

Lời giải đề lần sáu

Phạm Hy Hiếu - Toán PTNK 07 - 10

Bài toán 1. Cho x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{xyz}$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{y^4}{y^2 + z^2} + \frac{z^4}{z^2 + x^2}$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $xy + yz + zx = 1$.

Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz thì:

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{y^4}{y^2 + z^2} + \frac{z^4}{z^2 + x^2} &\geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \\ &\geq \frac{xy + yz + zx}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Do đó $P \geq \frac{1}{2}$. Hơn nữa tại $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì ta có $P = \frac{1}{2}$.

Vậy $\min P = \frac{1}{2}$. □

Bài toán 2. Cho các hàm số

$$f_1(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = (x - 1)^2$$

Trong mỗi lần biến đổi, cho phép cộng, trừ, nhân hai hàm số với nhau (có thể bình phương, lập phương, etc), có thể nhân hoặc cộng với các hằng số thực, cũng có thể làm như vậy với các kết quả thu được. Từ f_1, f_2, f_3 , hãy thu được hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ bằng cách trên. Đồng thời hãy chứng minh rằng nếu bỏ đi một hàm số bất kỳ trong ba hàm ấy thì với cách làm như trên ta không thể thu được hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$.

Lời giải. Ta có:

$$f_1(x) - \frac{1}{2}((f_2(x) - f_3(x)) + 1) = \left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}((x^2 - (x-1)^2) + 1) = \frac{1}{x}$$

Bây giờ ta lần lượt xét các trường hợp cho hàm số bị bỏ đi.

Trường hợp 1. Nếu hàm số bị bỏ đi là $f_1(x)$, dễ thấy rằng từ f_2 và f_3 , với cách làm như đề bài thì ta chỉ thu được các đa thức có hệ số thực, và vì thế, không thể thu được hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$.

Trường hợp 2. Nếu hàm số bị bỏ đi là $f_2(x)$, rõ ràng từ f_1 và f_3 , với cách làm như đề bài thì ta chỉ thu được các hàm số có dạng

$$f(x) = P\left(x + \frac{1}{x}, x^2\right)$$

với $P \in \mathbb{R}[x, y]$ là hàm đa thức hai biến với hệ số thực. Giả sử tồn tại đa thức P như vậy sao cho:

$$P\left(x + \frac{1}{x}, x^2\right) = \frac{1}{x}$$

Thay $x = i$ với $i^2 = -1$ ta có $x + \frac{1}{x} = 0$ và $x^2 = -1$ nên

$$P\left(x + \frac{1}{x}, x^2\right)|_{x=i} \in \mathbb{R}$$

Nhưng $\frac{1}{x}|_{x=i} = \frac{1}{i} \notin \mathbb{R}$. Mâu thuẫn. Vậy nếu bỏ f_3 thì ta không thể thu được $f(x) = \frac{1}{x}$.

Trường hợp 3. Nếu hàm số bị bỏ đi là $f_3(x)$, ta có:

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ f'_2(x) &= 2x - 2 \end{aligned}$$

Do vậy $f'_1(1) = f'_2(1) = 0$. Từ đó, giả sử rằng tồn tại đa thức $Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ thỏa mãn:

$$f(x) = Q\left(x + \frac{1}{x}, (x-1)^2\right) = \sum_{k,l} a_{kl} \left(x + \frac{1}{x}\right)^k (x-1)^{2l} = \frac{1}{x}$$

thì ta có

$$f'(1) = \sum_{k^2+l^2>0} \left(a_{kl} \left(x + \frac{1}{x} \right)^k (x-1)^{2l} \right)' \Big|_{x=1} = 0$$

nhưng

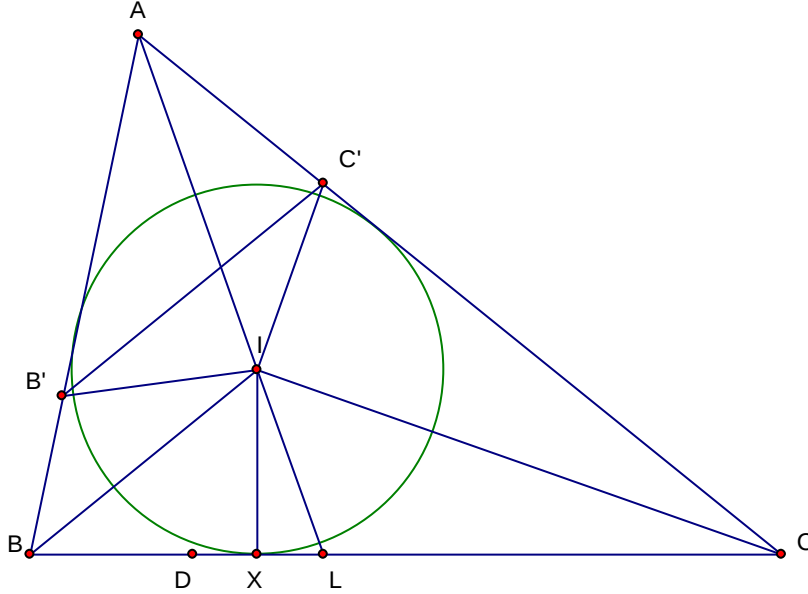
$$\left(\frac{1}{x} \right)' \Big|_{x=1} = \frac{-1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1 \neq 0$$

mâu thuẫn. Vậy từ $f_1(x)$ và $f_3(x)$ không thể thu được hàm $f(x) = \frac{1}{x}$.

Vậy các trường hợp của bài toán đều được chứng minh. $\square$

Bài toán 3. Cho $\triangle ABC$ có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại X . Đặt $L \equiv AI \cap BC$. Gọi D là điểm đối xứng của L qua X và B', C' là điểm đối xứng của D qua BI, CI . Chứng minh rằng B, C, C', B' đồng viên.

Lời giải. Dễ thấy $B' \in AB$ và $C' \in AC$.



Ta có tính chất: tích của hai phép đối xứng trục là một phép quay có góc bằng hai lần góc giữa hai trục. Từ đó:

$$(IL, IC') \equiv 2(IX, IC) \equiv (CL, CC') \pmod{\pi}$$

nên I, L, C, C' đồng viên. Tương tự thì I, L, B, B' đồng viên. Từ đó ta có:

$$\overline{AB'} \cdot \overline{AB} = \overline{AI} \cdot \overline{AL} = \overline{AC'} \cdot \overline{AC}$$

Suy ra B, C, C', B' đồng viên. $\square$

Bài toán 4. Chứng minh rằng $(p, p+2)$ là cặp số nguyên tố song sinh khi và chỉ khi:

$$p(p+2) \mid 4((p-1)! + 1) + p$$

Lời giải. Ta phát biểu không chứng minh định lý sau:

Định lý Wilson. p là số nguyên tố khi và chỉ khi $p \mid (p-1)! + 1$.

Vào bài. Đặt $S = 4((p-1)! + 1) + p$.

Theo định lý Wilson thì p là số nguyên tố khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} (p-1)! + 1 &\equiv 0 \pmod{p} \\ \Leftrightarrow 4((p-1)! + 1) &\equiv 0 \pmod{p} \\ \Leftrightarrow 4((p-1)! + 1) + p &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Mặt khác cũng từ định lý Wilson thì $p+2$ là số nguyên tố khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} (p+1)! + 1 &\equiv 0 \pmod{p+2} \\ \Leftrightarrow (p+1)! + p(p+1) &\equiv p^2 + p - 1 \pmod{p+2} \\ \Leftrightarrow 2((p-1)! + 1) &\equiv p^2 + p - 1 \pmod{p+2} \text{ (vì } p(p+2) \equiv 2 \pmod{p}) \\ \Leftrightarrow 4((p-1)! + 1) + p &\equiv 2p^2 + 3p - 2 \pmod{p+2} \\ \Leftrightarrow 4((p-1)! + 1) + p &\equiv (p+2)(2p-1) \pmod{p+2} \\ \Leftrightarrow 4((p-1)! + 1) + p &\equiv 0 \pmod{p+2} \end{aligned}$$

Từ hai kết luận trên ta suy ra đpcm. $\square$

Bài toán 5. Quanh một bàn tròn có 100 người đại diện cho 25 nước, mỗi nước có 4 đại diện. Chứng minh rằng có thể chia những người này thành 4 nhóm, sao cho trong mỗi nhóm có đủ các đại diện của các nước và không có thành viên nào cùng nhóm ngồi cạnh nhau.

Lời giải. Ta sẽ giải bài toán tổng quát:

Bài toán tổng quát 1. Quanh một bàn tròn có $4n$ người đại diện cho n nước, mỗi nước có 4 đại diện. Chứng minh rằng có thể chia những người này thành 4 nhóm, sao cho trong mỗi nhóm có đủ các đại diện của các nước và không có thành viên nào cùng nhóm ngồi cạnh nhau.

Ta sử dụng qui nạp. Tại $n = 1$, kết luận là hiển nhiên. Giả sử tồn tại cách chia nhóm với n nước. Ta thêm vào 4 đại biểu đại diện cho nước thứ $n + 1$. Ta quan tâm đến việc 4 người được thêm vào này ngồi giữa hai người thuộc về hai nhóm nào $(1, 2, 3, 4)$ trong các nhóm mà n người kia đã được chia và. Xét các trường hợp:

Trường hợp 1. Tồn tại hai người trở lên trong 4 người của nước thì $n + 1$ ngồi cạnh nhau. Giả sử họ ngồi giữa hai người thuộc hai nhóm i và j . Chú ý rằng $i \neq j$ vì giả thiết qui nạp. Giả sử họ ngồi theo thứ tự $i \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow j$ với x, y là số thứ tự nhóm của của hai người đang nói đến. Thế thì ta thấy rằng $\{x, y\}$ có thể là bất kỳ tập con có hai phần tử nào của $\{1, 2, 3, 4\}$. Thật vậy, nếu x hoặc y không phải là i, j thì luôn có thể sắp xếp được. Nếu $\{x, y\} = \{i, j\}$ thì ta sắp xếp theo thứ tự $i \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow j$. Vậy $\{x, y\}$ có thể là bất kỳ tập con hai phần tử nào của $\{1, 2, 3, 4\}$. Hơn nữa, với hai người còn lại của nước thứ $n + 1$, nếu họ ngồi cạnh nhau thì theo lý luận trên, tập hợp hai nhóm của hai người này có thể lấy tùy ý. Nếu họ ngồi riêng, i.e. mỗi người họ ngồi giữa hai người trong $4n$ người trước thì có thể chọn họ thuộc hai nhóm khác nhau, sau đó lại xếp hai người nói đến ở trên vào hai nhóm còn lại. Tóm lại trường hợp này luôn xử lý được.

Trường hợp 2. Mỗi người trong 4 người của nước thứ $n + 1$ đều ngồi giữa hai người trong $4n$ người đã có trước đó. Giả sử 4 người thêm vào ở các nhóm tương ứng là a_1, a_2, a_3, a_4 với $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, đồng thời người ở nhóm a_i ngồi giữa hai người ở hai nhóm (b_i, c_i) , i.e. ngồi theo thứ tự $b_i \rightarrow a_i \rightarrow c_i$. Rõ ràng $b_i \neq c_i$ theo giả thiết qui nạp. Rõ ràng có $4! = 24$ cách xếp $\{a_i\}$ vào các nhóm 1, 2, 3, 4. Ta sẽ chứng minh rằng số cách xếp vi phạm nhỏ hơn 24. Thật vậy, với mọi $k = 1, 2, 3, 4$, để có một cách xếp với ít nhất k người vi phạm yêu cầu đề bài là

$$\binom{4}{k} \cdot 2^k \cdot (4 - k)!$$

(trước hết chọn ra k người vi phạm, sau đó $4 - k$ người còn lại được sắp xếp bất kỳ). Theo *nguyên lý bù trừ*, số cách xếp vi phạm là:

$$\sum_{k=1}^4 (-1)^{k-1} \cdot \binom{4}{k} \cdot 2^k \cdot (4 - k)! = 16 < 24 = 4!$$

Vậy luôn tồn tại một cách sắp xếp không vi phạm. Và do đó, trường hợp này cũng được xử lý.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. □