

KỶ THI HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ - LỚP 12

Năm học 2009 - 2010

Môn thi: TOÁN

Ngày thi 12 -11 - 2009

Thời gian làm bài 180 phút

Bài I: (6 điểm)

Cho hàm số $y = (x^2 - 1)^2 - (m + 1)^2(1 - m)^2$ (m là tham số).

1. Biện luận theo m số giao điểm của đồ thị hàm số trên với trục hoành.
2. Xác định các giá trị của m để đồ thị hàm số trên cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ tương ứng lập thành cấp số cộng.

Bài II: (5 điểm)

1. Giải phương trình: $9\left(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}\right) = x + 3$

2. Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{P_n}{A_{n+2}^n}$ với n là số nguyên dương (P_n là số hoán vị của tập hợp gồm n phần tử, A_{n+2}^n là số chỉnh hợp chập n của $n + 2$ phần tử).

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Bài III: (5 điểm)

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Với M là một điểm thuộc cạnh AB , chọn điểm N thuộc cạnh $D'C'$ sao cho $AM + D'N = a$.

1. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.
2. Tính thể tích của khối chóp $B'.A'MCN$ theo a . Xác định vị trí của điểm M để khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'MCN)$ đạt giá trị lớn nhất. Tính khoảng cách lớn nhất đó theo a .
3. Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc của điểm C xuống đường thẳng MN khi điểm M chạy trên cạnh AB .

Bài IV: (4 điểm)

1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $1 \geq x \geq y > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3y^2 + y^3 + x^2}{x^2 + y^2 + 1} \geq xy$$

2. Viết phương trình của đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số

$$y = (x - 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

tại hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số.