

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2009 - 2010

SỞ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: **04/11/2009**

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho dãy số $\{p_n\}$ là dãy tất cả các số nguyên tố thoả mãn $p_1 = 2$ và $p_n < p_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ luôn tồn tại số tự nhiên m sao cho $S_n < m^2 < S_{n+1}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho ba số thực dương thay đổi x, y và z thoả mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 - 6(x + y + z)$.

Câu 3. (4,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ có AB không song song với CD . Đường tròn (O_1) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng CD tại M , đường tròn (O_2) đi qua hai điểm C, D và tiếp xúc với đường thẳng AB tại N . Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại E và F . Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh rằng ba điểm E, F và I thẳng hàng.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho hai số tự nhiên k và n thoả mãn $1 \leq k \leq n$. Lấy tất cả các tập con có k phần tử của tập hợp $\{1; 2; \dots; n\}$. Mỗi tập con này đều có phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất. Gọi a là trung bình cộng của các phần tử nhỏ nhất và b là trung bình cộng của các phần tử lớn nhất. Chứng minh rằng $b = ka$.

-----**Hết**-----

Họ và tên:Số báo danh: