

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 18 - 10 - 2012

Thời gian làm bài: 180 phút.

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (4 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$$

Bài 2. (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{2u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 3. (4 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC với các đường cao AH, BK nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) sao cho các đường thẳng AM và BK cắt nhau tại E ; các đường thẳng BM và AH cắt nhau tại F . Chứng minh rằng khi M di động trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) thì trung điểm của đoạn EF luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 5. (4 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn: $P(x).P(x-3) = P(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

HẾT

ĐÁP ÁN ĐỀ VÒNG 1

Bài 1. (4 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$$

Giải

Đặt $z = x - 1$ Hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} yz = z + 2 \\ y^3 - 3y(z + 2) + 4z^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yz = z + 2 \\ y^3 - 3y^2z + 4z^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz = z + 2 \\ y = -z \vee y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} z = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Bài 2. (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{2u_n + 1}, \forall n \in N^* \end{cases}$$

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải

Từ giả thiết ta suy ra $u_n > 0, \forall n \in N^*$

Xét $f(x) = \frac{3x+4}{2x+1} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2(2x+1)}$, với $x > 0$, $f'(x) = \frac{-5}{(2x+1)^2} < 0, \forall x > 0$

Ta có
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in N^* \end{cases}$$

$f(x) > \frac{3}{2}, \forall x > 0$ và $f(x) - 4 = \frac{-5x}{2x+1} < 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow \frac{3}{2} < u_n < 4, \forall n \geq 2 \Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn

Đặt
$$\begin{cases} x_n = u_{2n-1} \\ y_n = u_{2n} \end{cases}$$

Do $f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên $g(x) = f(f(x))$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$f(x_n) = f(u_{2n-1}) = u_{2n} = y_n; f(y_n) = f(u_{2n}) = u_{2n+1} = x_{n+1}$

$g(x_n) = f(f(x_n)) = f(y_n) = x_{n+1}$

$u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{11}{4}; u_3 = \frac{49}{26} \dots$ Ta thấy $u_1 < u_3 \Rightarrow x_1 < x_2$

Giả sử rằng $x_k < x_{k+1} \Rightarrow g(x_k) < g(x_{k+1}) \Rightarrow x_{k+1} < x_{k+2}$. Vậy $x_n < x_{n+1}, \forall n \in N^*$

Suy ra (x_n) tăng và bị chặn trên $\Rightarrow (x_n)$ có giới hạn hữu hạn a .

Do $x_n < x_{n+1} \Rightarrow f(x_n) > f(x_{n+1}) \Rightarrow y_n > y_{n+1} \Rightarrow$ dãy (y_n) giảm và bị chặn dưới

$\Rightarrow (y_n)$ có giới hạn hữu hạn b.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_n, y_n \in \left(\frac{3}{2}; 4\right), \forall n \geq 2 \\ f(x_n) = y_n \\ f(y_n) = x_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b \in \left[\frac{3}{2}; 4\right] \\ f(a) = b \\ f(b) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \left[\frac{3}{2}; 4\right] \\ f(a) = b \\ f(b) - f(a) = a - b \quad (1) \end{cases} \quad (I)$$

$$(1) \Leftrightarrow a - b = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2b+1} - \frac{1}{2a+1} \right) \Leftrightarrow (a-b)[(2a+1)(2b+1)-5] = 0 \Leftrightarrow a = b$$

(do $(2a+1)(2b+1) \geq (3+1)(3+1) = 16 > 5$)

$$\text{Vậy từ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \in \left[\frac{3}{2}; 4\right] \\ a = \frac{3a+4}{2a+1} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2.$$

Vậy $\lim u_n = 2$

Bài 3. (4 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \quad (*)$$

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{yz}} + \sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{zx}} + \sqrt{\frac{1}{z} + \frac{1}{xy}} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \quad (**)$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{yz}} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{yz}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{yz}} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{yz} \geq \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{yz} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}} \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}} \quad (\text{đúng})$$

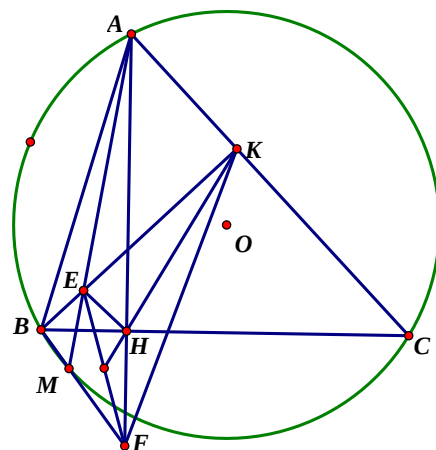
Chứng minh tương tự ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{zx}} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{zx}}, \quad \sqrt{\frac{1}{z} + \frac{1}{xy}} \geq \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta thu được (**).

Bài 4. (4 điểm) Cho tam giác nhọn ABC với các đường cao AH, BK nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) sao cho các đường thẳng AM và BK cắt nhau tại E ; các đường thẳng BM và AH cắt nhau tại F . Chứng minh rằng khi M di động trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) thì trung điểm của đoạn EF luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Giải



Ta chứng minh hai tam giác EHK và FHK có diện tích bằng nhau.

Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{MBC} = \alpha$

$$S_{EHK} = \frac{1}{2} KH \cdot KE \cdot \sin BKH = \frac{1}{2} KH \cdot KA \cdot \tan \alpha \cdot \sin BAH = \frac{1}{2} KH \cdot AB \cdot \cos A \cdot \tan \alpha \cdot \cos B$$

$$S_{FHK} = \frac{1}{2} HF \cdot HK \cdot \sin FHK = \frac{1}{2} BH \cdot \tan \alpha \cdot HK \cdot \sin AHK = \frac{1}{2} AB \cdot \cos B \cdot \tan \alpha \cdot HK \cdot \cos A$$

$S_{EHK} = S_{FHK}$ suy ra E, F cách đều HK mà E, F nằm về hai phía của HK

$\Rightarrow$ Trung điểm của EF nằm trên đường thẳng HK .

Bài 5. (4 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn : $P(x) \cdot P(x-3) = P(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Giải :

Ta tìm các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa $P(x)P(x-3)=P(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

□ Trường hợp $P(x) \equiv C$ (C là hằng số thực) :

$P(x) \equiv C$ thỏa (1) $\Leftrightarrow C^2 = C \Leftrightarrow C = 0 \vee C = 1 \Leftrightarrow P(x) \equiv 0$ hay $P(x) \equiv 1$

□ Trường hợp $\deg P \geq 1$

Gọi α là một nghiệm phức tùy ý của $P(x)$. Từ (1) thay x bằng α ta có $P(\alpha^2)=0 \Rightarrow x=\alpha^2$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Từ đó có $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}, \dots$ là các nghiệm của $P(x)$. Mà $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm (do đang xét $P(x)$ khác đa thức không)

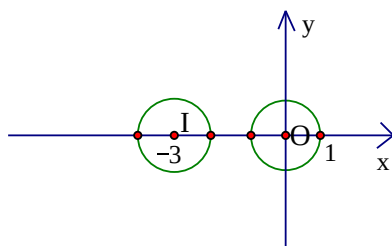
$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha| = 0 \\ |\alpha| = 1 \end{cases} \quad (I)$$

Từ (1) lại thay x bằng $\alpha+3$ ta có $P((\alpha+3)^2)=0 \Rightarrow x=(\alpha+3)^2$ là nghiệm của $P(x)$

Từ $x=(\alpha+3)^2$ là nghiệm của $P(x)$ tương tự phần trên ta có $(\alpha+3)^2, (\alpha+3)^4, (\alpha+3)^8, (\alpha+3)^{16}, \dots$ là các nghiệm của $P(x)$. Mà $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm

$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha+3|^2 = 0 \\ |\alpha+3|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha+3| = 0 \\ |\alpha+3| = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Như vậy, nếu α là nghiệm của $P(x)$ thì ta có α thỏa hệ $\begin{cases} (I) \\ (II) \end{cases}$



Biểu diễn các số phức α thỏa (I) và thỏa (II) trên mặt phẳng phức ta có hệ $\begin{cases} (I) \\ (II) \end{cases}$ không có nghiệm α

$\Rightarrow$ Không tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc lớn hơn hoặc bằng 1 thỏa (1)

Kết luận Các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa $P(x)P(x-3)=P(x^2) \quad \forall x$ gồm $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$