

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 01-2007

Nhóm dịch thuật Kvant - Cộng Đồng MathVn

<http://mathvn.org>

M2026. Trên các cạnh AB, AC, CD và DA của hình vuông $ABCD$ lấy tương ứng các điểm P, M, N, Q sao cho $\angle MNA = 45^\circ$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Đoạn PQ cắt AM, AN tương ứng tại các điểm F và G . Chứng minh rằng, diện tích của tam giác AFG bằng tổng diện tích của các tam giác FMP và GNQ .

(V. Proizvolov)

M2027. Trên bảng có viết ba chữ số tự nhiên x, y, z . Petia viết vào tờ giấy của mình tích hay số bất kì từ ba số đó, và giảm số thứ ba trên bảng đi 1. Với 3 số mới trên bảng, một lần nữa cậu ta lại tiến hành các phép toán trên, và cứ tiếp tục vậy cho tới khi một trong các số đó bằng 0. Hỏi tổng của các số trên tờ giấy của cậu lúc đó sẽ bằng bao nhiêu?

E. Gorskij, S. Dorichenko

M2028. Biết rằng những "kẻ nói thật" luôn nói sự thật, những "kẻ nói dối" luôn nói những điều dối trá còn những "kẻ lười cá" có thể nói thật hoặc nói dối. Bạn chỉ có thể đưa ra những câu hỏi với những kẻ này để nhận được câu hỏi "có" hoặc "không".

a. Nếu có một kẻ nói thật, một kẻ nói dối, một kẻ lười cá và họ đều biết nhau thì bạn làm cách nào để phân biệt họ.

b. Nếu có một kẻ nói thật, một kẻ nói dối, hai kẻ lười cá và tất cả họ đều biết nhau. Chứng tỏ rằng hai kẻ lười cá này có thể trả lời sao cho bạn không thể biết được chắc chắn một ai trong 4 người trên khi mà bạn đã đặt ra những câu hỏi với tất cả họ.

B. Ginzburg, M. Gerver

M2029. Cho hai cấp số nhân và cấp số cộng vô hạn được tạo ra từ các số nguyên dương, sao cho chúng có chung tất cả các số hạng. Chứng minh rằng giá trị của cấp số nhân phải là một số nguyên.

(B. Frenkin)

M2030. Có thể nội tiếp một hình bát diện đều vào một hình lập phương sao cho các đỉnh của hình bát diện nằm ở các cạnh của hình lập phương được hay không?

(L. Radzivilovskij)

M2031. Các đường thẳng đi qua các trung tuyến của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp ω của tam giác này tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Các đường thẳng đi qua các đỉnh A, B, C và song song với các cạnh đối diện cắt ω lần thứ hai tại A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm.

(A. Zaslavskij)

M2032. a. Tồn tại hay không một số tự nhiên n để với bất kì số tự nhiên k nào thì ít ra một trong hai số $n^k - 1, n^k + 1$ có dạng a^b với các số tự nhiên a và $b > 1$?

b. Một số tự nhiên được gọi là "phản nguyên tố" nếu nó chia hết cho bình phương ước số nguyên tố bất kì của nó. Hai số tự nhiên được gọi là "giá trị gần nhau" nếu chúng sai khác nhau 2 đơn vị. Hỏi có vô hạn hay hữu hạn các cặp số phản nguyên tố giá trị gần nhau.

V. Senderov

M2033. Một người có một bộ bài gồm 52 con. Anh ta công bố cho mọi người đều biết con nằm trên cùng và dưới cùng của bộ bài đó. Mọi người có thể đặt câu hỏi dạng "có bao nhiêu quân bài giữa quân... và quân...". Hỏi cần phải đặt ra ít nhất là bao nhiêu câu hỏi đối với người này để biết được thứ tự của toàn bộ các quân bài trong cả bộ bài.

A. Shanovalov

M2034. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lấy tương ứng các điểm X, Y, Z sao cho tam giác XYZ đồng dạng với tam giác ABC ($\angle X = \angle A, \angle Y = \angle B$). Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác XYZ cách đều các giao điểm của các đường cao.

N. Nikolov (Bulgaria)

M2035. a. Trên đường tròn đặt một vài các số nguyên dương sao cho chúng đều không lớn hơn 1. Chứng tỏ rằng, các số này có thể phân hoạch thành 3 nhóm sao cho tổng các số ở hai nhóm bất kì sai khác nhau không quá 1 (Nếu một nhóm không có số nào, xem như tổng này xem như bằng 0).

b*. Đặt một vài các số dương không lớn hơn 1 lên một đoạn thẳng. Chứng minh rằng có thể phân hoạch các số này ra thành n nhóm sao cho tổng của các số ở hai nhóm bất kì sai khác nhau không quá 1. (Nếu nhóm đó không có số nào thì tổng này xem như bằng 0.)

M. Malkin, Y. Bogdanov, G. Chelnokov

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 02-2007

Nhóm dịch thuật Kvant - Cộng đồng MathVn

<http://mathvn.org>

M2036. Andrey, Boria và Casha chia nhau 20 đồng xu sao cho không một người trong họ được nhận tất cả các đồng xu. Sau đó, trong mỗi phút thì mỗi người trong họ đưa cho người bạn còn lại mỗi người một đồng xu. Sau một khoảng thời gian thì Andey, Boria, Casha có tương ứng a, b, c đồng xu. Tìm số lượng có thể được các bộ ba (a, b, c) .

K. Kaybkhanov

M2037. Các đường chéo tứ giác nội tiếp $ABCD$ cắt nhau tại điểm E ; điểm K, M là trung điểm của cạnh AB, CD ; điểm L, N là hình chiếu của E xuống cạnh BC, AD . Chứng tỏ rằng các đường thẳng KM, LN vuông góc nhau.

Folklor

M2038. Foma và Erema chia một đồng từ những mẫu pho-mat. Đầu tiên là Foma, nếu như có thể, lựa ra một miếng pho-mat và chia nó thành 2. Sau đó cậu sắp các miếng pho-mat thành 2 mâm. Tiếp theo Erema lựa ra một mâm và họ bắt đầu lấy theo lần lượt từng miếng pho-mat cho mình, đầu tiên là Erema. Họ cũng chia đúng như thế với mâm thứ 2, và người bắt đầu là Foma. Chứng minh rằng Foma là người luôn luôn chủ động để nhận được không ít hơn một nửa số pho-mat (theo trọng lượng).

A. Shapovalov

M2039. Chứng tỏ rằng với mỗi số tự nhiên $n > 1$ tìm được số tự nhiên z sao cho không thể biểu diễn dưới dạng $x^n - y!$, với x, y là các số tự nhiên.

N. Agakhanov

M2040. Các số nguyên dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn các bất đẳng thức

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{2}$$
$$x_1 + x_2 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3}{2}$$

a. Chứng tỏ rằng $k > 50$.

b. Hãy chỉ ra thí dụ ứng với một giá trị của k .

c*. Tìm giá trị nhỏ nhất của k để hai bất đẳng thức trên luôn đúng.

A. Tolnigo

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 03-2007

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

Tháng 05 - 2008

M2041. Số tối thiểu các quân xe đặt lên bàn cờ vua 8×8 là bao nhiêu để các ô trắng đều bị kiểm soát bởi những con xe này.

M2042. Chứng tỏ rằng với mọi giá trị của x sao cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì

$$(\tan x)^{\sin x} + (\cot x)^{\cos x} \geq 2$$

N. Agakhanov

M2043. Có thể hay không thể ghép một hình vuông từ 4 hình đa giác giống nhau và một hình vuông và 3 đa giác trong số các đa giác giống nhau đó có thể ghép lại được thành một hình tam giác đều.

M2044. Giả sử $f(x)$ là một đa thức bậc khác không nào đó. Có thể hay không phương trình $f(x) = a$ với bất kì giá trị a có số chẵn nghiệm.

P. Kozevnikov.

M2045. Trên bản viết số 111...11 (99 số 1). Có hai người bắt đầu một trò chơi như sau: hai người đi lần lượt nhau theo mỗi bước bằng cách hoặc là viết thêm số 0 thay vào chỗ một trong số các số 1 ngoại trừ số đầu tiên và cuối cùng, hoặc là xóa một trong số các số 0. Người thua là người sau bước của người đó thì nhận được số chia hết cho 11. Vậy hỏi ai là người luôn có thể thắng với luật chơi như vậy?

M2046. Con ruồi đậu trên chiếc kim giây của một chiếc đồng hồ đang lúc giữa trưa và quyết định đậu đi chỗ khác tuân theo luật sau: nếu một chiếc kim vượt qua chiếc kim khác mà con ruồi đang đậu trên một trong các cái kim đó thì nó sẽ dời qua cái kim kia. Hỏi con ruồi thực hiện bao nhiêu vòng quay cho đến lúc nửa đêm.

M2047. Điểm T nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Chứng tỏ rằng các đường thẳng đối xứng với AT, BT, CT qua các đường thẳng tương ứng BC, CA, AB đồng quy với nhau tại một điểm.

A. Zaslavskij

M2048. Tìm số tự nhiên lớn nhất k sao cho tồn tại số tự nhiên $n > 1$ để bất kì các số $n, n^2, \dots, n^k$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng $x^2 + y^2 + 1$, với x, y là các số nguyên.

V. Senderov

M2049. Từ hình bát diện đều với cạnh là 1 cắt ra

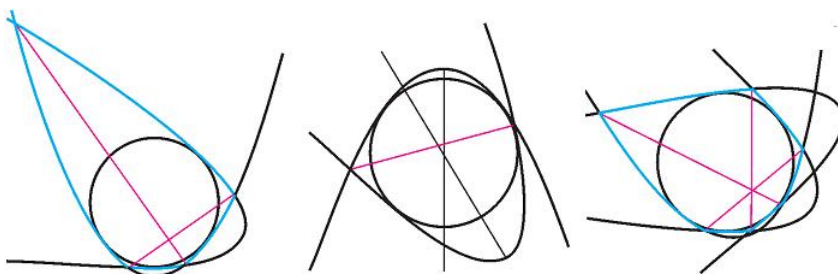
M2050.

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT SỐ 04-2007

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

Tháng 04-2009

M2051. Cho $a, b, c > 0$ sao cho $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = abc$. Chứng tỏ $a = b = c$.
V. Proizvolov.



M2052. a. Xét một đường tròn và cung AB của nó. Tìm tập hợp các điểm M nằm cách đường thẳng AB một khoảng cách có độ dài bằng tiếp tuyến kẻ từ M đến đường tròn đang xét.

b. Với bất kì 2 parabol cùng ngoại tiếp một đường tròn và giao nhau tại 4 điểm, chứng tỏ các đường chéo của tứ giác lập bởi 4 giao điểm này vuông góc nhau, tứ giác này gọi là "tứ giác parabol".

c. Với bất kì hai parabol nào cùng ngoại tiếp một đường tròn và giao nhau tại 2 điểm, chứng tỏ trục của hai parabol đều nghiêng cùng một góc bằng nhau với đường thẳng nối hai giao điểm này.

d. Với bất kì 3 parabol cùng ngoại tiếp một đường tròn sao cho bất kì hai trong chúng cắt nhau tại 4 điểm, chứng tỏ các đường chéo chính của "lục giác parabol" được tạo thành đồng quy tại một điểm.

F. Nilov.

M2053. Với $n > 3$. Chứng tỏ rằng tồn tại các số nguyên khác không $x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho

$$x_1 x_2 \dots x_n = (x_2 + x_3 + \dots + x_n)(x_1 + x_3 + \dots + x_n) \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$$

S. Tokarev, V. Senderov.

M2054. Giả sử $P(x) = x^2 + x + 1$. Liệu có tồn tại hay không các số tự nhiên $x_1, x_2, \dots, x_n, k_1, k_2, \dots, k_n$ sao cho

$$P(x_1) = x_2^{k_2}, P(x_2) = x_3^{k_3}, \dots, P(x_n) = x_1^{k_1}$$

Giải quyết bài toán trong các trường hợp:

a. $n = 2$

b. n là số tự nhiên lẻ bất kì

c. $n = 4$

V. Senderov, B. Frenkin

M2055. Trên một dải băng kẻ ô vuông vô hạn về phía bên phải, các ô lần lượt được đánh số bởi $0, 1, 2, \dots$. Trong một số ô đặt các viên đá. Nếu trong ô thứ i đặt đúng i viên đá thì lần lượt chuyển từng viên đá của ô này vào các ô thứ $i - 1, i - 2, \dots, 0$. Ban đầu sắp 2006! viên đá trên bàn cờ và bắt đầu áp dụng quy tắc chuyển đá như vậy từ ô thứ nhất, để thu được ô rỗng sau một vài lần áp dụng. Tìm số bé nhất các ô vuông được sắp đặt các viên đá.

F. Bakharev, Y. Bogdanov

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT SỐ 05-2007

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

Tháng 04-2009

M2056. Thay đổi vị trí các chữ số của số tự nhiên A nhận được số tự nhiên B . Biết rằng $A - B = 11\dots 1$, trong đó có tất cả N chữ số 1, tìm giá trị nhỏ nhất của N .

H. Agakhanov.

M2057. 25 chàng trai và một số cô gái gặp nhau trong một buổi dạ hội và họ tìm được một quy luật thú vị: Nếu như chọn bất kì nhóm không ít hơn 10 chàng trai rồi sau đó bổ sung vào đó tất cả các cô gái quen biết với ít nhất một trong số các chàng trai trong nhóm, và trong nhóm nhận được, số chàng trai ít hơn 1 số với số các cô gái. Chứng minh rằng có cô gái nào đó quen với không ít hơn 16 chàng trai.

S. Bolchenkov.

M2058. Trong tứ giác lồi, 5 trong 8 đoạn thẳng nối các đỉnh với trung điểm của cạnh các đối diện là bằng nhau. Chứng minh cả 8 đoạn này đều bằng nhau.

H. Agakhanov, V. Senderov.

M2059. Một cấp số cộng vô hạn tăng, được tạo nên từ các số tự nhiên và chứa một số lập phương. Chứng minh cấp số cộng này cũng chứa một số lập phương nhưng không là số chính phương.

Y. Bogdanov, V. Senderov.

M2060. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB tại các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng. Đoạn AA_1 cắt đường tròn nội tiếp lần thứ hai tại Q . Đường thẳng l song song với BC và qua điểm A . Đường thẳng A_1C_1, A_1B_1 cắt l tại P, R tương ứng. Chứng minh rằng $\angle PQR = \angle B_1QC_1$.

A. Polianskij.

M2061. Trong bảng 10×10 ô, đặt các số tự nhiên từ 1 đến 100, hàng thứ nhất đặt từ 1 đến 10 từ trái qua phải, dòng thứ hai từ 11 đến 20 từ trái qua phải và liên tiếp thế. Andrey đặt lên bảng các quân đô-mi-nô chiều 1×2 (dọc hoặc ngang) và tính tích hai số trong hai ô mà nó phủ lên. Cậu ta nhận được 50 số như thế và muốn sắp đặt các quân đô-mi-nô để nhận được tổng của 50 số đó là nhỏ nhất. Vậy phải phân bố các quân đô-mi-nô như thế nào?

A. Badzian.

M2062. Nhà ảo thuật và người phụ tá chuẩn bị một trò ảo thuật như sau: Khi nhà ảo thuật ở ngoài căn phòng đóng kín, trong căn phòng có bảng vẽ một đường tròn lớn và khán giả đánh dấu vào trên đường tròn đó 2007 điểm khác nhau, rồi người phụ tá chui đi một điểm trong số đó. Ngay sau đó nhà ảo thuật đi vào phòng nhìn lên bảng và vẽ một nửa đường tròn

mà điểm bị xóa nằm trên đó. Hỏi người phụ tá có thể bàn bạc trước với nhà ảo thuật để trò ảo thuật diễn ra như mong muốn. *A. Kopian, Y. Bogdanov.*

M2063. Gọi một hình đa diện là "tốt" nếu thể tích của nó (theo đơn vị m^3) bằng diện tích bề mặt (theo đơn vị m^2). Có hay không một tứ diện "tốt" nằm trong một hình bình hành "tốt" nào đó?

M. Murashkin.

M2064. Đường tròn đi qua các đỉnh B, C của tam giác ABC và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm D, E . Đoạn CD, BE cắt nhau tại O . Đặt M, N là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ADE, ODE tương ứng. Chứng minh rằng trung điểm của cung nhỏ DE nằm trên đường thẳng MN ,

M. Ysaev.

M2065. Cho dãy vô hạn phần tử (x_n) với x_0 là một số hữu tỉ lớn hơn 1 và $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ với mọi số tự nhiên n . Chứng minh rằng trong dãy này có một số nguyên.

A. Golovanov.

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT SỐ 06-2007

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

Tháng 04-2009

M2066. Hình vuông với cạnh là 1 được cắt ra làm 100 hình chữ nhật có chu vi bằng nhau và bằng p . Tìm giá trị lớn nhất của p .

A. Shanovalov, S. Berlov

M2067. Chứng minh rằng nếu số $111\dots 11$ (bao gồm n chữ số 1) chia hết cho n thì n chia hết cho 3.

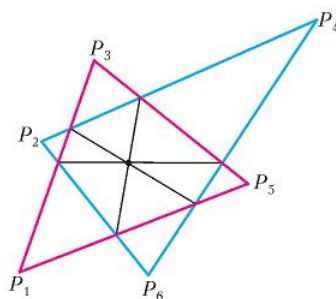
R. Kovalev

M2068. Trong một giải bóng đá có $m \times n$ đội tuyển tham gia ($m, n \geq 2$). Trong vòng loại, các đội được mang số từ 1 đến $m \times n$. Ban tổ chức phân chia các đội thành m nhóm, mỗi nhóm n đội sao cho với bất kì 2 đội mang số A, B nào đều thỏa điều kiện: nếu A bé hơn B thì tổng các số của các đội đối thủ trong nhóm của A bé hơn đối với B . Với giá trị m, n như thế nào thì ban tổ chức mới có thể phân chia các đội được theo quy tắc như vậy.

Y. Akulich

M2069. Kí hiệu $\|y\|$ là khoảng cách giữa số thực y và số nguyên gần nhất. Với số hữu tỉ x , xét dãy vô hạn các số tự nhiên $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ xác định như sau: $q_1 = 1$, q_{k+1} là số tự nhiên q nhỏ nhất sao cho $\|xq\| < \|xq_k\|$. Chứng minh rằng $q_{k+2} \geq q_k + q_{k+1}$ với mọi $k = 1, 2, \dots$

V. Bykovskij



M2070. Chứng minh rằng các đường chéo chính của lục giác được tạo thành do các giao điểm hai tam giác $P_1P_3P_5$, $P_2P_4P_6$ (như hình vẽ) giao nhau tại cùng một điểm khi và chỉ khi đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\frac{S_1 S_3 S_5}{S_{135}} = \frac{S_2 S_4 S_6}{S_{246}}$$

Ở đây S_i là diện tích các tam giác nhỏ với đỉnh P_i tạo thành bởi 1 cạnh của lục giác và hai

cạnh kề của nó kéo dài cắt nhau, và S_{135}, S_{246} là diện tích các tam giác $P_1P_3P_5$ và $P_2P_4P_6$.
S. Dorichenko