

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO NGHỆ AN

 KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI
 HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT
 NĂM HỌC 2010 - 2011

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 08/10/2010

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (4,0 điểm).

Cho P, Q là các số nguyên dương thỏa mãn P, Q và $P.Q$ đều không là số chính phương. Chứng minh rằng nếu $(a; b)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình $x^2 - PQy^2 = 1$ và $(c; d)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình

$$x^2 - PQy^2 = -1 \text{ thì ta có: } \begin{cases} c^2 + PQd^2 = a \\ 2cd = b \end{cases}$$

(Lưu ý: Nghiệm nguyên dương $(\alpha; \beta)$ được gọi là lớn hơn nghiệm nguyên dương $(\alpha'; \beta')$ nếu $\alpha > \alpha' > 0$ và $\beta > \beta' > 0$).

Câu 2 (4,0 điểm).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- i) $f(x^2 + y^2 + 2f(xy)) = f^2(x + y), \forall x, y \in \mathbb{Q};$
- ii) $\forall x, y \in (2010; +\infty): x \neq y \text{ thì } f(x) \neq f(y).$

Câu 3 (4,0 điểm).

Cho tam giác ABC và M, N là hai điểm di động trên đường thẳng BC sao cho $\overline{MN} = \overline{BC}$. Đường thẳng d_1 đi qua M và vuông góc với AC, đường thẳng d_2 đi qua N và vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của d_1 và d_2 . Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn AK luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Câu 4 (4,0 điểm).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn:

$$9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}.$

Câu 5 (4,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Ta chia tam giác ABC thành n tam giác nhọn. Hỏi giá trị nhỏ nhất của n là bao nhiêu?

- - - **Hết** - - -

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....