

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 01-2001

Nhóm dịch thuật Kvant - Cộng đồng MathVn

<http://mathvn.org>

M1756. Cho các số tự nhiên khác nhau sao cho với 3 số bất kì thì có 2 số mà số này chia hết cho số kia. Chứng tỏ rằng, tất cả các số đó có thể tô bằng 2 màu sao cho nếu hai số cùng màu thì một số này chia hết cho một số kia.

E. Cherepanov

M1757*. Một đa giác lồi có thể bị cắt ra thành 22 hình bình hành. Chứng tỏ rằng đa giác này cũng có thể bị cắt ra thành 15 hình bình hành.

V. Proizvolov

M1758. Mỗi nghị sĩ đều có tỷ lệ ủng hộ của mình. Giai đoạn đầu sau khi bầu chọn, mỗi nghị sĩ nằm trong một đảng, mà trong đó ông ta có thể kiểm kê được tỷ lệ ủng hộ của mình. Nghị sĩ có thể chuyển từ một đảng sang một đảng khác mà ở đó tỷ lệ ủng hộ tương ứng của anh ta tăng lên. Giả sử trong mỗi giai đoạn chỉ có thể xảy ra một lần chuyển như vậy. Chứng tỏ rằng sau giai đoạn cuối cùng thì các sự chuyển đổi tỷ lệ ủng hộ như vậy cũng kết thúc.

V. Ilichev

M1759. Có một tam giác nhọn với cạnh bé nhất là c đối diện với góc tương ứng là γ . Biết rằng tam giác có thể tô bằng 2 màu sao cho khoảng cách giữa hai điểm cùng màu không lớn hơn c . Chứng tỏ rằng $\gamma \geq 36^\circ$.

A. Evnin

M1760. Bảng vuông $n \times n$ ô gọi là "kỳ lạ" nếu thỏa mãn tính chất: bất kì n số nào của bảng sao cho bất kì hàng và cột nào của bảng đều có chứa một một số trong chúng thì các số này cho một tổng cố định. Chứng tỏ rằng mỗi bảng vuông kỳ lạ có thể biểu diễn thành tổng hai bảng vuông khác sao cho một trong chúng thì trong mỗi cột các số đều bằng nhau, cái còn lại thì trong mỗi hàng các số đều bằng nhau. Thí dụ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

V. Proizvolov

M1761. Một ảo thuật gia có 100 tấm phiếu, được đánh số từ 1 đến 100. Ông ta sắp xếp các tấm phiếu này vào ba chiếc hộp màu đỏ, trắng và xanh sao cho trong mỗi hộp có ít nhất một quân bài. Một khán giả chọn ra hai chiếc hộp và rút lần lượt từ mỗi chiếc hộp một tấm phiếu và đọc cho mọi người biết tổng các số ghi trên chúng. Khi biết tổng này, ảo

thuật gia ngay lập tức xác định được chiếc hộp nào không có tấm nào bị rút ra. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các tấm phiếu vào các hộp để cho trò ảo thuật này luôn thành công?
Hungaria

M1762. Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho n có đúng 2000 ước số nguyên tố khác nhau và $2^n + 1$ chia hết cho n ?
V. Senderov

M1763*. Giả sử CH_1, CH_2, CH_3 là các đường cao của tam giác nhọn ABC . Đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh của nó tại các điểm T_1, T_2, T_3 tương ứng. Các đường thẳng l_1, l_2, l_3 là ảnh của các đường thẳng H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 qua các phép đối xứng với các trục tương ứng T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 . Chứng tỏ rằng các đường thẳng l_1, l_2, l_3 tạo thành một tam giác với các đỉnh nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
T. Emelianova

M1764. Giả sử hàm số $f : [0, 1] \rightarrow R$ thỏa mãn điều kiện: $f(0) = 0, f(1) > 0, f$ đơn điệu tăng trên $[0, 1]$ và với bất kì $x_1, x_2 \in [0, 1]$ sao cho $x_1 + x_2 \in [0, 1]$ thì có bất đẳng thức sau

$$f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_1 + x_2)$$

Chứng tỏ rằng, khi đó dãy số

$$s_n = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

không bị chặn.
V. Popov

M1765. Các cạnh của một tứ diện đều bằng 1. Cho các trường hợp
a. Trên các cạnh có 5 điểm được đánh dấu.
b. Trên các mặt có 9 điểm được đánh dấu.
c. Trong tứ diện có 9 điểm được đánh dấu.
Chứng tỏ rằng trong mỗi trường hợp luôn tìm được hai điểm được đánh dấu sao cho khoảng cách giữa chúng không vượt quá 0,5.
V. Proizvolov

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 02-2001

Nhóm dịch thuật Kvant - Cộng đồng MathVn

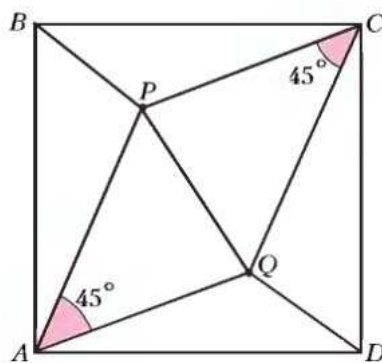
<http://mathvn.org>

M1766. Trên một bàn cờ vua vô hạn có một quân hậu và một quân vua khác màu, sao cho quân vua không được đi theo đường chéo. Chúng được đi lần lượt. Có thể hay không trường hợp quân vua không sớm thì muộn cũng bị chiếu tướng.

A. Shapovalov.

M1767. Trong hình vuông $ABCD$ lấy hai điểm P, Q sao cho $\angle PAQ = \angle PCQ = 45^\circ$ (Xem hình). Chứng minh rằng $PQ^2 = BP^2 + QD^2$

V. Proizvolov.



M1768. a. Phân bố các số $1, 2, 3, \dots, 100$ trên một hàng theo một thứ tự sao cho một vài bất kì (không phải tất cả) từ những số này có tổng các chỉ số thứ tự không trùng với tổng các giá trị của chúng.

b. Trên các ghế trong một chiếc xe điện ngầm, các hành khách có thể ngồi ở bất cứ vị trí nào mà họ muốn. Tổng kết lại tất cả các ghế có người ngồi thì với một nhóm không nhiều hơn 100 hành khách bất kì thì trung bình cộng các chỉ số ghi trên các ghế mà họ ngồi lớn hơn 1 đơn vị so với trung bình cộng các số ghi trên vé của họ. Hỏi số ghế tối thiểu có thể được là bao nhiêu?

S. Tokarev.

M1769. $2n$ đầu mút của các dây cung không giao nhau phân chia đường tròn thành $4n$ cung bằng nhau. Chứng tỏ rằng giữa các dây cung này tồn tại 2 dây cung song song với nhau.

V. Proizvolov.

M1770. Cho trước một đa thức bậc 10 với các hệ số là các chữ cái. Hai người thay lần lượt hệ số chữ cái bất kì thành bởi một hệ số chữ số. Đa thức nhận được là $A(x)$. Đặt $a_1 = \max A(x)$ với $x \in [-1, 0]$, và $a_2 = \max A(x)$ với $x \in [0, 1]$. Nếu $a_1 > a_2$ thì người chơi đầu tiên thắng, nếu $a_1 < a_2$ thì người còn lại thắng. Hỏi ai là người chiến thắng trong trò chơi này?

N. Vasilev, B. Ginzburg

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 03-2001

Nhóm dịch thuật Kvant - Cộng đồng MathVn

<http://mathvn.org>

M1771. Chia số $111\dots 11$ (có 3^n chữ số 1) cho 3^n nhận được số M . Chứng tỏ rằng M nguyên và nó có thể phân tích thành n nhân tử khác nhau.

D. Mamediarov

M1772. Mỗi số $a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$ bằng 2, 5 hoặc 9 và $a_1 = a_{2n+1}$, hai số liên tiếp nhau thì phải khác nhau. Chứng minh đẳng thức:

$$a_1a_2 - a_1a_3 + a_3a_4 - \dots + a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_{2n+1} = 0$$

V. Proizvolov

M1773. Chiều cao CD và phân giác AE của tam giác vuông ABC ($\angle C = 90^\circ$) cắt nhau tại F . Đặt G là giao điểm của ED và BF . Chứng tỏ rằng diện tích của tứ giác $CEGF$ và tam giác BDG bằng nhau.

Y. Jyk

M1774. Đức vua của một đất nước cổ tích nọ mời các tên ăn thịt người trong đất nước của mình đến dự yến tiệc. Giữa chúng có những tên muốn ăn những tên ăn thịt người khác (nếu như tên ăn thịt người A muốn ăn tên ăn thịt người B thì không chắc suy ra được B muốn ăn A). Biết rằng một dãy được lập những tên ăn thịt người sao cho tên thứ nhất muốn ăn tên thứ hai, tên thứ hai muốn ăn tên thứ ba,... thì có độ dài lớn nhất là 6. Chứng tỏ rằng đức vua có thể sắp những tên ăn thịt người này vào 6 phòng sao cho trong mỗi phòng không có ai muốn ăn thịt ai cả.

O. Melnikov.

M1775. a. Tồn tại hay không một hình vuông mà tất cả các đỉnh và tất cả các trung điểm của các cạnh của nó nằm trên hyperbol $xy = \pm 1$?

b. Chứng tỏ rằng tồn tại vô hạn các hình bình hành, sao cho một trong các đỉnh của mỗi hình bình hành này là gốc tọa độ, hai đỉnh khác nằm trên hyperbol $xy = 1$, và đỉnh còn lại nằm trên $xy = -1$.

c. Chứng tỏ rằng diện tích của mỗi hình bình hành như vậy bằng $\sqrt{5}$.

d. Xét với bất kì hình bình hành $OABC$ như vậy, tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OC}$ với k, l nguyên, gọi là lưới sinh ra bởi hình bình hành này. Chứng tỏ rằng phần trong giới hạn bởi các hyperbol $xy = \pm 1$ không chứa bất kì điểm nào của lưới này trừ gốc tọa độ.

N. Ocínov

M1776. Một giờ trước mỗi anh em trai trong một gia đình cãi nhau cùng một số lượng các chị em gái, còn mỗi chị em gái cãi nhau với một số lượng các anh em trai khác nhau. Bây giờ thì một số trong họ giảng hòa với nhau và mỗi chị em gái lại cãi nhau với cùng một số lượng các anh em trai, và một anh em trai cãi nhau với một số lượng các chị em gái nhau. Hỏi có bao nhiêu anh em trai, chị em gái trong gia đình phiền phức này?

Y. Akulich, A. Jukov

M1777. Trong hình vuông đơn vị nội tiếp một tứ giác, với các đỉnh nằm trên các cạnh của hình vuông này. Trong tam giác vuông tạo bởi các cạnh của hình vuông và tứ giác, lấy 4 đường tròn nội tiếp các tam giác này. Chứng minh rằng tổng bán kính của bốn đường tròn này không vượt quá $2 - \sqrt{2}$, và đạt được giá trị này khi và chỉ khi các cạnh của tứ giác nội tiếp song song với các đường chéo của hình vuông.

V. Proizvolov

M1778. Trên bảng viết số phức $1 + i$. Thực hiện một số lần bất kì và theo một thứ tự bất kì các phép toán dưới đây: 1. Xóa đi một số bất kì $a + bi$ và viết thay vào đó 2 số bằng $(a + 1) + bi$.

2. Xóa đi một số bất kì $a + bi$ và viết thay vào đó 3 số bằng $(a + 1) + bi$, $a + (b + 1)i$, $(a + 1) + (b + 1)i$.

3. Xóa đi một số bất kì $a + bi$ và viết thay vào đó 4 số, trong đó 2 số bằng $a + (b + 1)i$, và 2 số bằng $(a + 1) + (b + 1)i$.

Sau một vài phép toán như vậy thì modul của tất cả các số được viết trên bảng lớn hơn 3. Chứng tỏ rằng giữa chúng phải có hai số bằng nhau.

Y. Voronovich, Y. Akulich

M1779. Tìm tất cả các đa thức f trong các trường hợp

a. $f(x) + f(y) = f(x + y)$

b. $af(x) = f(2001x)$, với a là một số cho trước.

c. $af(x) + bf(y) = f(cx + dy)$ với a, b, c, d là các số cho trước.

V. Senderov.

M1780*. Mỗi điểm của mặt cầu được tô màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng có thể tìm được ba điểm cùng màu là ba đỉnh của một tam giác đều.

V. Proizvolov.

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 04-2001

Nhóm dịch thuật Kvant - Cộng đồng MathVn

<http://mathvn.org>

M1781. Người trưởng bộ phận bảo vệ muốn sắp xếp các vọng gác xung quanh doanh trại sao cho không ai có thể lén lút đến gần doanh trại cũng như không thể đến gần các vọng gác mà không bị phát hiện. Biết rằng trên mỗi vọng gác có một ngọn đèn pha, có tầm chiếu khoảng 100 m. Liệu ý định của người này có thể thực hiện được không?

V. Klentsyn.

M1782. Chứng tỏ rằng với bất kì số tự nhiên n tồn tại chỉ một số hữu hạn nghiệm của bất đẳng thức $|x! - y^y| < n$, x, y là số tự nhiên.

S. Zlobin.

M1783. Trong tam giác ABC dựng đường cao AH , phân giác BL và trung tuyến CM . Biết rằng tam giác HML đều, chứng minh tam giác ABC cũng đều.

R. Jenodarov.

M1984. Trên bảng viết sẵn các số nguyên từ 1 đến 2000.

a. Xóa ngẫu nhiên 998 số. Chứng minh rằng giữa các số còn lại có thể chỉ ra một bộ số (bao gồm không ít hơn hai số) mà tổng của chúng cũng có mặt trên bảng.

b. Xóa ngẫu nhiên 89 số. Chứng tỏ rằng giữa các số còn lại có thể chỉ ra 20 số sao cho tổng của chúng cũng có mặt trên bảng. Hỏi khẳng định còn đúng không nếu xóa thêm một số nữa.

F. Shleyfer.

M1985. Trên hòn đảo nọ là lãnh thổ của các công quốc

a. Lãnh thổ của các công quốc này trên bản đồ của đảo được thể hiện bằng các tam giác đều. Chứng minh rằng bằng cách tô màu đúng bản đồ (không có hai công quốc láng giềng nào mà được tô cùng màu) thì chỉ cần 2 màu là đủ.

b. Lãnh thổ của các công quốc được biểu diễn bằng các tam giác vuông cân trên bản đồ của đảo. Chứng minh rằng với cách tô màu đúng thì chỉ cần 4 màu là đủ.

V. Proizvolov.

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 05-2001

Nhóm dịch thuật Kvant - Cộng đồng MathVn

<http://mathvn.org>

M1786. Trên mặt phẳng cho các 6 điểm sao cho không có 3 điểm nào trong số chúng thẳng hàng, hơn nữa khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ đôi một khác nhau. Chứng tỏ rằng giữa các tam giác với các đỉnh lấy từ 6 điểm này thì có thể tìm được hai tam giác với cạnh chung sao cho đối với tam giác này là cạnh lớn nhất, đối với tam giác kia là cạnh nhỏ nhất.
C. Pukshin.

M1787*. Với p và q là các số tự nhiên, lớn hơn 1. Biết rằng, $q^3 - 1$ chia hết cho p , và $p - 1$ chia hết cho q . Chứng tỏ rằng $p = q^{\frac{3}{2}} + 1$ hoặc $p = q^2 + q + 1$.
N. Ociov.

M1788. Trong tam giác ABC điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, A', B', C' là tiếp điểm của đường tròn này với các cạnh BC, CA, AB . Đường thẳng AA' và BB' giao nhau tại điểm P , AC và $A'C'$ giao nhau tại điểm M , BC và $B'C'$ tại điểm N . Chứng minh rằng IP và MN vuông góc nhau.
A. Zaslavskij.

M1789. a. Cho 100 quả cân với khối lượng 1, 2, ..., 100g. Chọn từ chúng 50 quả cân sao cho tổng khối lượng bằng tổng khối lượng các quả còn lại và không có hai quả nào có hiệu khối lượng là 50. Chứng minh rằng có thể chọn ra hai quả cân sao cho tổng khối lượng bằng 101g.
b. Cho 200 quả cân với khối lượng 1, 2, ..., 200g. Chọn từ chúng 100 quả cân sao cho tổng khối lượng bằng tổng khối lượng các quả còn lại. Không có hai quả nào có hiệu khối lượng là 100g và tổng khối lượng bằng 201g. Chứng minh rằng 50 quả cân nhẹ nhất có tổng khối lượng là 2525g.
V. Proizvolov.

M1790. Trên mặt phẳng cho một số lượng các tam giác đều, sao cho mỗi tam giác có một cạnh màu xanh, một cạnh màu vàng, một cạnh màu đỏ. Ta tiến hành dính liền các tam giác này với nhau bằng cách dính liền các cạnh cùng màu, hoặc một phần các cạnh cùng màu với nhau giữa hai tam giác sao cho tạo ra được một tam giác đều lớn Δ . Chứng minh rằng trên biên của tam giác đều lớn Δ tổng độ dài các phần cạnh của mỗi màu đều bằng nhau.
S. Volchenkov.

M1791. a. Trên mặt phẳng cho 5 đường tròn sao cho 4 đường tròn bất kì đều có tiếp tuyến chung. Liệu chẳng tất cả 5 đường tròn này có tiếp tuyến chung.
b. Trên mặt phẳng cho n đường tròn sao cho 5 đường tròn bất kì đều có tiếp tuyến chung.

Chứng minh rằng tất cả n đường tròn này đều có tiếp tuyến chung.
V. Proizvolov.

M1792. Trong một căn phòng có $2n + 1$ người, sao cho với n người bất kì luôn tồn tại một người quen với tất cả n người này. Chứng minh rằng, có một người quen với tất cả các người trong phòng này.
S. Berlov.

M1793. Cho ma phương kích thước $n \times n$ được đặt các chữ số $1, 2, \dots, n^2$ ở mỗi ô. Với hai ô bất kì, người ta dựng một vector với đỉnh và gốc tại tâm của hai ô này, hướng từ ô có số lớn hơn đến ô có số bé hơn. Chứng minh rằng tổng các vector nhận được bằng vector không. (Ma phương là bảng vuông được viết số trong đó các tổng các số được viết ở mỗi dòng và mỗi cột đều bằng nhau).
I. Bogdanov.

M1794. Trên một đường thẳng cho 100 tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$ sao cho mỗi tập hợp được lập từ 100 đoạn thẳng đôi một không giao nhau. Chứng minh rằng giao của 100 tập hợp này là hợp của không quá 9901 đoạn thẳng đôi một không giao nhau. (Có thể coi một điểm như là một đoạn thẳng suy biến)
R. Karancev.

M1795. Cho một mặt cầu S và một hàm liên tục $y = f(X)$, với $X \in S$. Chứng minh rằng tìm được y_0 sao cho hàm đạt giá trị này trên mỗi đường tròn lớn của S .
V. Proizvolov.

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 06-2001

Nhóm dịch thuật Kvant - Cộng đồng MathVn

<http://mathvn.org>

M1796. Một con vua đi qua tất cả các ô trên bàn cờ vua và trở lại chỗ xuất phát của nó, sao cho mỗi ô nó chỉ đi qua 1 lần. Nối tất cả tâm của các ô mà nó đi qua liên tiếp ta nhận được một hình gấp khúc kín gồm 64 mắt xích (mỗi bước chuyển là một mắt xích), không có hai mắt xích nào kế tiếp mà cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng số bước chéo của con vua đi tối thiểu là 8 bước.

Y. Akulin.

M1797. Các điểm màu xanh và đỏ lần lượt luân phiên nhau chia đường tròn thành $2n$ cung. Biết rằng bất kì hai cung kề nhau có độ dài sai khác nhau là 1. Chứng minh rằng n -giác với các đỉnh màu đỏ và n -giác với các đỉnh màu xanh có cùng chu vi và cùng diện tích.

V. Proizvolov.

M1798. Trong thành phố nọ có 1000 người dân sinh sống. Đúng 300 người trong số họ là thật thà, còn lại là tinh ranh sẽ nói thật hay nói dối tùy theo ý mình. Biết rằng tất cả các cư dân thành phố đều biết nhau. Bạn có thể nhận biết được bao nhiêu người tinh ranh bằng cách đặt một số tùy ý các câu hỏi.

N. Vacilev, B. Ginzburg.

M1799*. Xét các số tự nhiên x, y sao cho $xy + x + y$ là số chính phương. Chứng minh rằng các số sau đây cũng là số chính phương: $xy + z, yz + x, zx + y, yz + y + z, zx + z + x, xy + yz + zx, xy + yz + zx + x + y + z$.

V. Proizvolov.

M1800. Chứng minh rằng tổng bình phương diện tích 4 mặt của một tứ diện bằng 4 lần tổng bình phương diện tích 3 tiết diện đi qua các bộ bốn trung điểm đồng phẳng của các cạnh tứ diện.

A. Zaslavskij.