đó. Mặt phẳng được trang bị hệ cơ sở affin $\{O,\ \vec{a},\ \vec{b}\}$ như vậy được gọi là mặt phẳng affin $\{O,\ \vec{a},\ \vec{b}\}$.*

Định nghĩa 3. *2 Hệ cơ sở affin $\{O,\ \vec{a},\ \vec{b}\}$ được gọi là trực giao nếu $\vec{a}\perp\vec{b}$, được gọi là chuẩn nếu $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và được gọi là trực chuẩn nếu nó vừa trực giao vừa chuẩn.*

Định lí 5. *Cho hệ toạ độ trực chuẩn Oxy. Hai vectơ $\vec{a}(x;y)$ và $\vec{b}(x';y')$ lập thành hệ cơ sở affin trên mặt phẳng đó khi và chỉ khi $xy' - yx' \neq 0$.*

Định lí 6. *Trên mặt phẳng affin $\{O,\ \vec{a},\ \vec{b}\}$ $(*)$ cho vectơ $\vec{u}$ bất kỳ, khi đó tồn tại duy nhất cặp số $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho*

$$\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Cặp số $(x;y)$ như vậy được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{u}$ trong hệ cơ sở đã cho và ta viết $\vec{u}(x;y)$ / $(*)$ hoặc $\vec{u} = (x;y)$ / $(*)$ hay đơn giản là $\vec{u}(x;y)$ hoặc $\vec{u} = (x;y)$ nếu không gây hiểu lầm.

Định nghĩa 4. *3 Trên mặt phẳng affin $\{O,\ \vec{a},\ \vec{b}\}$ $(*)$ cho điểm M bất kỳ. Khi đó, nếu vectơ $\vec{OM}$ có tọa độ $(x;y)$ thì cặp số $(x;y)$ như vậy được gọi là toạ độ của điểm M trong hệ cơ sở đã cho và ta viết $M(x;y)$ / $(*)$ hoặc $M = (x;y)$ / $(*)$ hay đơn giản là $M(x;y)$ hoặc $M = (x;y)$ nếu không gây hiểu lầm.*

Định lí 7. *Trên mặt phẳng affin $\{O,\ \vec{a},\ \vec{b}\}$ cho hai vectơ $\vec{u}(x;y)$ và $\vec{v}(x';y')$. Khi đó:*

1. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.
2. $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$.
3. $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$.
4. $k\vec{u} = (kx; ky)\,(k \in \mathbb{R})$.
5. $\vec{u} \parallel \vec{v}\ \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$.

Định lí 8. *Trên mặt phẳng affin $\{O,\ \vec{a},\ \vec{b}\}$ cho các điểm*

$$A(x_A; y_A)\ ;\ B(x_B; y_B)\ ;\ C(x_C; y_C).$$

Khi đó

1. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

2. $(A, B, M) = k \ \ (A \neq B,\ k \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_M &= \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M &= \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}.$

3. *Trung điểm M của đoạn AB có tọa độ:* $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

4. *Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ*

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

5. $\overline{A,\ B,\ C} \Leftrightarrow \dfrac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \dfrac{x_C - x_A}{y_C - y_A}$.

6. *Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B $(A \neq B)$ là*

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Chú ý: *1) Các khái niệm: tổng, hiệu của hai vectơ, tích của một vectơ với một số thực, song song, thẳng hàng, đồng quy, chia tỷ số, trung điểm, trọng tâm, tỷ số đơn, tỷ số kép, ... có các điều kiện (vectơ và tọa độ) không thay đổi trong các hệ cơ sở affin khác nhau nên còn được gọi là các khái niệm affin. Còn các khái niệm: tích vô hướng, tích ngoài, độ dài, góc, vuông góc, chu vi, diện tích, ... chỉ có các điều kiện tọa độ trong hệ cơ sở trực chuẩn nên còn được gọi là các khái niệm trực chuẩn. 2) Trong các hệ cơ sở affin chúng ta không xây dựng các khái niệm trực chuẩn.*

2. Tọa độ cực.

Định nghĩa 5. *4 Trên mặt phẳng ¶ cho tia Ot với vectơ đơn vị $\vec{e}$ gốc O. Một điểm M trên mặt phẳng có thể được xác định dựa vào hai thông số:*

$$r = OM \text{ và } \varphi = (\vec{e}, \vec{OM})(\text{ với } r \geqslant 0,\ -\pi < \varphi \leqslant \pi\ \ (*).$$

Cặp $(\varphi; r)$ như vậy được gọi là tọa độ cực của điểm M trong hệ tọa độ cực $\{O; \vec{e}\}$. Điểm O được gọi là điểm cực hoặc điểm gốc, tia Ot được gọi là trục cực và ta viết: $M(\varphi; r)\ /\ \{O; Ot\}$ hoặc đơn giản là $M(\varphi; r)$ nếu không gây hiểu lầm.

Định lí 9. *Nếu $M(\varphi; r)$ trong hệ tọa độ cực $\{O; \vec{i}\}$ (1) (hệ $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ (2) là hệ tọa độ trực chuẩn cho trước) thì $M(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$ trong hệ tọa độ trực chuẩn (2).*

Định lí 10. *Nếu $M(x; y)$ trong (2) và đồng thời $M(\varphi; r)$ trong (1) thì: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, còn φ là góc $\in (*)$ có* $\begin{cases} \cos\varphi &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\varphi &= \dfrac{}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$

Ví dụ *1) Trong hệ tọa độ trực chuẩn* $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ *cho các điểm*

$$O(0;0)\ ;\ A(1;0)\ ;\ B(0;1)\ ;\ C(-1;0)\ ;\ D(0;-1)\ ;\ E(1;1)\ ;\ F(1;2).$$

Hãy tìm tọa độ cực của các điểm đó trong các hệ tọa độ cực sau:
a) $\{O; \vec{i}\}$.
b) $\{O; \vec{j}\}$.
c) $\{O; Ot\}$ *trong đó* Ot *là tia phân giác của góc phần tư I.*
d) $\{O; Oz\}$ *trong đó* Oz *là tia phân giác của góc phần tư II. 2) Chứng minh rằng đường thẳng đi qua cực* O *và tạo với trục cự* Ot *góc* $\alpha = Const$ *cho trước có phương trình:* $\varphi = \alpha$. *3) Chứng minh rằng đường tròn tâm* O, *bán kính* $R = a > 0$ *cho trước có phương trình là:* $r = a$.

2. Tọa độ tỷ cự (toạ độ trọng tâm).

Định lí 11. *Trên mặt phẳng ¶ cho ba điểm* $A,\ B,\ C$ *không thẳng hàng. Khi đó, với mọi điểm* M *trên mặt phẳng, tồn tại duy nhất cặp ba số* $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$, *thoả mãn* $x+y+z=1$, *sao cho*

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Định nghĩa 6. *5 Cặp ba số* $(x;y;z)$ *nói trong định lý trên được gọi là tọa độ tỷ cự của điểm* M *đối với hệ ba điểm cơ sở* $\{A,\ B,\ C\}$ *và ta cũng viết:* $M(x;y;z)\ /\ \{A,\ B,\ C\}$ *hoặc đơn giản là* $M(x;y;z)$ *nếu không gây hiểu lầm.*

Định lí 12. *Nếu* $M(\alpha;\beta)$ *trong hệ cơ sở affin* $\{A; \vec{AB}; \vec{AC}\}$ *thì trong hệ cơ sở* $\{A,\ B,\ C\}$ *điểm* M *có tọa độ tỷ cự là:* $M(1-\alpha-\beta;\alpha;\beta)$.

Một số khái niệm khác.

Trong phần này chúng ta đưa ra một số khái niệm khác nhằm giải thích và thống nhất những thuật ngữ được sử dụng trong tài liệu này. Trước hết ta ký hiệu ¶ là tập tất cả các điểm trên mặt phẳng.

1. *Tập* $U(I;\varepsilon) := \{M \mid IM < \varepsilon\}$ *được gọi là* $\varepsilon-$ *lân cận của điểm* I.
   Tập $\overset{\circ}{U}(I;\varepsilon) := U(I;\varepsilon) \setminus \{I\}$ *được gọi là* ε *- lân cận khuyết của điểm* I.

2. *Tập* $G \subseteq$ ¶ *được gọi là tập mở khi và chỉ khi*

$$\forall M \in G,\ \exists\, \varepsilon > 0 :\ U(M;\varepsilon) \subseteq G.$$

3. *Tập* G *được gọi là đường khi và chỉ khi*

$$\forall M \in G,\ \forall \varepsilon > 0 :\ \begin{cases} U(M;\varepsilon) \cap G \neq \emptyset \\ \overset{\circ}{U}(M;\varepsilon) \cap \overline{G} \neq \emptyset \end{cases} .$$

Tập $G \subseteq$ ¶ *mà không là đường thì được gọi là miền.*

4. *Tập G được gọi là liên tục nếu* $\forall M \in G,\ \forall \varepsilon > 0:\ \overset{\rightarrow}{\circ}U(M;\varepsilon) \cap G \neq \emptyset$.
   Khi đó, điểm M cũng được gọi là điểm liên tục của tập G. Điểm $N \in G$ *được gọi là điểm rời rạc của tập G nếu tồn tại* $\varepsilon > 0$ *sao cho* $\overset{\rightarrow}{\circ}U(M;\varepsilon) \cap G = \emptyset$.

5. *Tập G được gọi là liên thông khi và chỉ khi với mọi hai điểm* $A,\ B \in G$, *tồn tại một đường liên tục nối A với B và nằm trọn trong G. Đặc biệt, tập hợp* $(*) \subseteq \mathbb{R}$ *được gọi là liên thông khi và chỉ khi* $\forall x,\ y \in (*) :\ (x;y) \subseteq (*)$.

6. *Tập G được gọi là lồi khi và chỉ khi với mọi hai điểm* $A,\ B \in G$ *thì đoạn thẳng AB nằm trọn trong G. Tập không lồi (tồn tại hai điểm* $A,\ B \in G$ *sao cho đoạn thẳng AB không nằm trọn trong G) được gọi là tập lõm.*

7. *Cho tập G. Khi đó,* $d(G) := Sup\{XY \mid X, Y \in G\}$ *được gọi là đường kính của G.*

8. *Điểm M được gọi là điểm biên của tập G nếu với mọi* $\varepsilon > 0$, *bé tuỳ ý, ta luôn có:*

$$\begin{cases} U(M;\varepsilon) \cap G \neq \emptyset \\ U(M;\varepsilon) \cap \overline{G} \neq \emptyset \end{cases}.$$

   (Ta ký hiệu $\overline{G} := \{M \in \P \mid M \notin G\}$ *và* $\overline{G}$ *được gọi là phần bù của G.) Tập các điểm biên của G được ký hiệu là B(G).*

9. *Điểm biên của một tập G có thể* $\in G$ *hoặc không thuộc G. Tập G được gọi là tập đóng khi và chỉ khi* $B(G) \subseteq G$.

10. *Tập G được gọi là giới nội (hữu hạn, bị chặn) nếu*

$$\exists\ M \in G,\ \exists\ K > 0:\ G \subseteq U(M;K).$$

11. *Vậy tập G không giới nội (vô hạn, không bị chặn) khi và chỉ khi*

$$\forall M \in G,\ \forall K > 0,\ \text{lớn tuỳ ý, ta luôn có: } G \setminus U(M;K) \neq \emptyset.$$

12. *Đường G được gọi là đường cong kín khi nó là biên của một miền hữu hạn, liên thông. Khi đó: +) G chia mặt phẳng thành hai phần, một trong hai phần chứa trọn một đường thẳng được gọi là miền ngoài của G, miền còn lại được gọi là miền trong của G. +) Mọi đường cong liên tục nối hai điểm thuộc hai phần khác nha (nằm khác phía đối với G) luôn có điểm chung với G. Một số đường cong tuy không kín nhưng cũng có các tính chất trên, khi đó ta cũng có các khái niệm miền trong và miền ngoài của đường (chẳng hạn Parabol:* $y = x^2$ *là đường cong có các tính chất trên.)*

7.2 Biểu diễn toạ độ của phép biến hình

7.2.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 7. *1 Ta ký hiệu ¶ là tập tất cả các điểm trên một mặt phẳng cho trước.*

1. *Một song ánh* $f:\ \P \longrightarrow \P$ *còn được gọi là một phép biến hình trên mặt phẳng* $\P$. *Nếu phép biến hình* f *biến điểm* M *thành điểm* M' *thì điểm* M' *còn được gọi là ảnh của điểm* M *qua phép biến hình* f, *còn điểm* M *còn được gọi là tạo ảnh của điểm* M' *qua phép biến hình* f. *Ta còn viết*

$$f:\ M \to M' \quad \text{hoặc } M' = f(M) \ \text{ hoặc } M\overrightarrow{f}\longrightarrow M'.$$

2. *Cho phép biến hình* f *và cho tập* G *trên mặt phẳng* $\P$. *Tập*

$$G' := \{M' \in \P \mid M' = f(M),\ M \in G\}$$

còn được gọi là ảnh của tập G *qua phép biến hình* f *và còn được ký hiệu là* $G' = f(G)$.

3. *Cho phép biến hình* f *và cho điểm* $M \in \P$, $M\overrightarrow{f}\longrightarrow M'$. *Khi đó, do* f *là song ánh nên tồn tại một phép biến hình biến điểm* M' *thành điểm* M, *phép biến hình đó được gọi là phép biến hình ngược của* f *và được ký hiệu là* f^{-1}. *Như vậy*

$$f^{-1}(M) = N \Leftrightarrow M = f(N).$$

4. *Cho hai phép biến hình* f *và* g *trên mặt phẳng* $\P$. *Chúng được gọi là bằng nhau (hoặc đồng nhất với nhau) và được ký hiệu là* $f \equiv g$ *hoặc* $f = g$ *nếu*

$$\forall M \in \P:\ f(M) \equiv g(M).$$

5. *Trên mặt phẳng* $\P$ *cho hai phép biến hình* f *và* g. *Giả sử*

$$f:\ M \to N\ ;\ g:\ N \to M'.$$

Khi đó, tồn tại phép biến hình $: M \to M'$. *Phép biến hình như vậy được gọi là tích của hai phép biến hình* g *và* f *và được ký hiệu là* $g \circ f$. *Như vậy:*

$$g \circ f:\ M \to M' \Leftrightarrow f:\ M \to N\ ;\ g:\ N \to M'.$$

Nói cách khác $g \circ f(M) = g(f(M))$. *Nói chung, tích của hai phép biến hình không có tính giao hoán, tức là* $g \circ f \neq f \circ g$, *bởi vậy, khi viết tích của hai phép biến hình thì thứ tự trước sau của mỗi phép biến hình trong cách viết tích là rất quan trọng.*

6. *Tương tự, ta định nghĩa tích của nhiều phép biến hình hơn. Tích của* $\geqslant 3$ *phép biến hình có tính kết hợp, có nghĩa là*

$$f \circ (g \circ h) \equiv (f \circ g) \circ h := f \circ g \circ h.$$

7. *Phép biến hình biến mỗi điểm thuộc mặt phẳng thành chính nó được gọi là phép đồng nhất và được ký hiệu là* e *hoặc* E *hoặc* Id. *Hiển nhiên, với mọi phép biến hình* f *ta luôn có*

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id.$$

8. *Xét phép biến hình f. Ta có:*
   a) Nếu $f(M) = M$ thì M được gọi là một điểm bất động của f. Tập các điểm bất động của phép biến hình f được ký hiệu là $E(f)$.
   b) Nếu $f(G) = G$ trong đó $G \subseteq ¶$ (G còn được gọi là một hình) thì G được gọi là một hình bất động (hình kép) của f
   c) Một tính chất hình học γ nào đó mà không đổi qua phép biến hình f còn được gọi là một bất biến của f hay ta còn nói rằng f bảo toàn tính chất γ.

Định nghĩa 8. *2 Trên mặt phẳng ¶ lập hệ trục tọa độ Oxy. Khi đó, mỗi điểm $M \in ¶$ sẽ được gắn với một cặp số $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ là tọa độ của nó và ngược lại (mặt phẳng tọa độ $Oxy \sim \mathbb{R}^2$). Cho phép biến hình $f : ¶ \longrightarrow ¶$, $f : M(x; y) \to M'(x'; y')$. Nếu giữa các tọa độ $(x'; y')$ của điểm ảnh M' với các tọa độ $(x; y)$ của tạo ảnh M có mối liên hệ:*

$$\begin{cases} x' &= f_1(x; y) \\ y' &= f_2(x; y) \end{cases} (1)$$

trong đó $f_1(x; y)$; $f_2(x; y)$ là các song ánh : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ thì (1) được gọi là biểu diễn tọa độ của phép biến hình f.

Định lí 13. *Trên mặt phẳng ¶ xác định hệ trục tọa độ trực chuẩn Oxy. khi đó: 1. Mỗi phép biến hình $f : ¶ \longrightarrow ¶$ đều có biểu diễn tọa độ (1). 2. Ngược lại, mỗi cặp song ánh hai biến: $f_1(x; y)$; $f_2(x; y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định một phép biến hình f trên mặt phẳng tọa độ ¶ có biểu diễn tọa độ (1).*

7.2.2 Ví dụ

Ví dụ 7.2.1. *1 Xác định biểu diễn tọa độ của phép tịnh tiến song song $T_{\vec{u}}$ với $\vec{u}(a; b)$.*
Lời giải . *Ta có:*

$$T_{\vec{u}} : M(x; y) \to M'(x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \text{ (mà } \overrightarrow{MM'}(x' - x; y' - y))$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x &= a \\ y' - y &= b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' &= x + a \\ y' &= y + a \end{cases} (1.1).$$

Vậy $T_{\vec{u}}$ có biểu diễn tọa độ: (1.1).

Ví dụ 7.2.2. *2 Chứng minh rằng nếu*

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= f_1'(x'; y') \\ y &= f_2'(x'; y') \end{cases} (1')$$

thì (1') là biểu diễn tọa độ của phép biến hình f^{-1}.

Ví dụ 7.2.3. *3 Cho phép biến hình f có biểu diễn tọa độ*

$$\begin{cases} x' &= f_1(x;y) \\ y' &= f_2(x;y) \end{cases} (i)$$

và phép biến hình g có biểu diễn tọa độ

$$\begin{cases} x' &= g_1(x;y) \\ y' &= g_2(x;y) \end{cases} (i)$$

Chứng minh rằng nếu $(i) \Leftrightarrow (ii)$ thì $f \equiv g$.

Ví dụ 7.2.4. *4 Hãy tìm biểu diễn tọa độ của Id. Từ đó hãy suy ra $T_{\vec{0}} \equiv Id$.*

7.3 Phép biến hình tuyến tính (affin) và các tính chất

Do phần lớn những phép biến hình được học trong chương trình phổ thông đều là phép biến hình affin nên trong mục này ta sẽ xét kỹ một số tính chất quan trọng của chúng.

7.3.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 9. *1 Phép biến hình trên mặt phẳng tọa độ Oxy có biểu diễn tọa độ*

$$\begin{cases} x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} (1)$$

trong đó a_1 ; a_2 ; b_1 ; b_2 ; c_1 ; $c_2 \in \mathbb{R}$, cho trước, và

$$det(f) := a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

được gọi là phép biến hình tuyến tính hoặc phép biến hình affin. Biểu thức $det(f)$ được gọi là định thức của phép biến hình affin (1). Chẳng hạn, các phép biến hình $T_{\vec{u}}$, Id là các phép biến hình affin với $det(f) = 1$.

7.3.2 Các định lý

Định lí 14. *Phép biến hình affin (1) biến vectơ $\vec{u}(x;y)$ thành vectơ $\vec{u'}(x';y')$ được xác định theo công thức*

$$\begin{cases} x' &= a_1x + b_1y \\ y' &= a_2x + b_2y \end{cases} (2)$$

Chứng minh.

Giả sử $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *với* $A(x_0; y_0) \Rightarrow B(x_0 + x; y_0 + y)$. *Gọi* f *là phép biến hình affin đang xét và* $f: A \to A'$; $f: B \to B'$. *Khi đó các tọa độ của* A', B' *được xác định theo công thức (1) và* $f: \vec{u} \to \vec{u'} = \overrightarrow{A'B'}$. *Dễ thấy nếu đặt* $A'(x_1; y_1)$; $B'(x_2; y_2)$; $\vec{u'}(x'; y')$ *thì*

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x_1 & = a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 \\ y_1 & = a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 \end{cases}\\ \begin{cases} x_2 & = a_1(x_0 + x) + b_1(y_0 + y) + c_1 \\ y_1 & = a_2(x_0 + x) + b_2(y_0 + y) + c_2 \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u'}(x'; y') = \overrightarrow{A'B'}(x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (a_1x + b_1y; a_2x + b_2y).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' & = a_1x + b_1y \\ y' & = a_2x + b_2y \end{cases} \text{(đpcm.)}$$

Định lí 15. *Phép biến hình affin bảo toàn tính cộng tuyến (cùng phương) của hai vectơ. Nói cách khác, nếu* $\vec{u} \parallel \vec{v}$ *thì* $\vec{u'} \parallel \vec{v'}$ *trong đó ta ký hiệu* x' *là ảnh của* x *qua phép biến hình affin đang xét.*

Chứng minh: *Định lý này dễ dàng thu được từ định lý trên.*

Các hệ quả

Các hệ quả sau thu được trực tiếp từ các định lý trên và thu được từ nhau:

Hệ quả 1: *Phép biến hình affin biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng. Nói cách khác, phép biến hình affin bảo toàn quan hệ thẳng hàng giữa các điểm, hay quan hệ thẳng hàng giữa các điểm là một bất biến của phép biến hình affin.* **Hệ quả 2:** *Phép biến hình affin bảo toàn quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.* **Hệ quả 3:** *Phép biến hình affin biến một đường thẳng thành một đường thẳng.* **Chú ý:** *Phép biến hình biến một đường thẳng thành một đường thẳng còn được gọi là phép biến hình xạ ảnh. Vậy phép biến hình affin là phép biến hình xạ ảnh.* **Hệ quả 4:** *Phép biến hình affin bảo toàn quan hệ cùng phương giữa các đường thẳng. (Hai đường thẳng được gọi là cùng phương nếu chúng song song hoặc trùng nhau.)* **Hệ quả 5:** *Phép biến hình affin biến hai đường thẳng cắt nhau thành hai đường thẳng cắt nhau và do đó bảo toàn quan hệ đồng quy giữa các đường thẳng.* **Hệ quả 6:** *Phép biến hình affin bảo toàn các phép toán cộng, trừ hai vectơ, phép nhân một vectơ với một số thực, quan hệ bằng nhau giữa các vectơ và tỷ số đơn, tỷ số kép giữa các điểm thẳng hàng.* **Hệ quả 7:** *Nếu phép biến hình affin* f : (1) *biến vectơ* $\vec{u}$ *thành vectơ* $\vec{u'}$, *biến vectơ* $\vec{v}$ *thành vectơ* $\vec{v'}$ *thì:*

$$< \vec{u'}; \vec{v'} > = < \vec{u}; \vec{v} > .det(f).$$

Hệ quả 8: *Nếu phép biến hình affin* f : (1) *biến các điểm* A, B, C *lần lượt thành các điểm* A', B', C' *thì*

$$[A'B'C'] = [ABC].det(f).$$

Hệ quả 9: *Phép biến hình affin biến tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng (độ dài đoạn thẳng có thể không được bảo toàn), góc thành góc (số đo của góc có thể không được bảo toàn), tam giác thành tam giác (diện tích và chu vi của tam giác có thể không được bảo toàn).*

Định nghĩa 10. *2 +) Phép biến hình bảo toàn chiều đi trên tam giác ảnh và tam giác tạo ảnh được gọi là phép biến hình thuận. +) Phép biến hình đảo ngược chiều đi trên tam giác ảnh và tam giác tạo ảnh được gọi là phép biến hình nghịch.* **Hệ quả 10:** *Phép biến hình affin: +) Là phép biến hình thuận khi và chỉ khi $det(f) > 0$. +) Là phép biến hình ngịch khi và chỉ khi $det(f) < 0$.*

Bài tập

Bài toán 1. *1 Chứng minh rằng nếu f, g là hai phép biến hình affin thì $f \circ g$ cũng là phép biến hình affin và $det(f \circ g) = det(f).det(g)$.*

Bài toán 2. *2 Chứng minh rằng nếu f là phép biến hình affin thì f^{-1} cũng là phép biến hình affin và*

$$det(f^{-1}) = \frac{1}{det(f)}.$$

Bài toán 3. *3 Chứng minh rằng phép biến hình affin bảo toàn bậc của một đường cong.*

Bài toán 4. *4 Chứng minh rằng phép biến hình affin: +) Biến một n - giác thành một n - giác. +) Biến một đường tròn thành một đường tròn.*

7.4 Phép dời hình

Định nghĩa 11. *3 Phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm được gọi là phép dời hình (hoặc phép biến hình đẳng cự.) Từ định nghĩa của phép dời hình ta có ngay nghịch đảo của một phép dời hình là một phép dời hình ; tích của hai hoặc nhiều phép dời hình là một phép dời hình.*

Định lí 16. *Cho phép biến hình affin có biểu diễn tọa độ (1). Khi đó:*

$$\text{Nếu } \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 & = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & = 1 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 & = 0 \ \ (i) \end{cases} \quad (\alpha) \ \text{ thì } f \text{ là phép dời hình.}$$

Chú ý . *1) Có thể thay điều kiện (i) bởi điều kiện*

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1 \ \ (ii) \Leftrightarrow det(f) = \pm 1.$$

2) Các vectơ $\vec{e_1}(a_1; a_2)$; $\vec{e_2}(b_1; b_2)$ còn được gọi là các vectơ cơ sở của phép biến hình affin: (1). Ta có:

$$(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{e_1}| = 1 \\ |\vec{e_2}| = 1 \\ \vec{e_1} \perp \vec{e_2} \end{cases}.$$

3) Có thể chứng minh khẳng định ngược lại: Nếu phép biến hình affin f có biểu diễn tọa độ (1) *là phép dời hình thì các hệ số của nó thoả mãn điều kiện* (α).

Hệ quả 1. *11 Mọi phép dời hình f trên mặt phẳng tọa độ đều có biểu diễn tọa độ:*

$$\begin{cases} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0 \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0 \end{cases} \quad (3)$$

nếu f là phép dời hình thuận (là phép dời hình bảo toàn diện tích định hướng của tam giác ảnh và tam giác tạo ảnh.) Hoặc

$$\begin{cases} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0 \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0 \end{cases} \quad (4)$$

nếu f là phép dời hình nghịch (là phép dời hình đổi dấu diện tích định hướng của tam giác ảnh và tam giác tạo ảnh.) Trong đó α là góc $\in (-\pi;\pi]$.

Định nghĩa 12. *4 1) Tập các phép dời hình có biểu diễn tọa độ* (3) *được ký hiệu là $Dt(\alpha)$. 2) Tập các phép dời hình có biểu diễn tọa độ* (4) *được ký hiệu là $Dn(\alpha)$.*

Hệ quả 2. *12 Phép dời hình f:*

1. *Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.*
2. *Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.*
3. *Biến một tia thành một tia.*
4. *Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng có cùng độ dài.*
5. *Biến một tam giác thành một tam giác bằng nó.*
6. *Biến một đường tròn thành một đường tròn bằng nó.*
7. *Bảo toàn tích vô hướng của hai vectơ.*
8. *Bảo toàn độ dài của vectơ.*
9. *Bảo toàn góc hình học giữa hai vectơ.*
10. *Bảo toàn góc hình học giữa hai đường thẳng.*
11. *Bảo toàn quan hệ vuông góc giữa hai đường thẳng.*
12. *Bảo toàn diện tích hình học của các hình.*

Hệ quả 3. *13 Phép dời hình thuận f:*

1. *Bảo toàn tích ngoài của hai vectơ.*

2. *Bảo toàn góc lượng giác (góc định hướng) giữa hai vectơ.*

3. *Bảo toàn góc định hướng giữa hai đường thẳng.*

4. *Bảo toàn diện tích định hướng của tam giác.*

Hệ quả 4. *14 Phép dời hình nghịch f:*

1. *Đổi dấu tích ngoài của hai vectơ.*

2. *Đổi dấu góc lượng giác (góc định hướng) giữa hai vectơ.*

3. *Đổi dấu góc định hướng giữa hai đường thẳng.*

4. *Đổi dấu diện tích định hướng của tam giác.*

Định lí 17. *Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho tập* $G:\ F(x;y)\ \ \mathrm{Re}\ 0$ (5).
Một phép biến hình affin $f:\ G \longrightarrow G':\ F'(x';y')\ \ \mathrm{Re}'\ 0$ (5′).
Khi đó:

1. *Bậc của* $F(x;y)$ *và bậc của* $F'(x';y')$ *là như nhau.*

2. $\mathrm{Re} \equiv \mathrm{Re}'$. *Nói cách khác: +) f biến đường thành đường (phương trình thành phương trình) +) f biến miền thành miền (bất phương trình thành bất phương trình)*

3. *Do f bảo toàn quan hệ thuộc giữa điểm với đường, miền nên f bảo toàn quan hệ bao hàm giữa các hình và quan hệ tương giao giữa các hình.*

Chú ý quan trọng: *1) Giả sử phép dời hình f trên mặt phẳng tọa độ Oxy biến điểm* $M(x;y)$ *thành điểm* $M'(X;Y) = f(M)$. *Khi đó, nếu ta áp dụng phép dời hình ngược* f^{-1} *biến hệ trục tọa độ Oxy thành hệ trục tọa độ* O_1XY *thì trong hệ trục tọa độ mới* O_1XY, *điểm M đã cho sẽ có tọa độ mới:* $M(X;Y)$. *2) Giả sử đường cong G trên mặt phẳng tọa độ Oxy có phương trình* $F(x;y) = 0$ *và phép dời hình f biến* $G \to G'$ *có phương trình* $F'(X;Y) = 0$. *Khi đó, nếu ta áp dụng phép dời hình ngược* f^{-1} *biến hệ trục tọa độ Oxy thành hệ trục tọa độ* O_1XY *thì trong hệ trục tọa độ mới* O_1XY, *đường cong G đã cho sẽ có phương trình mới* $F'(X;Y) = 0$.

Định lí 18 (Về điểm bất động của phép biến hình affin)**.** *Phép biến hình affin khác phép đồng nhất Id: +) Hoặc không có điểm bất động. +) Hoặc có đúng một điểm bất động. +) Hoặc có vô số điểm bất động thẳng hàng.*

Từ chứng minh của định lý này ta có kết quả cụ thể hơn:

$$\text{Xét } D := 1 + det(f) - (a_1 + b_2)\ ;\ D_x = c_1 + b_1c_2 - b_2c_1\ ;\ D_y = c_2 + c_1a_2 - c_2a_1.$$

+) Nếu $D \neq 0$ *thì f có một điểm bất động duy nhất. +) Nếu* $D = 0$ *và hoặc* $D_x \neq 0$ *hoặc* $D_y \neq 0$ *thì f không có điểm baats động. +) Nếu* $D = D_x = D_y = 0$ *thì f có vô số điểm bất động thẳng hàng.*

Hệ quả 5. *15 1) Phép dời hình thuận khác phép đồng nhất Id; +) Hoặc không có điểm bất động*

$$\text{(khi } \begin{cases} \alpha = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 \neq 0 \end{cases} \text{)}$$

+) Hoặc có đúng một điểm bất động (khi $\alpha \neq 0$). Hiển nhiên, Id là phép dời hình thuận và Id nhận mọi điểm $\in$ ¶ là điểm bất động. 2) Phép dời hình nghịch: +) Hoặc không có điểm bất động. +) Hoặc có vô số điểm bất động thẳng hàng.

Hệ quả 6. *16 Nếu phép dời hình có ba điểm bất động không thẳng hàng thì đó là phép đồng nhất.*

Hệ quả 7. *17 Cho hai phép dời hình thuận f và g. Khi đó:*

$$\text{Nếu } \forall A,\ B \in \P,\ A \neq B : \begin{cases} f(A) \equiv g(A) \\ f(B) \equiv g(B) \end{cases} \quad \text{thì } f \equiv g(\text{ tức là } f(M) \equiv g(M),\ \forall M \in \P.)$$

Định lí 19 (Sự xác định một phép dời hình)**.** *Cho tam giác ABC bằng tam giác $A'B'C'$. Khi đó, tồn tại duy nhất một phép dời hình f biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.*

Hệ quả 8. *18*

1. *Tích của hai phép biến hình affin cùng tính thuận, nghịch là một phép biến hình affin thuận.*
2. *Tích của hai phép biến hình affin khác tính thuận, nghịch là một phép biến hình affin nghịch.*
3. *Tích của hai phép dời hình là một phép dời hình.*

Bài tập

Hãy chứng minh tất cả những kết quả trên dựa vào biểu diễn tọa độ của phép biến hình affin cũng như biểu diễn tọa độ của phép dời hình.

Chương 8

Một số phép biến hình phẳng thường gặp

Trong chương này ta xét định nghĩa hình học và xây dựng biểu diễn tọa độ của một số phép biến hình thường gặp trong chương trình phổ thông, đồng thời nêu ra một số tính chất quan trọng của chúng dựa vào biểu diễn tọa độ. Chú ý rằng ta đã xét các tính chất tổng quát của phép biến hình affin và phép dời hình cũng như của các phép biến hình thuận, nghịch. Bởi vậy, nếu một phép biến hình cụ thể nào đó mà là phép biến hình affin, hoặc là phép dời hình, hoặc là phép biến hình thuận, nghịch thì nó phải có tất cả những tính chất tổng quát của phép biến hình chung đã nêu và ta sẽ không nhắc lại những tính chất chung đó nữa. Nói chung, trong phần này ta quy định việc nghiên cứu một phép biến hình cụ thể bao gồm những bước sau: 1) Định nghĩa (bằng hình học, vectơ hoặc tọa độ). 2) Xác định công thức biểu diễn tọa độ. 3) Chỉ ra cách dựng ảnh và tính chất của các ảnh của một số hình phẳng quan trọng (điểm, đường thẳng, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn, đa giác, v.v.... 4) Phân loại phép biến hình đang xét (affin, phép dời hình, thuận, nghịch, ...). 5) Chỉ ra mối liên hệ giữa phép biến hình đang xét với những phép biến hình đã xét trước đó. 6) Xác định những tính chất quan trọng, những điểm bất động, các bất biến. 7) Giải các bài toán ứng dụng phép biến hình đang xét. Các bài tập được chia thành hai loại: +) Bài tập lý thuyết nhằm hiểu sâu hơn về phép biến hình đang xét. +) Sử dụng phép biến hình đang xét để giải các bài tập hình học. Các bài tập lý thuyết thường được đưa ra ngay sau khi trình bày lý thuyết của phép biến hình cụ thể. Các bài tập ứng dụng được đưa ra trong mục 2.4.2.

8.1 Các phép dời hình

8.1.1 Phép tịnh tiến song song

Định nghĩa.

Định nghĩa 13. *1 Cho vectơ $\vec{u}(a;b)$. Phép tịnh tiến song song theo vectơ $\vec{u}$ là một phép biến hình được ký hiệu là $T_{\vec{u}}$ và được xác định như sau:*

$$\forall M \in \P,\ T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.\ (1)$$

Biểu diễn tọa độ

Định lí 20. *Nếu $\vec{u}(a;b)$ thì $T_{\vec{u}}$ có biểu diễn tọa độ:*

$$\begin{cases} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{cases} \quad (1.1)$$

Các tính chất

1. *$T_{\vec{u}}$ là phép biến hình affin với $det(T_{\vec{u}}) = 1$.*

2. *$T_{\vec{u}}$ là phép dời hình thuận với $\alpha = 0$.*

3. *$T_{\vec{u}}^{-1} = T_{-\vec{u}}$; $T_{\vec{0}} = Id$; $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$.*

4. *Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ thì $T_{\vec{u}}$ không có điểm bất động.*

5. *Xét đường thẳng Δ và gọi $\Delta' = T_{\vec{u}}(\Delta)$. Khi đó:*
   +) Nếu $\vec{u} \parallel \Delta$ thì $\Delta' \equiv \Delta$.
   +) Nếu $\vec{u}$ không $\parallel \Delta$ thì $\Delta' \parallel \Delta$.

6. *$T_{\vec{u}}$ nhận mọi đường thẳng $\parallel \vec{u}$ làm hình kép.*

Bài tập áp dụng

Bài toán 5. *1 Chứng minh rằng từ đồ thị hàm số $G:\ y = f(x)$ có thể thu được đồ thị hàm số $G':\ y = f(x+a) + b$ bằng phép tịnh tiến song song theo vectơ $\vec{u}(a;-b)$. Nói cách khác, $G' = T_{\vec{u}}(G)$.*

Bài toán 6. *2 Từ Parabol: $y = ax^2$ hãy suy ra Parabol: $y = ax^2 + bx + c$.*

Bài toán 7. *3 Chứng minh rằng $T_{\vec{u}}$ không thể có một hình kép hữu hạn.*

Bài toán 8. *4 Cho hình thang $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ thoả mãn $BC + AD > AB + CD$. M là giao điểm các đường phân giác trong của các góc A và B, N là giao điểm các đường phân giác trong của các góc C và D. Chứng minh rằng*

$$2MN = BC + AD - (AB + CD).$$

HDG: Xét $T_{\overrightarrow{MN}}$

Bài toán 9. *5 Trên mặt phẳng cho đoạn AD cố định. Dựng hình bình hành $ABCD$ sao cho $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BD}{BA}$. Tìm quỹ tích đỉnh C của hình bình hành.*

Bài toán 10. *6 Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Điểm M chuyển động song song với cạnh BC cho đến khi cắt cạnh CA, sau đó chuyển động song song với cạnh AB cho đến khi gặp cạnh BC rồi lại chuyển động song song với cạnh CA cho đến khi gặp cạnh AB... . Chứng minh rằng sau một số hữu hạn bước, quỹ đạo của điểm M là một đường gấp khúc khép kín.*

Bài toán 11. *7 Cho đường tròn tâm O, bán kính R cố định. AB là một đường kính cố định của đường tròn, MN là một đường kính thay đổi của đường tròn. Tiếp tuyến của đường tròn tại B cắt AM, AN tại P và Q. Tìm quỹ tích trực tâm của tam giác MPQ.*
HDG: Xét $T_{\overrightarrow{BA}}$. *Đs: $(E; R)$ bỏ đi hai điểm.*

Bài toán 12. *8 Trên đường tròn tâm O bán kính R cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động. Gọi H là trực tâm tam giác MAB, dựng tam giác đều MHP. Tìm quỹ tích của các điểm H, P khi M di động trên đường tròn đã cho .*

8.1.2 Phép quay

Định nghĩa.

Định nghĩa 14. *2 Phép quay tâm I, góc α, ký hiệu là Q_I^α với $\alpha \in (\pi; \pi]$ là một phép biến hình được xác định như sau:*

$$1)\ Q_I(I) = I$$

$$2)\quad \forall M \neq I:\ Q_I(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM' & = IM \\ (\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IM'}) & = \alpha \end{cases}.$$

Ta ký hiệu $(\vec{u}; \vec{v})$ là góc định hướng giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Biểu diễn tọa độ

Định lí 21. *Nếu $I(x_0; y_0)$ và $\alpha \in (-\pi; \pi]$ thì Q_I^α có biểu diễn tọa độ*

$$\begin{cases} x' & = (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha + x_0 \\ y' & = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha + y_0 \end{cases}.$$

Các tính chất

1. *Q_O^α với $O(0;0)$ có biểu diễn tọa độ:*
$$\begin{cases} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}.$$
2. *Q_I^α biến vectơ $\vec{u}(x;y)$ thành vectơ $\vec{u'}(x'y')$ có tọa độ thoả mãn:*
$$\begin{cases} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}.$$
3. *Q_I^α là phép biến hình affin với det $= 1$ và Q_I^α cũng là phép dời hình thuận.*
4. *Với $\alpha \neq 0$ thì Q_I^α chỉ có một điểm bất động duy nhất là điểm I.*
5. *$Q_I^\alpha = T_{\overrightarrow{OI}} \circ Q_O^\alpha \circ T_{\overrightarrow{IO}}$.*
6. *Với mọi cặp hai điểm A, $B \in ¶$ ta luôn có:*
$$Q_A^\alpha = T_{\overrightarrow{BA}} \circ Q_B^\alpha \circ T_{\overrightarrow{AB}}.$$
7. *Nếu $Q_I^\alpha : \vec{u} \to \vec{u'}$ thì $(\vec{u};\vec{u'}) = \alpha$.*
8. *Nếu Q_I^α biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' thì $(\Delta;\Delta') = |\alpha|$, trong đó ta ký hiệu $(\Delta;\Delta')$ là số đo góc hình học giữa hai đường thẳng Δ và Δ'.*
9. *Q_I^α nhận mọi đường tròn, hình tròn tâm I làm hình kép*

Bài tập áp dụng

Bài toán 13. *1 Hãy chứng minh các tính chất đã nêu trên.*

Bài toán 14. *2 Hãy xác định biểu diễn tọa độ của $(Q_I^\alpha)^{-1}$.*

Bài toán 15. *3 Từ đó hãy chứng minh rằng $(Q_I^\alpha)^{-1} = Q_I^{-\alpha}$.*

Bài toán 16. *4 Chứng minh rằng*
$$Q_I^\alpha \circ Q_I^\beta = Q_I^\beta \circ Q_I^\alpha = Q_I^{\alpha+\beta}.$$

Bài toán 17. *5 Hãy tìm những hình kép khác (nếu có) của Q_I^α.*

Bài toán 18. *6 Hãy tìm một phép quay với $\alpha \neq 0$ biến một n - giác đều tâm E thành chính nó (nói cách khác, phép quay đó nhận n - giác đã cho làm hình bất động).*

Bài toán 19. *7 Chứng minh rằng tồn tại một hệ trục tọa độ mà trong đó một Hyperbol vuông đã cho có phương trình $xy = k\,(k \neq 0)$.*

Bài toán 20. *8 Chứng minh rằng nếu đường thẳng $\Delta \ni I$ thì $Q_I(\Delta) \ni I$, còn nếu đường thẳng Δ không $\ni I$ thì $Q_I(\Delta)$ không $\ni I$.*

Bài toán 21. *9 Chứng minh rằng $Q_I^0 \equiv Id$.*

Bài toán 22. *10 Hãy nêu một số tính chất khác của Q_I^α.*

8.1.3 Phép đối xứng tâm

Định nghĩa.

Định nghĩa 15. *3 Phép đối xứng tâm I là một phép biến hình được ký hiệu là $\mathcal{D}_I$ và được xác định như sau: 1) $\mathcal{D}_I(I) = I$. 2) Với $\forall M \in ¶$, $M \neq I$ ta có*

$$\mathcal{D}_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \ I \text{ là trung điểm của } MM'.$$

Hai điểm M và M' khi đó được gọi là đối xứng với nhau qua điểm (tâm) I.

Định nghĩa 16. *4 Tập $G \subseteq ¶$ (G còn được gọi là một hình phẳng) được gọi là có tâm đối xứng là điểm I khi và chỉ khi $\forall M \in G$, $\mathcal{D}_I(M) \in G$. Khi đó G còn được gọi là hình đối xứng tâm. I còn được gọi là tâm đối xứng của G.*

Biểu diễn tọa độ

Định lí 22. *Nếu $I(a;b)$ thì $\mathcal{D}_I$ có biểu diễn tọa độ:*

$$\begin{cases} x' &= 2a - x \\ y' &= 2b - y \end{cases}$$

Các tính chất

1. *$\mathcal{D}_I$ là phép biến hình affin với $det = 1$ và $\mathcal{D}_I$ cũng là phép dời hình thuận với $\alpha = \pi$.*

2. *Với hai điểm A, B bất kỳ, $\in ¶$, ta có:*

$$\mathcal{D}_A \circ \mathcal{D}_B = T_{2\overrightarrow{BA}}.$$

3. *$\mathcal{D}_A \circ \mathcal{D}_B = Id \Leftrightarrow A \equiv B$.*

4. *Đường cong G có phương trình $f(x;y) = 0$ nhận điểm $I(a;b)$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi với mọi $(x;y) \in D_f$ mà $f(x;y) = 0$ ta có $f(2a-x; 2b-y) = 0$.*

5. *$\mathcal{D}_I^{-1} = \mathcal{D}_I$. Phép biến hình f mà thoả mãn $f^{-1} \equiv f$ còn được gọi là phép biến hình tự ngược hay là phép biến hình đối hợp. Như vậy, $\mathcal{D}_I$ là phép biến hình đối hợp.*

Bài tập áp dụng

Bài toán 23. *1 Hãy chứng minh các tính chất đã nêu trên.*

Bài toán 24. *2 Hãy xác định biểu diễn tọa độ của $\mathcal{D}_I^{-1}$ với $I(a;b)$.*

Bài toán 25. *3 Hãy chỉ ra những hình phẳng là hình đối xứng tâm và chỉ rõ tâm đối xứng của mỗi hình.*

Bài toán 26. *4 Chứng minh rằng một hình hữu hạn không thể có hai tâm đối xứng phân biệt.*

Bài toán 27. *5 Cho điểm $I(a;b)$ và đường cong G có phương trình $f(x;y)=0$. Chứng minh rằng đường cong G' đối xứng với G qua I có phương trình $f(2a-x;2b-y)=0$.*

Bài toán 28. *6 Chứng minh rằng mọi đường thẳng $\ni I$ đều là hình kép của $\mathcal{D}_I$. Hãy xác định các hình kép khác (nếu có) của $\mathcal{D}_I$.*

Bài toán 29. *7 Hãy nêu những bất biến của $\mathcal{D}_I$, những điểm bất động của $\mathcal{D}_I$.*

Bài toán 30. *8 Chứng minh rằng tọa độ cặp điểm thuộc đường cong G có phương trình $f(x;y)=0$ và đối xứng với nhau qua điểm $I(a;b)$ cho trước là nghiệm của hệ:*

$$\begin{cases} f(x;y) & =0 \\ f(2a-x;2b-y) & =0 \end{cases}.$$

Bài toán 31. *9 Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tâm đối xứng là điểm $I(a;b)$ khi và chỉ khi*

$$\forall x \in D_f : \begin{cases} 2a-x & \in D_f \\ f(2a-x) & =2b-f(x) \end{cases}$$

Bài toán 32. *10 Chứng minh rằng đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ $O(0;0)$ làm tâm đối xứng.*

Bài toán 33. *11 Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tâm đối xứng là điểm $I(a;b)$ khi và chỉ khi qua phép đổi biến $\begin{cases} x & =X+a \\ y & =Y+b \end{cases}$*
(hệ trục tọa độ Oxy được tịnh tiến song song theo vectơ $\vec{u}(a;b)$ đến vị trí IXY), đồ thị hàm số $Y=F(X)$ thu được là hàm số lẻ.

Bài toán 34. *12 Chứng minh rằng:*

1. *Đường thẳng có vô số tâm đối xứng.*
2. *Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$ không có tâm đối xứng.*
3. *Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^3+cx+d\ \ (a\neq 0)$ có tâm đối xứng là điểm $I(x_0;y_0)$ với $x_0=-\dfrac{b}{3a}\ ;\ y_0=y(x_0)$.*
4. *Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{px+q}\ \ (p\neq 0\ ;\ aq-bp\neq 0)$ nhận điểm $I(-\dfrac{q}{p};\dfrac{a}{p})$ làm tâm đối xứng.*

Bài toán 35. *13 Chứng minh rằng $\mathcal{D}_I \equiv Q_I^{\pi}$. Chính vì vậy và do $Q_I^0 \equiv Id$ nên khi nói đến phép quay góc α thường người ta chỉ xét $\alpha \in (-\pi;\pi)\setminus\{0\}$.*

Bài toán 36. *14 Cho ba đường tròn bằng nhau: $(O_1; R)$; $(O_2; R)$; $(O_3; R)$ và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tại A, B, C. Giả sử M là điểm $\in (O_1; R)$ và*

$$N = \mathcal{D}_A(M)\ ;\ P = \mathcal{D}_B(N)\ ;\ Q = \mathcal{D}_C(P).$$

Chứng minh rằng $Q = \mathcal{D}_{O_1}(M)$.

Bài toán 37. *15 Hai người lần lượt đặt những đồng xu tròn trên một mặt bàn hình chữ nhật. Người thứ hai đặt kế tiếp người thứ nhất cho đến khi mặt bàn được phủ đầy các đồng xu đó. Mỗi người có thể đặt đồng xu một cách tuỳ ý lên chỗ nào còn trống trên mặt bàn. Người nào không thể đặt tiếp đồng xu lên mặt bàn sẽ được coi là thua cuộc. Chứng minh rằng có một cách chơi đối với người đặt đồng xu đầu tiên sao cho với cách chơi đó, người ấy là người thắng cuộc.*

Bài toán 38. *16 Cho góc xOy và điểm A nằm ở miền trong của góc. Hãy dựng đường thẳng d đi qua điểm A sao cho đoạn thẳng của d nằm trong miền góc đã cho bị chia đôi bởi điểm A.*

Bài toán 39. *17 Hãy nội tiếp trong một tứ giác lồi một hình bình hành biết tâm của nó là điểm O thuộc miền trong của tứ giác lồi đã cho.*

Bài toán 40. *17 Cho tam giác ABC. Gọi $A_1 = \mathcal{D}_A(C)$, $B_1 = \mathcal{D}_B(A)$, $C_1 = \mathcal{D}_C(B)$. Gọi M là giao điểm của AB với A_1C_1, N là giao điểm của A_1B_1 với BC. Kẻ MP song song với B_1C_1 $(P \in A_1B_1)$. Chứng minh rằng*

$$A_1P = PN = B_1N.$$

Bài toán 41. *19 Hãy chia một tứ giác lồi $ABCD$ thành 4 phần sao cho có thể ghép 4 phaanf đó lại để được một hình bình hành.*

Bài toán 42. *20 Cho tứ giác lồi $ABCD$ có đường chéo AC đi qua trung điểm O của đường chéo BD. Chứng minh rằng nếu $OA > OC$ thì $\hat{A} < \hat{D}$.*

8.1.4 Phép đối xứng trục

Định nghĩa.

Định nghĩa 17. *5 Trên mặt phẳng ¶ cho đường thẳng Δ. Phép đối xứng trục Δ là một phép biến hình, ký hiệu là $\mathcal{D}_\Delta$ và được xác định như sau: +) Với $M \in \Delta :\ \mathcal{D}_\Delta(M) = M$. +) Với $M \notin \Delta :\ \mathcal{D}_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \Delta$ là trung trực của đoạn MM'. Khi đó hai điểm M và M' còn được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng Δ.*

Định nghĩa 18. *6 Tập $G \subseteq$ ¶ được gọi là có trục đối xứng là đường thẳng Δ hay là hình đối xứng trục (với trục đối xứng: Δ) khi và chỉ khi*

$$\forall M \in G :\ \mathcal{D}_\Delta(M) \in G.$$

Biểu diễn tọa độ

Định lí 23. *Nếu đường thẳng* Δ *có phương trình*

$$Ax + By + C = 0\,(5)\,(A^2 + B^2 \neq 0)$$

thì $\mathcal{D}_\Delta$ *có biểu diễn tọa độ*

$$\begin{cases} x' &= x - \dfrac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \\ y' &= y - \dfrac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \end{cases} (6)$$

Các tính chất

1. $\mathcal{D}_\Delta$ *là phép biến hình affin với det* $= -1$ *và là phép dời hình nghịch.*
2. (6) *cũng là công thức xác định tọa độ của điểm* $M'(x'; y')$ *đối xứng với điểm* $M(x; y)$ *qua đường thẳng* Δ *có phương trình* (5).
3. *Mọi điểm* $\in \Delta$ *đều là điểm bất động của* $\mathcal{D}_\Delta$. *Ngoài ra, không còn các điểm bất động khác.*
4. *Bản thân* Δ *là hình kép của* $\mathcal{D}_\Delta$. *Ngoài ra, mọi đường thẳng vuông góc với* Δ *cũng là hình kép của* $\mathcal{D}_\Delta$.
5. *Cho hai đường thẳng* d_1 *và* d_2. *Khi đó: +) Nếu* $d_1 \parallel d_2$ *thì* $\mathcal{D}_{d_1} \circ \mathcal{D}_{d_2}$ *là một phép tịnh tiến song song* $T_{\vec{u}}$. *+) Nếu* $d_1 \nparallel d_2$ *thì* $\mathcal{D}_{d_1} \circ \mathcal{D}_{d_2}$ *là một phép quay* Q_I^α.
6. $\mathcal{D}_\Delta$ *là một phép biến hình đối hợp.*

Bài tập áp dụng

Bài toán 43. *1 Chứng minh rằng*

1. *Nếu* $\Delta:\ x = a$ *thì* (6) *có dạng:*

$$\begin{cases} x' &= 2a - x \\ y' &= y \end{cases}. (6.1)$$

2. *Nếu* $\Delta:\ y = b$ *thì* (6) *có dạng:*

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= 2b - y \end{cases}. (6.2)$$

3. *Nếu* $\Delta:\ y = x$ *thì* (6) *có dạng:*

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x \end{cases}. (6.3)$$

4. Nếu $\Delta:\ y=-x$ *thì* (6) *có dạng:*

$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= -x \end{cases}.\ (6.4)$$

Bài toán 44. *2 Cho đường cong* $G:\ f(x;y)=0$*. Chứng minh rằng:*

1. G có trục đối xứng $\Delta:\ x=a$ *khi và chỉ khi*

$$\forall (x;y)\in D_f\ \text{ mà } f(x;y)=0:\ f(2a-x;y)=0.$$

2. G có trục đối xứng $\Delta:\ y=b$ *khi và chỉ khi*

$$\forall (x;y)\in D_f\ \text{ mà } f(x;y)=0:\ f(x;2b-y)=0.$$

3. G có trục đối xứng $\Delta:\ y=x$ *khi và chỉ khi*

$$\forall (x;y)\in D_f\ \text{ mà } f(x;y)=0:\ f(y;x)=0.$$

4. G có trục đối xứng $\Delta:\ y=-x$ *khi và chỉ khi*

$$\forall (x;y)\in D_f\ \text{ mà } f(x;y)=0:\ f(-y;-x)=0.$$

Bài toán 45. *3 Hãy xác định vectơ* $\vec{u}$ *trong phép tịnh tiến song song* $T_{\vec{u}}$*; tâm* I *và góc quay* α *trong phép* Q_I^α *ở tính chất 5. nói trên.*

Bài toán 46. *4 Chứng minh rằng một hình hữu hạn không thể có hai trục đối xứng song song.*

Bài toán 47. *5 Chứng minh rằng nếu một hình có hai trục đối xứng vuông góc thì nó có tâm đối xứng. Hãy xác định tâm đối xứng của hình.*

Bài toán 48. *6 Hãy chỉ ra một số hình đối xứng trục và chỉ ra các trục đối xứng của mỗi hình.*

Bài toán 49. *7 Cho điểm* $M(x;y)$*. Hãy chỉ ra tọa độ của các điểm:*

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5,\ M_6,\ M_7,\ M_8$$

lần lượt đối xứng với điểm M qua: trục hoành ; trục tung ; gốc tọa độ ; đường thẳng $x=a$ *; đường thẳng* $y=b$ *; điểm* $I(a;b)$ *; đường thẳng* $y=x$ *; đường thẳng* $y=-x$ *; đường thẳng* $y=ax+b\ \ (a\neq 0)$*.*

Bài toán 50. *8 Chứng minh rằng đồ thị hàm số chẵn có trục đối xứng là trục tung.*

Bài toán 51. *9 Chứng minh rằng: 1) Đường thẳng có vô số trục đối xứng. 2) Parabol:* $y=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$ *có trục đối xứng là đường thẳng* $x=-\dfrac{b}{2a}$*.*

Bài toán 52. *10 Chứng minh rằng đồ thị hàm số đa thức không có trục đối xứng xiên góc với trục hoành.*

Bài toán 53. *11 Cho tam giác ABC. Tìm đường thẳng Δ đi qua đỉnh A của tam giác sao cho với mọi điểm $M \in \Delta$ ta đều có chu vi tam giác MBC không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.* **Đs:** *Δ là đường phân giác ngoài của góc A.*

Bài toán 54. *12 Hai đường thẳng d và d' đối xứng với nhau qua một đường thẳng Δ. Chứng minh rằng hoặc d và d' cắt nhau tại một điểm $\in \Delta$, hoặc d và d' song song, cách đều Δ.*

Bài toán 55. *13 Cho hình chữ nhật $ABCD$, M là trung điểm của AB, K là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các vị trí của $N \in BC$, $E \in CD$, $G \in DA$ sao cho*

$$KN + NE + EG + GM$$

là nhỏ nhất.

Bài toán 56. *14 Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cề cùng phía đối với đường thẳng d. Hãy tìm điểm $M \in d$ sao cho tổng $AM + MB$ là nhỏ nhất.*

Bài toán 57. *15 Cho ba đường thẳng a, b, c đồng quy tại O và một điểm $A \in a$, $A \neq O$. Hãy dựng tam giác ABC nhận a, b, c làm các đường phân giác trong.*

Bài toán 58. *16 Chứng minh rằng trong tất cả những tam giác có chung số đo góc ở đỉnh và có tổng độ dài hai cạnh bên cho trước thì tam giác cân có độ dài cạnh đáy là nhỏ nhất.*

Bài toán 59. *17 Cho tam giác ABC và một điểm P nằm trong tam giác. Chứng minh rằng các đường thẳng đối xứng với PA, PA, PB thứ tự qua các đường phân giác trong của các góc A, B, C thì đồng quy.*

8.2 Phép vị tự và phép đồng dạng

8.2.1 Phép vị tự

Định nghĩa.

Định nghĩa 19. *7 Phép vị tự tâm I, tỷ số k $(k \neq 0)$ là một phép biến hình ký hiệu là $V[I;k]$ và được xác định như sau: Với mọi điểm $M \in$ ¶ $:$ $V[I;k](M) = M' \Leftrightarrow \Longrightarrow IM' = \Longrightarrow IM$.*

Biểu diễn tọa độ

Định lí 24. *Nếu $I(a;b)$ thì $V[I;k]$ có biểu diễn tọa độ*

$$\begin{cases} x' &= k(x-a)+a \\ y' &= k(y-b)+b \end{cases} \quad (7)$$

Đặc biệt, $V[O;k]$ *với* $O(0;0)$ *có biểu diễn tọa độ*

$$\begin{cases} x' &= kx \\ y' &= ky \end{cases} \quad (7.1)$$

Các tính chất

1. $V[I;k]$ *là phép biến hình affin với* $det = k^2$. $V[I;k]$ *là phép dời hình khi và chỉ khi* $k = \pm 1$.
2. $V[I;1] = Id$; $V[I;-1] = \mathcal{D}_I$; $V[I;-k] = V[I;k] \circ \mathcal{D}_I$. *Bởi vậy, từ đây ta chỉ xét* $V[I;k]$ *với* $k > 0,\ k \neq 1$.
3. $V^{-1}[I;k] = V[I;\frac{1}{k}]$.
4. $V[I;k]$ *biến vectơ* $\vec{u}$ *thành vectơ* $k\vec{u}$.
5. *Nếu* $V[I;k]$ *biến các điểm* $A,\ B,\ C$ *lần lượt thành các điểm* $A',\ B',\ C'$ *thì*

   $$A'B' = |k|AB\ ;\ \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}\ ;\ [A'B'C'] = k[ABC]\ ;\ \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC.$$

6. $V[I;k]$*: +) Biến đường tròn* $\mathcal{C}(I;R)$ *thành đường tròn* $\mathcal{C}(I;kR)$*. +) Biến đường thẳng* $\Delta \ni I$ *thành chính nó. (Mọi đường thẳng* $\Delta \ni I$ *đều là hình kép của* $V[I;k]$ *) +) Mọi miền góc đỉnh* I *cũng là hình kép của* $V[I;k]$ *)*

Bài tập áp dụng

Bài toán 60. *1 Hãy chứng minh các tính chất trên và tìm các tính chất khác nữa của* $V[I;k]$.

Bài toán 61. *2 Hãy tìm tất cả những điểm bất động và các hình kép của* $V[I;k]$.

Bài toán 62. *3 Hãy xét trường hợp* $k < 0,\ k \neq -1$.

Bài toán 63. *4 Hãy xét tính thuận, nghịch của* $V[I;k]$ *tuỳ theo các giá trị của* k.

Bài toán 64. *5 Hãy chỉ ra những bất biến của* $V[I;k]$.

Bài toán 65. *6 Hãy dựng ảnh của một số hình phẳng thường gặp: đoạn thẳng, tia, đường thẳng, góc, tam giác, tứ giác, đa giác, đường tròn, v.v.... qua* $V[I;k]$*. Hãy xét các vị trí của điểm* I *và các giá trị của* k.

Bài toán 66. *7 Nếu* $G' = V[I;k](G)$ *thì hai hình* G' *và* G *được gọi là đồng dạng phối cảnh với nhau qua tâm* I*, tỷ số đồng dạng* k*. Hãy chỉ ra cách dựng hình đồng dạng phối cảnh tâm* I*, tỷ số đồng dạng* k *của một số hình phẳng quen thuộc.*

Bài toán 67. *8 Cho hai đường tròn* $\mathcal{C}_1(I_1;R_1)$ *và* $\mathcal{C}_2(I_2;R_2)$*. Chứng minh rằng luôn tồn tại phép vị tự* $V[I;k]$ *biến đường tròn này thành đường tròn kia. Có bao nhiêu phép vị tự như vậy?. Hãy xác định tâm và tỷ số của mỗi phép vị tự đó.*

8.2.2 Phép đồng dạng

Định nghĩa

Định nghĩa 20. *11 Tích của một phép vị tự tỷ số $\varrho \neq 0$ với một phép dời hình $\mathcal{D}$ còn được gọi là một phép đồng dạng tỷ số $k = |\varrho| \ (> 0)$ và được ký hiệu là $\mathcal{H}_k$. Phép đồng dạng không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện phép vị tự và phép dời hình đã nêu trên. Nếu $k = 1$ thì phép đồng dạng là một phép dời hình.*

Định nghĩa 21. *12 Hai hình $\mathcal{G}$ và $\mathcal{G}'$ được gọi là đồng dạng với nhau với tỷ số đồng dạng k nếu tồn tại một phép đồng dạng $\mathcal{H}_k$ biến hình này thành hình kia. Chú ý rằng: +) Phép vị tự tỷ số $k \neq 0$ cũng là một phép đồng dạng tỷ số $|k|$ (chọn $\mathcal{D} = Id$). +) Phép dời hình cũng là một phép đồng dạng tỷ số 1 (chọn $V[I;k] = V[I;1] = Id$). +) Tỷ số của phép vị tự là một số thực khác 0 còn tỷ số của phép đồng dạng là một số thực dương.*

Một số tính chất

1. *Cho phép biến hình $f: \ a \longrightarrow A'$; $A \longrightarrow B'$. Khi đó:*

$$f \equiv \mathcal{H}_k \Leftrightarrow A'B' = k.AB.$$

2. *$\mathcal{H}_k$ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.*
3. *$\mathcal{H}_k$ biến một đường thẳng thành một đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài gấp k lần độ dài đoạn thẳng tạo ảnh, biến góc thành góc có số đo hình học bằng nó, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến đường tròn $\mathcal{C}(E;R)$ thành đường tròn $\mathcal{C}(E';kR)$ trong đó $E' = \mathcal{H}_k(E)$.*
4. *Có thể phân tích $\mathcal{H}_k \ \ (k \neq 1)$ thành tích của V_I^k với Q_I^α hoặc với $\mathcal{D}_d$, trong đó d là đường thẳng đi qua I. Hai dạng $V_I^k \circ Q_I^\alpha$; $V_I^k \circ \mathcal{D}_d \ \ (d \ni I)$ còn được gọi là hai dạng chính tắc của phép đồng dạng*

Bài tập áp dụng

Bài toán 68. *1 Hãy viết biểu diễn tọa độ của hai phép đồng dạng chính tắc biết tọa độ của tâm I , góc quay α và phương trình đường thẳng $d \ni I$.*

Bài toán 69. *2 Hãy tìm tỷ số diện tích, tỷ số diện tích định hướng của hai hình đồng dạng với nhau với tỷ số k.*

Bài toán 70. *3 Hãy nêu tất cả những tính chất, các điểm bất động, các bất biến của $\mathcal{H}_k$.*

Bài toán 71. *4 Hãy chỉ ra ảnh và nêu cách dựng ảnh của một số hình hình học quen thuộc.*

Bài toán 72. *5 Chứng minh rằng* $\mathcal{H}_k^{-1} = \mathcal{H}_{\frac{1}{k}}$.

Bài toán 73. *6 Tích của hai phép đồng dạng là phép biến hình có những tính chất như thế nào?.*

Bài toán 74. *7 Chứng minh răng phép đồng dạng cũng là phép biến hình affin.*

Bài toán 75. *8 Cho hai đường tròn* (O), (O') *cắt nhau tại hai điểm* A, B. *Một cát tuyến di động* MAN $(M \in (O),\ N \in (O')\ )$. *Tìm tập hợp trực tâm* H *của tam giác* MBN.

Bài toán 76. *9 Cho tam giác* ABC *với đường tròn nội tiếp* (O). *Các tiếp điểm* M, N *tương ứng trên các cạnh* AB, BC. *Gọi* P *là chân đường vuông góc hạ từ* C *xuống* (AO). *Chứng minh rằng* $\overline{M,\ N,\ P}$.

Bài toán 77. *10 Cho hình bình hành* $ABCD$ *tâm* I *có* $\angle ABC = \angle BID = \alpha$. *Dựng hình bình hành* $BICE$. *Hãy tìm một phép biến hình biến* $BICE$ *thành* $ABCD$. ***Đáp số:*** $V_C^k \circ Q_C^\beta \circ \mathcal{D}_{(CE)}$ *trong đó* $k = \dfrac{CD}{CE}$; $\beta = \angle DCE$.

Bài toán 78. *11 Cho hai đường tròn* (O), (O'). *Lấy* $A \in (O)$, $A' \in (O')$. *Hãy dựng đường tròn qua* A, A' *và cắt các đường tròn* (O), (O') *tại các điểm thứ hai* M, M' *tương ứng sao cho các tam giác* AOM, $A'O'M'$ *đồng dạng và cùng hướng.*

Bài toán 79. *12 Cho đường tròn* (O), *đường thẳng* (d) *và điểm* A *không thuộc* (O), (d). *Dựng tam giác vuông cân* ABC $(\hat{B} = 90^0)$ *sao cho* $B \in (d)$, $C \in (O)$. **Chỉ dẫn:** *Xét* $Q_A^{45^0} \circ V_A^{\sqrt{2}}$.

Bài toán 80. *13 Cho phép đối xứng trục* $\mathcal{D}_l$ *và phép quay* Q_O^α *với* $\alpha \neq 0^0,\ 180^0,\ O \notin l$. *Dựng đường thẳng* d *sao cho nó song song với ảnh của nó qua phép đồng dạng*

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}_l \circ Q_O^\alpha.$$

8.3 Một số phép biến hình khác

8.3.1 Phép co trục

Định nghĩa.

Định nghĩa 22. *8 Phép biến hình trên mặt phẳng tọa độ* Oxy *có biểu diễn tọa độ*

$$\begin{cases} x' &= kx \\ y' &= y \end{cases} \ (k \in \mathbb{R}^*)\ (8)$$

được gọi là phép co trục Ox *tỷ số* k *và được ký hiệu là* $C[x;k]$. *Tương tự ta cũng có phép co trục* Oy *tỷ số* l, *ký hiệu là* $C[y;l]$, *là phép biến hình có biểu diễn tọa độ*

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= ly \end{cases} \ (l \in \mathbb{R}^*)\ (8.1)$$

Phép biến hình trên mặt phẳng tọa độ Oxy có biểu diễn tọa độ

$$\begin{cases} x' &= kx \\ y' &= ly \end{cases} \ (k, l \in \mathbb{R}^*) \ (8.2)$$

được gọi là phép co mặt phẳng tọa độ Oxy theo các tỷ số $(k;l)$ *(nhớ thứ tự) và được ký hiệu là* $C[k;l]$

Các tính chất

1. *Các phép co được định nghĩa như trên đều là những phép biến hình affin. Trong đó:*
$$det(C[x;k]) = k \ ; \ det(C[y;l]) = l \ ; \ det(C[k;l]) = kl.$$
2. $C[x;1] \equiv C[y;1] \equiv C[1;1] \equiv Id \ ; \ C[k;k] \equiv V[O;k]$.
3. *+) Mọi điểm thuộc trục tung đều là điểm bất động của* $C[x;k]$. *+) Mọi đường thẳng cùng phương với* $x'Ox$ *đều là hình kép của* $C[x;k]$. *+) Mọi điểm thuộc trục hoành đều là điểm bất động của* $C[y;l]$. *+) Mọi đường thẳng cùng phương với* $y'Oy$ *đều là hình kép của* $C[y;l]$. *+) Gốc tọa độ* $O(0;0)$ *là điểm bất động duy nhất của* $C[k;l]$.
4. $C[k;l] = C[x;k] \circ C[y;l] \ ; \ C^{-1}[x;k] = C[x;\frac{1}{k}] \ ; \ C^{-1}[y;l] = C[y;\frac{1}{l}]$.
5. $C[x;-k] = \mathcal{D}_{y'Oy} \circ C[x;k] \ ; \ C[y;-l] = \mathcal{D}_{x'Ox} \circ C[y;l]$. *Bởi vậy, từ đây ta chỉ xét các phép co trục với các tỷ số* k, $l > 0 \ ; \neq 1$. *Nếu* $0 < k < 1$ *thì* $C[x;k]$ *còn được gọi là phép co trục hoành, nếu* $k > 1$ *thì* $C[x;k]$ *còn được gọi là phép dãn trục hoành. Tương tự đối với* $C[y;l]$.

Bài tập áp dụng

Bài toán 81. *1 Hãy chứng minh tất cả các tính chất trên.*

Bài toán 82. *2 Chứng minh rằng bằng một phép co trục từ đồ thị hàm số* $y = f(x)$ (G) *ta có thể thu được đồ thị các hàm số* $y = f(kx) \ ; \ y = lf(x)$.

Bài toán 83. *3 Chứng minh rằng Elip là ảnh của một đường tròn qua một phép co trục tương ứng.*

Bài toán 84. *4 Hãy chỉ ra cách dựng đồ thị hàm số* $y = af(kx+m)+b$ *biết đồ thị hàm số* $y = f(x)$.

Bài toán 85. *5 Tìm giá trị lớn nhất của tam giác nội tiếp trong Elip:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bài toán 86. *6 Hãy chỉ ra cách dựng ảnh của các hình phẳng quen thuộc: điểm, đường thẳng, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn, miền góc, đa giác, ... qua các phép co trục trên.*

Bài toán 87. *7 Hãy tìm một số bất biến của các phép co trục nói trên.*

8.3.2 Phép nghịch đảo

Các phép biến hình đã được xét trên đây đều là những phép biến hình tuyến tính. Ta có thể xây dựng các phép biến hình khác nữa và xét các tính chất và những ứng dụng của chúng. Bây giờ ta sẽ xét một phép biến hình phi tuyến. Một trong những phép biến hình phi tuyến có nhiều ứng dụng trong hình học là phép nghịch đảo.

Định nghĩa.

Định nghĩa 23. *9 Ta ký hiệu $[\P]$ là mặt phẳng suy rộng hay là mặt phẳng đủ. Đó là mặt phẳng thông thường được bổ sung thêm một điểm mới, đặc biệt, gọi là điểm vô cực và ký hiệu là điểm ∞ mà có tính chất sau: Mọi đường thẳng trên mặt phẳng $[\P]$ đều đi qua điểm ∞.*

Định nghĩa 24. *10 Phép nghịch đảo cực I tỷ số k $(k \neq 0)$, ký hiệu là $\mathcal{N}[I;k]$ là một phép biến hình : $[\P] \longrightarrow [\P]$ được xác định như sau:*

$$\mathcal{N}[I;k](M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{I,\ M,\ M'} \\ \Longrightarrow IM . \Longrightarrow IM' = k \end{cases} .$$

Biểu diễn tọa độ

Định lí 25. *Nếu $O(0;0)$ thì $\mathcal{N}[O;k]$ có biểu diễn tọa độ:*

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{kx}{x^2+y^2} \\ y' &= \dfrac{ky}{x^2+y^2} \end{cases} \quad (9)$$

Các tính chất

Hệ quả 9. *1$\mathcal{N}[O;-k] = \mathcal{D}_O \circ \mathcal{N}[O;k]$. Bởi vậy, từ đây ta chỉ xét trường hợp $k > 0$.*

Hệ quả 10. *2 $\mathcal{N}^{-1}[I;k] = \mathcal{N}[I;k]$. Hay là $\mathcal{N}[I;k]$ là phép biến hình đối hợp.*

Hệ quả 11. *3 $\mathcal{N}[I;k]$ $(k > 0)$ biến:*

1. *Đường tròn $\mathcal{C}(I;\sqrt{k})$ thành chính nó.*
2. *Đường thẳng đi qua I thành chính nó.*
3. *Đường thẳng không đi qua I thành đường tròn đi qua I.*
4. *Đường tròn không đi qua I thành đường tròn không đi qua I.*
5. *Đường tròn $\mathcal{C}(E;R)$ đi qua I thành đường thẳng Δ không đi qua I và $\Delta \perp (EI)$.*
6. *Điểm I thành điểm ∞ và điểm ∞ thành điểm I.*

Hệ quả 12. *4 $\mathcal{N}[I;k]$ bảo toàn sự tiếp xúc của hai đường tròn và bảo toàn góc giữa hai đường tròn cắt nhau.*

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 8.3.1. *1 Cho một điểm O cố định nằm ngoài một đường thẳng Δ cố định. Với mỗi điểm m chạy trên Δ ta lấy điểm N trên nửa đường thẳng $[OM)$ sao cho $\overline{OM}.\overline{ON} = 1$. 1) Tìm quỹ tích $\mathcal{G}$ của điểm N khi M chạy trên đường thẳng Δ. 2) Cho A là điểm cố định trên đường thẳng Δ. Vẽ vòng tròn $\mathcal{C}$ bất kỳ đi qua O và A. $\mathcal{C}$ cắt $\mathcal{G}$ tại điểm thứ hai $P \neq O$ và cắt Δ tại điểm thứ hai $Q \neq a$. Chứng minh rằng đường thẳng (PQ) luôn đi qua một điểm cố định trên $\mathcal{G}$.*

Lời giải .
1) Do $\overline{OM}.\overline{ON} = 1$ và $\overline{O,\ M,\ N}$ nên $N = \mathcal{N}[O; 1](M)$. Vậy quỹ tích điểm N là ảnh của đường thẳng Δ qua $\mathcal{N}[O; 1]$. Đó chính là đường tròn đi qua cực O.$\boxtimes$
2) Gọi $B,\ R$ là các giao điểm của các đường thẳng (OA), (OQ) với đường tròn $\mathcal{G}$, S là giao điểm của đường thẳng PO với Δ, còn F là giao điểm của đường thẳng PQ với đường tròn $\mathcal{G}$. Ta có $B,\ R,\ P$ lần lượt là ảnh của $A,\ Q,\ S$ qua $\mathcal{N}[O; 1]$. Ngoài ra, $\mathcal{N}[O; 1] :\ \mathcal{C} \longrightarrow$ đường thẳng BRS. Dễ thấy tứ giác $RQSP$ nội tiếp (phương tích) $\Rightarrow \hat{P} = \hat{R} \Rightarrow \overset{\frown}{OF} = \overset{\frown}{OB}$. Do B là điểm cố định nên F cũng là điểm cố định.$\boxtimes$

Ví dụ 8.3.2. *2 Cho ba điểm $A,\ B,\ C$ nằm trên một đường thẳng. Qua $A,\ B$ và một điểm E biến thiên trên đường trung trực Δ của đoạn AB ta dựng một đường tròn. Đường thẳng CE cắt đường tròn đó tại M. Tìm quỹ tích $\mathcal{G}$ của điểm M khi E chạy trên Δ.*
HDG: Do $\overline{CM}.\overline{CE} = \overline{CA}.\overline{CB} \Rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{N}[C; k](\Delta)$, trong đó $k = \overline{CA}.\overline{CB}$.

Ví dụ 8.3.3. *Cho ba điểm cố định $A,\ B,\ C$ trên một đường thẳng. Một đường tròn $\mathcal{C}$ biến thiên tiếp xúc với đường thẳng đó tại C. Tiếp tuyến thứ hai xuất phát từ A tiếp xúc với đường tròn tại T. Đường thẳng BT cắt đường tròn đó tại M. Tìm quỹ tích $\mathcal{G}$ của điểm M.*
HDG: Do $\overline{BM}.\overline{BT} = \overline{BC}^2$, $\overline{AT} = \overline{AC} \Rightarrow$ quỹ tích của điểm T là đường tròn $\mathcal{A}$ tâm A, bán kính AC và $\mathcal{G} = \mathcal{N}[B; BC^2](\mathcal{A})$. Đó là đường tròn đường kính CD với điểm D được xác định từ công thức $\overline{BD}.\overline{BC'} = BC^2$, trong đó $C' = \mathcal{D}_A(C)$.

Ví dụ 8.3.4. *3Cho một đường tròn (O) cố định, tâm O và một đường kính AB biến thiên của đường tròn đó. P là một điểm cố định của mặt phẳng. Gọi A', B' là giao điểm của các đường thẳng PA, PB với đường ròn (O). Chứng minh rằng: 1) Đường thẳng $A'B'$ đi qua một điểm cố định. 2) Đường tròn $(PA'B')$ cũng đi qua một điểm cố định thứ hai.*
HDG: Gọi Q là giao điểm của PO với đường tròn (PAB), ta có

$$\overline{OP}.\overline{OQ} = \overline{OA}.\overline{OB} = -R^2$$

suy ra đường tròn (PAB) đi qua một điểm cố định thứ hai là Q. Xét $\mathcal{N}[P; k]$ với k là phương tích của điểm P đối với đường tròn (O). Ta có ảnh của đường tròn (PAB) là đường thẳng $A'B'$ và ảnh của đường tròn $(PA'B')$ là đường thẳng AB. Từ đó suy ra
1) $A'B'$ đi qua điểm cố định $H = \mathcal{N}[P; k](Q)$.
2) $(PA'B')$ đi qua điểm cố định $J = \mathcal{N}[P; k](O)$.

Bài tập áp dụng

Bài toán 88. *1 Hãy chứng minh các hệ quả trên.*

Bài toán 89. *2 Lập biểu diễn tọa độ của* $\mathcal{N}[I;k]$ *với* $I(a;b)$.

Bài toán 90. *3 Trong hệ quả 1 có thể thay* O *bởi điểm* I *bất kỳ được không?.*

Bài toán 91. *4 Hãy so sánh* $\mathcal{N}[O;k]\circ\mathcal{D}_O$ *với* $\mathcal{D}_O\circ\mathcal{N}[O;k]$.

Bài toán 92. *5 Cho* $\mathcal{N}[I;k]$ *biến các điểm* $A,\ B\notin\{I;\infty\}$ *lần lượt thành các điểm* $A',\ B'$. *Chứng minh rằng*

$$A'B'=|k|\frac{AB}{IA.IB}.$$

Bài toán 93. *6 Chứng minh định lý Ptôlêmê: Tứ giác lồi* $ABCD$ *nội tiếp* $\Leftrightarrow AC.BD=AB.CD+AD.BC$. **Chỉ dẫn:** *Xét* $\mathcal{N}[A;1]$.

Bài toán 94. *7 Cho tứ diện* $ABCD$.

1. *Chứng minh rằng từ các đoạn có độ dài bằng* $AB.CD,\ BC.AD,\ CA.DB$ *có thể dựng được một tam giác.* **Chỉ dẫn:** *Xét* $\mathcal{N}[D;k]\ \ (k>0)$.
2. *Chứng minh rằng nếu* $AB.CD=BC.AD=CA.DB$ *thì chúng bằng nhau.*
3. *Chứng minh rằng nếu góc giữa các cặp cạnh đối bằng nhau thì chúng cùng bằng* 90^o.
4. *Trên các cạnh* $DA,\ DB,\ DC$ *lấy các điểm* $A_1,\ B_1,\ C_1$ *sao cho các tứ giác* $AA_1B_1B,\ BB_1C_1C$ *nội tiếp. Chứng minh rằng tứ giác* AA_1C_1C *cũng nội tiếp và tồn tại một hình cầu đi qua 6 điểm* $A,\ B,\ C,\ A_1,\ B_1,\ C_1$.

Bài toán 95. *8 Cho tam giác đều* ABC *nội tiếp trong đường tròn* $\mathcal{C}(O)$. *1) Chứng minh rằng với điểm* M *bất kỳ thuộc* $\mathcal{C}(O)$, *trong ba đoạn* $MA,\ MB,\ MC$ *có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn kia. 2) Tìm tập hợp các điểm* M *(trên mặt phẳng rồi sau đó trong không gian) sao cho từ ba đoạn* $MA,\ MB,\ MC$ *có thể dựng được một tam giác.*

Bài toán 96. *9 Cho hai đường tròn* $C(O;R)$ *và* $C'(O';R')$ *tiếp xúc ngoài với nhau. Một đường thẳng* Δ *tiếp xúc với* $C,\ C'$ *lần lượt tại hai điểm* $A,\ B$ *khác nhau. Hãy dựng đường tròn tiếp xúc với* $C,\ C'$ *và* Δ. **Chỉ dẫn:** *Xét* $\mathcal{N}[A;AB^2]$.

Bài toán 97. *10 Cho hai đường tròn* $C<\ C'$ *cắt nhau tại hai điểm* $A,\ B$ *phân biệt. Trên đường thẳng* (AB) *lấy điểm* $P\neq A,\ B$ *và nằm ngoài* $C,\ C'$. *Hãy dựng đường tròn đi qua* P, *tiếp xúc với* C *và* C'. **Chỉ dẫn:** *Xét* $\mathcal{N}[P;PA.PB]$.

Bài toán 98. *11 Chứng minh hệ thức Euler trong tam giác:* $OI^2=R^2-2Rr$, *trong đó* $O,\ I$ *lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.* **Chỉ dẫn:** *Xét* $\mathcal{N}[I;r^2]$.

Bài toán 99. *12 Cho đường tròn* C *đường kính* NS. Δ *là tiếp tuyến với* C *tại* S. *Điểm* O *nằm ngoài hình tròn* C *nhưng không nằm trên tiếp tuyến tại* N *của* C. *Kẻ hai tiếp tuyến* $OA,\ OB$ *tới* C. *Các đường thẳng* $(NA),\ (NO),\ (NB)$ *lần lượt cắt* Δ *tại* $A',\ O',\ B'$. *Chứng minh rằng* O' *là trung điểm của* $A'B'$. **Chỉ dẫn:** *Xét* $\mathcal{N}[N;NS^2]$.

8.4 Bài tập áp dụng phép biến hình

Trong phần này ta sẽ đưa ra một số bài tập nhằm mở rộng, nghiên cứu sâu hơn lý thuyết về các phép biến hình bằng phương pháp giải tích dựa vào biểu diễn tọa độ của nó.

8.4.1 Bài tập lý thuyết

Bài toán 100. *1 Hãy viết phương trình (tổng quát, tham số, chính tắc) của đường thẳng trong các hệ trục tọa độ: affin, cực và tỷ cự.*

Bài toán 101. *2 Tùy theo các giá trị của các hệ số, hãy khảo sát hình dạng của đường cong $\mathcal{G}$ được cho bởi phương trình bậc hai tổng quát trên mặt phẳng tọa độ Oxy:*

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \ \ (\text{với } |a| + |b| + |c| \neq 0).$$

Bài toán 102. *3 Nghiên cứu một số phép biến hình trên mặt phẳng tọa độ có các biểu diễn tọa độ khác.*

Bài toán 103. *4 Xây dựng các phép biến hình trong không gian tương tự với những phép biến hình phẳng đã học và nghiên cứu các phép biến hình trong không gian đó gồm: +) Định nghĩa (hình học và vectơ). +) Biểu diễn tọa độ. +) Phương pháp dựng ảnh. +) Các tính chất, các bất biến, hình kép, ... +) Sử dụng phép biến hình trong không gian giải bài toán hình học không gian.*

Bài toán 104. *5 Nếu quy tắc f áp dụng trên toàn bộ mặt phẳng ¶ không là song ánh thì f không là phép biến hình trên ¶. Khi đó, nếu tồn tại tập $\mathcal{D} \subseteq$ ¶ sao cho quy tắc f đó : $\mathcal{D} \longrightarrow f(\mathcal{D})$ là song ánh thì ta cũng gọi quy tắc $f : \mathcal{D} \longrightarrow f(\mathcal{D})$ là một phép biến hình trên miền $\mathcal{D}$. Hãy xây dựng một số phép biến hình như vậy.*

Bài toán 105. *6 Hãy nghiên cứu phép biến hình được xác định bởi biểu diễn tọa độ:*

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{1}{x} \\ y' &= \dfrac{1}{y} \end{cases}.$$

Bài toán 106. *7 Cho hai phép biến hình f, g có các biểu diễn tọa độ:*

$$f : \begin{cases} x' &= f_1(x; y) \\ y' &= f_2(x; y) \end{cases} \quad \text{và} \quad g : \begin{cases} x' &= g_1(x; y) \\ y' &= g_2(x; y) \end{cases}.$$

Hãy viết biểu diễn tọa độ của $f \circ g$ và $g \circ f$.

Bài toán 107. *8 Cho phép biến hình f. Cho điểm M biến thiên trong miền G. Điểm M' biến thiên thoả mãn $M' = f(M)$. Chứng minh rằng quỹ tích của điểm M' là $f(G)$. Bài tập này là cơ sở cho phương pháp tìm quỹ tích (tập hợp điểm) bằng cách sử dụng phép biến hình.*

Bài toán 108. *9 Cho a, b, c, d, p, q, r, s là các số thực sao cho hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{ax+by}{px+qy} \\ y' &= \dfrac{cx+dy}{rx+sy} \end{cases} (i)$$

có nghiệm duy nhất $(x;y) \in \mathcal{D}$ với mỗi $(x';y') \in \mathcal{D}_1$. 1) Hãy xác định các tập $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$. 2) Hãy nghiên cứu phép biến hình có biểu diễn tọa độ trên từ $\mathcal{D}$ lên $\mathcal{D}_1$.

Bài toán 109. *10 Cho một đường thẳng d và một vectơ $\vec{u} \parallel d$. Phép biến hình $f = \mathcal{D}_d \circ T_{\vec{u}}$ được gọi là phép đối xứng trượt trục d, vectơ trượt $\vec{u}$, ký hiệu là $\mathcal{D}[d;\vec{u}]$. Hãy chứng minh:*

1. $\mathcal{D}_d \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ \mathcal{D}_d$.
2. *Phép đối xứng trượt là một phép dời hình nghịch.*
3. $\mathcal{D}[d;\vec{0}] = \mathcal{D}_d$.
4. *Cho $d:\ Ax + By + C = 0\ \ (A^2 + B^2 \neq 0)$ và $\vec{u}(a;b)$. Hãy viết biểu diễn tọa độ của $\mathcal{D}[d;\vec{u}]$.*

Bài toán 110. *11 Chứng minh rằng mọi phép dời hình đều: +) Hoặc là một phép tịnh tiến (kể cả phép đồng nhất). +) Hoặc là một phép quay (kể cả trường hợp đặc biệt là phép đối xứng tâm). +) Hoặc là một phép đối xứng trục. +) Hoặc là tích của hữu hạn các phép biến hình nói trên.*
Bởi vậy, ba phép dời hình: $T_{\vec{u}}$; Q_I^α ; $\mathcal{D}_\Delta$ còn được gọi là ba phép dời hình cơ bản.

Bài toán 111. *12 Chứng minh rằng:*

1. $T_{\vec{u}} = \mathcal{D}_d \circ \mathcal{D}_\Delta$ *với* $\Delta \parallel d$.
2. $Q_I^\alpha = \mathcal{D}_d \circ \mathcal{D}_\Delta$ *với* Δ *cắt* d.
3. $\mathcal{D}_I = \mathcal{D}_{d_1} \circ \mathcal{D}_{d_2}$ *với* $d_1 \perp d_2$ *tại* I.
4. $\mathcal{D}[d;\vec{u}] = \mathcal{D}_{d_1} \circ \mathcal{D}_{d_2} \circ \mathcal{D}_{d_3}$.
5. *Mọi phép dời hình đều có thể được phân tích thành tích của k phép đối xứng trục. Nếu k chẵn thì ta có phép dời hình thuận, còn nếu k lẻ thì ta được phép dời hình nghịch. (Bởi vậy, thực chất chỉ có một phép dời hình cơ bản là phép đối xứng trục.)*

Bài toán 112. *13 Ta biết rằng nếu phép dời hình f biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cùng chiều hoặc ngược chiều). Hãy chứng minh rằng nếu $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cùng chiều hoặc ngược chiều) thì tồn tại một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.*

Bài toán 113. *15 1) Hãy chứng minh định lý sau:*

Định lí 26. *Cho phép dời hình $f \neq Id$. Chứng minh rằng:*

$$f \ \text{ là một phép quay } \Leftrightarrow f \ \text{ chỉ có đúng một điểm bất động duy nhất.}$$

Bài toán 114. *16 Trên mặt phẳng ¶ cho hai hệ tọa độ affin:* $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ $(*)$ *và* $\{O'; \vec{i'}; \vec{j'}\}$ $(*')$*. Biết tọa độ của điểm* O' *và của các vectơ* $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ *đối với hệ tọa độ* $(*)$ *là:*

$$\vec{i'} = (a; a')\ ;\ \vec{j'} = (b; b')\ ;\ O'(c; c').$$

Giả sử điểm M *bất kỳ của mặt phẳng ¶ có các tọa độ* $M(x; y)$ / $(*)$ *và* $M(x'; y')$ / $(*')$*. Chứng minh rằng*

$$\begin{cases} x & = ax' + by' + c \\ y & = a'x' + b'y' + c' \end{cases} (I)$$

(I) *còn được gọi là công thức đổi tọa độ affin từ hệ cơ sở* $(*')$ *sang hệ cơ sở* $(*)$*. Biểu thức* $det = ab' - a'b$ $(\neq 0)$ *còn được gọi là định thức của công thức* (I)*.*

Bài toán 115. *17 Chứng minh rằng: 1) Mọi phép dời hình thuận đều là một phép tịnh tiến hoặc một phép quay (kể cả hai trường hợp đặc biệt của phép quay là* $\mathcal{D}_I$ *và* Id *). 2) Mọi phép dời hình thuận đều là một phép đối xứng trượt (kể cả trường hợp đặc biệt của nó là* $\mathcal{D}_\Delta$ *).*

Bài toán 116. *18 Cho hai đoạn thẳng bằng nhau* AB *và* $A'B'$*. Gọi* M, M' *lần lượt là hai điểm chia* AB *và* $A'B'$ *theo tỷ số* k $(k \neq 1)$*. Tìm quỹ tích trung điểm của các đoạn thẳng* MM' *khi* AB *cố định, còn* $A'B'$ *biến thiên nhưng luôn thoả mãn* $A'B' = AB$*.*

Bài toán 117. *19 Trên mặt phẳng phức* $\mathbb{C}$ *với các phép toán đối với số phức, hãy chứng minh các phép biến hình sau có biểu diễn tọa độ tương ứng:*

1. $\mathcal{D}_O :\ z' = -z$ *trong đó* $O(0)$ *là gốc tọa độ.*
2. $\mathcal{D}_{x'Ox} :\ z' = \overline{z}$*. (*$\overline{z}$ *là số phức liên hợp của số phức* z*).*
3. $Q_O^\alpha :\ z' = qz$ $(q = \cos\alpha + i.\sin\alpha\ )$.
4. V_O^k $(k \in \mathbb{R}\ ) :\ z' = kz$.
5. $Q_O^\alpha \circ V_O^k :\ z' = pz$ $(p = k(\cos\alpha + i\sin\alpha\ )$.
6. *Cho* $A(a)$*, khi đó* $\mathcal{D}_A :\ z' = 2a - z$.
7. *Cho* $A(a)$*, khi đó* $Q_A^\alpha :\ z' = q(z - a) + a$ *trong đó* q *được xác định như trên.*
8. *Cho* $A(a)$*, khi đó* $V_A^k :\ z' = k(z - a) + a$.
9. *Cho* $A(a)$*, khi đó* $Q_A^\alpha \circ V_A^k :\ z' = p(z - a) + a$ *trong đó* p *được xác định như trên.*
10. $\mathcal{N}[O; k] :\ z' = \dfrac{k}{z}$.

8.4.2 Sử dụng phép biến hình giải bài tập hình học

Trong mục này ta xét những bài tập hình học thuần tuý được giải bằng cách sử dụng phép biến hình. Ngoài những bài tập đã được nêu trong SGK hoặc trong các tài liệu tham khảo, ta đưa ra thêm một số bài tập sau. Những bài tập được đưa ra thường không có lời giải hoặc chỉ có hướng dẫn giải (HDG:).

Bài tập về phép tịnh tiến song song

Bài toán 118. *1 Cho hai dây cung không cắt nhau AB, CD của đường tròn tâm O. Tìm trên đường tròn một điểm X sao cho các dây cung AX, BX định ra trên dây cung CD một đoạn EF có độ dài bằng a cho trước.*

Bài toán 119. *2 Cho hai đường tròn $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Hãy dựng qua A đường thẳng Δ sao cho đoạn thẳng của đường thẳng đó nămg trong hai đường tròn đã cho có độ dài $2l$ cho trước.*

Bài toán 120. *3 Cho hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau và hai điểm A, B nằm ngoài dải mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng đó (A về phía d_1, còn B về phía d_2). Tìm $M \in d_1$, $N \in d_2$ sao cho $MN \perp d_1$ và $AM + MN + NB$ là ngắn nhất.*

Bài toán 121. *4 Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} < \hat{D}$. Chứng minh rằng $BD < AC$.*

Bài tập về phép đối xứng

Bài toán 122. *1 Cho điểm A nằm trong miền góc nhọn xOy cho trước. Hãy dựng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất sao cho các đỉnh B, C nằm trên hai cạnh (mỗi đỉnh thuộc một cạnh) của góc đã cho.*

Bài toán 123. *2 Cho tam giác thường $A_1A_2A_3$. Gọi A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 là các đường phân giác trong của tam giác. Ký hiệu B_{ij} là các điểm đối xứng với đỉnh A_i qua đường thẳng A_jC_j. Chứng minh rằng các đường thẳng $B_{12}B_{21}$, $B_{13}B_{31}$, $B_{32}B_{23}$ đôi một song song.*

Bài toán 124. *3 Cho tam giác nhọn ABC. Hãy nội tiếp trong tam giác đó một tam giác có chu vi nhỏ nhất.*

Bài toán 125. *4 Chứng minh rằng nếu một hình phẳng có hữu hạn trục đối xứng thì các trục đối xứng đó cắt nhau tại một điểm và từng cặp trục kề nhau tạo với nhau những góc bằng nhau.*

Bài toán 126. *5 Chứng minh rằng một đa giác có tâm đối xứng khi và chỉ khi số cạnh của đa giác là chẵn và hai cặp cạnh đối bất kỳ luôn song song và bằng nhau.*

Bài toán 127. *6 Trong đường tròn $\mathcal{C}$ cho hai dây cung AB và CD. Q là điểm bất kỳ, cố định trên dây cung CD. Tìm trên đường tròn điểm M sao cho các đường thẳng AM, BM chắn trên dây CD một đoạn thẳng KL bị chia đôi bởi điểm Q.*

Bài toán 128. *7 Cho đường tròn $\mathcal{C}$ và ba đường thẳng a, b, c đi qua tâm O của $\mathcal{C}$. Hãy dựng tam giác ABC nhận $\mathcal{C}$ làm đường tròn nội tiếp và có các dỉnh nằm trên các đường thẳng đã cho (mỗi đỉnh thuộc một đường).*

Bài toán 129. *8 Hãy dựng tứ giác $ABCD$ biết độ dài các cạnh của tứ giác và đường chéo AC là phân giác của góc trong $\hat{A}$.*

Bài toán 130. *9 Trên mặt phẳng cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3. Biết rằng d_1 cắt d_2 tại P. Hãy dựng một hình vuông có một đường chéo nằm trên đường thẳng d_3 và hai đỉnh không thuộc đường chéo đó lần lượt nằm trên các đường thẳng d_1 và d_2.*

Bài tập về phép quay.

Bài toán 131. *1 1) Hãy chứng minh định lý sau:*

Định lí 27. *Cho hai điểm O_1, O_2 phân biệt, hai góc α_1, α_2 cùng dấu, thoả mãn $|\alpha_1 + \alpha_2| < 2\pi$. Chứng minh rằng:*

$$Q_{O_2}^{\alpha_2} \circ Q_{O_1}^{\alpha_1} = Q_O^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Trong đó O là giao của hai đường thẳng d_1, d_2 với d_1 là tạo ảnh của đường thẳng (O_1O_2) qua phép quay tâm O_1, góc $\dfrac{\alpha_1}{2}$ còn d_2 là ảnh của đường thẳng (O_1O_2) qua phép quay tâm O_2, góc $\dfrac{\alpha_2}{2}$

2) Với các điều kiện của định lý trên, hãy xác định $Q_{O_1}^{\alpha_1} \circ Q_{O_2}^{\alpha_2}$ và chứng tỏ rằng tích của hai phép quay khác tâm không có tính giao hoán. 3) Hãy xét trường hợp $|\alpha_1 + \alpha_2| = 2\pi$. Sử dụng kết quả này ta có thể giải được bốn bài tập tiếp theo sau đây.

Bài toán 132. *2 Trên mặt phẳng cho hai hình vuông $A_1B_1A_2C_1$ và $A_2B_2A_3C_2$ với đỉnh chung A_2. Gọi $)_1$, O_2 là tâm của các hình vuông đó, B, C lần lượt là trung điểm của các cạnh B_1B_2, C_1C_2. Chứng minh rằng O_1BO_2C là một hình vuông. HDG: Xét $f := Q_{O_2}^{90^0} \circ Q_{O_1}^{90^0} : B_1 \longrightarrow B_2$.*

$$\Rightarrow f = \mathcal{D}_B \Rightarrow \Delta O_1BO_2 \text{ vuông cân. Tương tự, } \Delta O_1CO_2 \text{ vuông cân.}\boxtimes$$

Bài toán 133. *3 Trên các cạnh A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 của tam giác $A_1A_2A_3$ dựng các hình vuông với các tâm O_1, O_2, O_3 nằm về phía ngoài của tam giác. Chứng minh rằng: 1) Các đoạn O_1O_2 và O_3A_3 bằng nhau và vuông góc với nhau. 2) Các trung điểm của các cạnh A_3A_1, O_1O_2, A_3A_2, A_3O_3 là các đỉnh của một hình vuông. 3) Diện tích của hình vuông tâm O_3 gấp tám lần diện tích của hình vuông nói trong phần 2). HDG: 1) Gọi B_1 là trung điểm của A_2A_3, có $Q_{B_1}^{90^0} : A_3O_3 \longrightarrow O_1O_2 \Rightarrow \boxtimes$. 2) Gọi B_2 là trung điểm của A_1A_3. Xét $Q_{B_2}^{90^0} \circ Q_{B_1}^{90^0}$ và làm tương tự bài tập trên. 3) B_2B_1 là đường trung bình của tam giác $A_1A_2A_3$.*

Bài toán 134. *4 Trên mặt phẳng cho 12 điểm là các đỉnh của 4 hình vuông:*

$$A_1B_1A_2C_1,\ A_2C_2A_3B_2,\ A_3B_3A_4C_3,\ A_4C_4A_1B_4$$

(các đỉnh của các hình vuông được xếp theo chiều kim đồng hồ). Chứng minh rằng $B_1B_2B_3B_4$ và $C_1C_2C_3C_4$ là các hình bình hành (có thể suy biến) thu được từ nhau qua một phép quay góc 90^0. HDG: Xét các tích của hai phép quay với góc quay 90^0 và tâm quay lần lượt là các đỉnh tương ứng của các hình vuông đã cho.

Bài toán 135. *5 Hai điểm A, B chuyển động đều với cùng vận tốc góc trên hai đường tròn $\mathcal{C}(O_1)$, $\mathcal{C}(O_2)$ ngược chiều kim đồng hồ. Chứng minh rằng đỉnh C của tam giác đều ABC cũng chuyển động đều trên một đường tròn nào đó.*

Bài toán 136. *6 Trong tam giác đều ABC cho điểm M sao cho*

$$AM = 1\ ;\ BM = \sqrt{3}\ ;\ CM = 2.$$

Hãy tính BC, $\angle AMB$; $\angle AMC$.
HDG: Xét phép quay tâm (C) góc 60^0 sao cho $A \longrightarrow B$.
Đáp số:$BC = \sqrt{7}$, $\angle AMB = 150^0$; $\angle AMC = 120^0$.

Bài toán 137. *7 Trong tam giác đều ABC cho điểm M sao cho*

$$AM = 1\ ;\ BM = \sqrt{2}\ ;\ \angle AMB = 105^0.$$

Hãy tính CM, $\angle BMC$.
Đáp số:$CM = 1$, $\angle BMC = 105^0$.

Bài toán 138. *8 Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 120^0$. Trong hình thoi lấy điểm M sao cho $AM = 1$, $CM = 2$, $BM = 3$. Hãy tính DM, AB.*
HDG: Xét phép quay $Q_A^{60^0}$ sao cho $C \longrightarrow B$. **Đáp số:**$AB = \sqrt{7}$, $DM = \sqrt{3}$.

Bài toán 139. *9 Cho tam giác đều ABC. Trong góc $\angle ACB$ lấy điểm M sao cho*

$$AM = \sqrt{2},\ BM = 2,\ \angle AMC = 15^0.$$

Hãy tính CM và $\angle BMC$.
HDG: Xét phép quay $Q_C^{60^0}$ sao cho $A \longrightarrow B$. **Đáp số:**$CM = 1 + \sqrt{3}$, $\angle BMC = 30^0$.
Chú ý . *Trong các bài tập $6 \longrightarrow 9$ trên đây ta sử dụng một kết quả quan trọng của hình học tam giác là:*

Định lí 28 (Pompei)**.** *Trên mặt phẳng chứa tam giác đều ABC lấy điểm M bất kỳ. Khi đó: 1) Từ ba đoạn AM, BM, CM có thể dựng được một tam giác khi và chỉ khi M không thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. 2) Trong ba đoạn trên có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn còn lại khi và chỉ khi M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Bài toán 140. *10 Hãy tìm tập những điểm mà từ ba đoạn thẳng nói trong chú ý trên có thể dựng được: a) Một tam giác vuông. b) Một tam giác nhọn. c) Một tam giác tù. d) Một tam giác cân. d) Một tam giác đều.*

Bài toán 141. *11 Cho tam giác vuông cân ABC, $C = 90^0$. Trong tam giác lấy điểm M sao cho $AM = 2$, $BM = \sqrt{2}$, $CM = 1$. Hãy tính AC, $\angle BMC$, $\angle CMA$.*
HDG: Xét phép quay $Q_C^{90^0}$ sao cho $A \longrightarrow B$.
Đáp số:$AC = \sqrt{5}$, $\angle BMC = 135^0$, $\angle CMA = 90^0$.

Bài toán 142. *12 Cho tam giác vuông cân ABC, $C = 90^0$. Trong tam giác lấy điểm M sao cho $AM = 2$, $\angle AMB = 120^0$, $\angle AMC = 105^0$. Tính BM, CM.*
Đáp số:$BM = \sqrt{3}$, $CM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 143. *13 Cho tam giác vuông cân ABC, $C = 90^0$. Trong góc ACB lấy điểm M sao cho $BM = CM$, $\angle AMC = 75^0$. Chứng minh rằng $AC = CM$, $\angle BMC = 60^0$.*

Bài toán 144. *14 Cho tam giác vuông cân ABC, $C = 90^0$. Trong góc ACB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, $CM = \sqrt{2}$, $\angle BMC = 105^0$. Hãy tính AM, AB, $\angle AMC$.*
Đáp số:$AM = \sqrt{3}$; $AB = 1 + \sqrt{3}$; $\angle AMC = 75^0$.

Các bài tập về phép biến hình nghịch đảo.

Xem thêm trong [3].

Bài toán 145. *1 Ta có thể coi đường thẳng trên [¶] là đường tròn đi qua điểm* ∞*. Khi đó, hãy chứng minh rằng* $\mathcal{N}[I;k]$ *biến tập các đường tròn vào chính nó. Ngoài ra đường tròn đi qua cực* I *sẽ biến thành đường tròn đi qua điểm* ∞ *(là ảnh của cực* I *), đường tròn đi qua điểm* ∞ *biến thành đường tròn đi qua cực* I *(là ảnh của điểm* ∞ *), đường tròn đi qua* I *và* ∞ *là hình kép của* $\mathcal{N}[I;k]$*.*

Bài toán 146. *2 Xét phép nghịch đảo* $\mathcal{N}[I;k]$ $(k > 0)$*. Ta biết rằng đường tròn* $\mathcal{C}(I;\sqrt{k})$ *là tập các điểm bất động của* $\mathcal{N}[I;k]$*. Nếu* $M' = \mathcal{N}[I;k](M)$ *thì hai điểm* $M,\ M'$ *còn được gọi là đối xứng với nhau qua đường tròn nghịch đảo* $\mathcal{C}(I;\sqrt{k})$*. Chứng minh rằng: 1) Với điểm* $M \in \mathcal{C} := \mathcal{C}(I;\sqrt{k})$*, ta có* $\mathcal{N}[I;k](m) = M$*. 2) Với điểm* M *nằm ngoài hình tròn* $\mathcal{C}$*, kẻ hai tiếp tuyến* $MA,\ MB$ *tới* $\mathcal{C}$*. Đường thẳng* (IM) *cắt đường thẳng* (AB) *tại* M' *(*M' *là trung điểm của* AB *). Khi đó hai điểm* $M,\ M'$ *đối xứng với nhau qua đường tròn* $\mathcal{C}$*. 3) Với điểm* M *nằm trong hình tròn* $\mathcal{C}$*, kẻ đường thẳng vuông góc với* (IM) *tại* M*. Đường thẳng đó cắt* $\mathcal{C}$ *tại hai điểm* $A,\ B$*. Dựng các tiếp tuyến với* $\mathcal{C}$ *tại* $A,\ B$*. Chúng cắt nhau tại* M'*. Khi đó hai điểm* $M,\ M'$ *đối xứng với nhau qua đường tròn* $\mathcal{C}$*.*

Bài toán 147. *3 Chứng minh rằng ảnh của miền trong của hình tròn* $\mathcal{C} := \mathcal{C}(I;\sqrt{k})$ *qua* $\mathcal{N}[I;k]$ *là miền ngoài của hình tròn* $\mathcal{C}$ *và ngược lại.*

Bài toán 148. *4 Chứng minh rằng qua* $\mathcal{N}[I;k]$ *ảnh của hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau hoặc là hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau, hoặc là một đường tròn và một tiếp tuyến của nó, hoặc là hai đường thẳng song song. Khi nào thì xảy ra mỗi trường hợp cụ thể?. Hãy xét trường hợp hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.*

Bài toán 149. *5 Trên đường tròn* $\mathcal{C}$ *cho hai điểm* $A,\ B$*. xét tất cả các cặp đường tròn* $T_1,\ T_2$ *nằm trong* $\mathcal{C}$ *sao cho* T_1 *tiếp xúc trong với* $\mathcal{C}$ *tại* A*,* T_2 *tiếp xúc trong với* $\mathcal{C}$ *tại* B *và* T_1 *tiếp xúc ngoài với* T_2 *tại* D*. Hãy tìm tập hợp tất cả các điểm* D*.*
HDG: *Xét phép nghịch đảo cực* A *với đường tròn nghịch đảo* T_1*.*
Ta ký hiệu X' *là ảnh của* X *qua phép nghịch đảo này. Khi đó:* $\mathcal{C}'$ *và* T_1' *là hai đường thẳng song song, tiếp xúc với đường tròn* T_2' *tại* B' *và* D'*. Gọi là tập hợp điểm cần tìm. Do* $\mathcal{C}$ *và các điểm* $A,\ B$ *là cố định nên* $\mathcal{C}',\ B'$ *là cố định. Ngoài ra, tia* $\Delta = [B'D')\perp\mathcal{C}' \Rightarrow \Delta$ *là cố định. Vậy* $D' \in \Delta$ *cố định. Khi* $T_1,\ T_2$ *thay đổi thì* $T_1',\ T_2'$ *thay đổi nhưng đường thẳng* Δ *không đổi và* $D' \in \Delta$*. Mặt khác, mỗi điểm* $D' \in \Delta$ *có thể là điểm tiếp xúc của một đường thẳng* T_1' *với một đường tròn* T_2' *tiếp xúc với* C' *tại* B'*. Vậy tia* Δ *là ảnh của , do đó là ảnh của tia* Δ *qua phép nghịch đảo trên. Đó là phần nằm trong hình tròn* $\mathcal{C}$ *của đường tròn* Ω *vuông góc với* $\mathcal{C}$ *tại* A *và* B*.*⊠

Bài toán 150. *6 Bốn đường tròn lần lượt tiếp xúc ngoài với nhau tại các điểm* $A,\ B,\ C,\ D$*. Chứng minh rằng bốn điểm* $A,\ B,\ C,\ D$ *đồng viên.*

Bài toán 151. *7 Trên đoạn* AB *lấy điểm* M *và dựng các nửa đường tròn* $C_1,\ C_2$ *với các đường kính* $AB,\ AM$*.. Đường tròn* C_3 *tiếp xúc với các nửa đường tròn trên và tiếp xúc với đường thẳng vuông góc với* (AB) *tại* M*. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung của* C_2 *và* C_3 *đi qua* B *(Hình 2).*

Bài toán 152. *8 Trên đoạn AB lấy điểm M và dựng các nửa đường tròn C_1, C_2, C_2 với các đường kính AB, AM, BM.. Đường tròn $C(O;r)$ tiếp xúc với các nửa đường tròn trên. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng (AB) (Hình 3).*

Bài toán 153. *9 Hãy dựng đường tròn $\mathcal{T}$ đi qua hai điểm A, B cho trước và tiếp xúc với một đường thẳng d cho trước.*
Lời giải .
<u>**Phân tích:**</u> *Giả sử đã dựng được $\mathcal{T}$. Xét $\mathcal{N}[A;1]$: $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$; $B \longrightarrow B'$; $d \longrightarrow d'$. Trong đó, $\mathcal{T}'$ là đường thẳng chứa B', còn d' là đường tròn chứa A. Đường thẳng $\mathcal{T}'$ tiếp xúc với đường tròn d'. Từ đó suy ra cách dựng $\mathcal{T}$:*
<u>**Cách dựng:**</u> *Dựng B', d' là ảnh của B, d qua $\mathcal{N}[A;1]$. Từ B' kẻ tiếp tuyến $\mathcal{T}'$ tới d'. Khi đó, $\mathcal{T} = \mathcal{N}[A;1](\mathcal{T}')$. Nói chung, bài toán sẽ có hai nghiệm hình.*

Bài toán 154. *10 Dựng đường tròn đi qua hai điểm cho trước và tiếp xúc với một đường tròn cho trước.*

Bài toán 155. *11 Dựng đường tròn tiếp xúc với một đường tròn $\mathcal{C}$ cho trước tại một điểm A cho trước và: a) với một đường thẳng d cho trước. b) với một đường tròn $\mathcal{T}$ cho trước.*

Bài toán 156. *12(Bài toán Apollonia) Dựng đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cho trước.*

Bài toán 157. *13 Trên mặt phẳng cho ba điểm A, B, D. Dựng hai đường tròn $C_1 \ni A$, $C_2 \ni B$ sao cho C_1, C_2 tiếp xúc với nhau tại D.*

Tài liệu tham khảo

1. *Nguyễn Đăng Phất*
   Các phép biến hình trong mặt phẳng và ứng dụng giải toán hình học. NXB Giáo dục 2005.

2. *Hàn Liên Hải, Phan Huy Khải và các tác giả khác.*
   Toán bồi dưỡng Hình học 10. NXB Hà Nội 1998.

3. *Phụ san tạp chí KBANT 5/97.*

4. *Lê Hải Châu.*
   Các bài thi chọn học sinh giỏi Toán PTTH toàn quốc. NXB GD 1995.

5. *Hội Toán học Việt Nam.*
   Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

6. *Tuyển các đề đề nghị IMO các năm từ 1984 đến 2000.*

7. *Đề thi vô địch 19 nước. NXB Hải Phòng.*

8. *KBAHT. Tạp chí (tiếng Nga) các năm 1980 - 1985.*

9. *Toán học trong nhà trường. Tạp chí (tiếng Nga) các năm 1980 - 1985.*

10. *Đ. O. Scliarxki ; N. N. Trenxop và I. M. Iaglom.*
    Tuyển tập các bài tập và Định lý của Toán sơ cấp. NXB Hayka 1976.

11. *Selected Problems from IMO XXX - XXXVI. NXB ĐHQG Hà Nội 1995.*

12. *J. Kurshac và các tác giả khác.*
    Tuyển các đề thi vô địch Hungary (Bản tiếng Nga). NXB Mir 1976.

13. *Thực hành giải toán sơ cấp . NXB Giáo dục 1987.*