Thứ 2, 18 tháng 7, 2011

Bài 1. Cho tập hợp $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ gồm bốn số nguyên dương phân biệt, ta ký hiệu tổng $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ bởi s_A. Giả sử n_A là số các cặp (i, j) với $1 \leq i < j \leq 4$ sao cho $a_i + a_j$ chia hết s_A. Tìm tất cả các tập hợp A gồm bốn số nguyên dương phân biệt mà với chúng n_A đạt được giá trị lớn nhất có thể.

Bài 2. Giả sử $\mathcal{S}$ là một tập hợp hữu hạn điểm trên mặt phẳng với ít nhất hai điểm. Giả thiết rằng không có ba điểm nào của $\mathcal{S}$ cùng nằm trên một đường thẳng. *Cối xay gió* là một quá trình bắt đầu với một đường thẳng ℓ đi qua chỉ một điểm $P \in \mathcal{S}$. Đường thẳng này quay theo chiều kim đồng hồ chung quanh *tâm* P cho đến khi lần đầu tiên gặp một điểm khác nào đó của $\mathcal{S}$. Điểm này, ký hiệu Q, lại được lấy làm tâm mới, và bây giờ đường thẳng quay theo chiều kim đồng hồ chung quanh Q, cho đến khi gặp điểm tiếp theo của S. Quá trình được tiếp tục không dừng, với tâm luôn luôn là một điểm của $\mathcal{S}$.
Chứng minh rằng ta có thể chọn điểm $P \in \mathcal{S}$ và đường thẳng ℓ đi qua P sao cho cối xay gió nhận mỗi điểm của $\mathcal{S}$ làm tâm quay vô hạn lần.

Bài 3. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm giá trị thực xác định trên tập các số thực và thỏa mãn

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

với mọi số thực x và y. Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \leq 0$.

Thời gian: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài 7 điểm

Thứ 3, 19 tháng 7, 2011

Bài 4. Giả sử $n > 0$ là một số nguyên. Cho một cái cân hai đĩa và n quả cân với trọng lượng là 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Ta muốn đặt lên cái cân mỗi một trong n quả cân, lần lượt từng quả một, theo cách để bảo đảm đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái. Ở mỗi bước ta chọn một trong các quả cân chưa được đặt lên cân, rồi đặt nó hoặc vào đĩa bên trái, hoặc vào đĩa bên phải, cho đến khi tất cả các quả cân đều đã được đặt lên cân.

Xác định xem có bao nhiêu cách để thực hiện được mục đích đề ra.

Bài 5. Giả sử f là một hàm từ tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ vào tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$. Giả thiết rằng với hai số nguyên tùy ý m và n, hiệu $f(m) - f(n)$ chia hết cho $f(m-n)$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên m, n nếu $f(m) \leq f(n)$, thì $f(n)$ chia hết cho $f(m)$.

Bài 6. Giả sử ABC là một tam giác nhọn với đường tròn ngoại tiếp Γ. Giả sử ℓ là một tiếp tuyến nào đó của Γ, và giả sử ℓ_a, ℓ_b, và ℓ_c là những đường thẳng nhận được bằng cách lấy đối xứng ℓ qua các đường BC, CA, và AB, tương ứng. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác tạo thành bởi các đường thẳng ℓ_a, ℓ_b, và ℓ_c tiếp xúc với đường tròn Γ.

Thời gian: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài 7 điểm