

UBND TỈNH AN GIANG
TRƯỜNG ĐH AN GIANG

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC TOÁN VÒNG 1

Môn thi: Đại số

Thời gian: 180 phút

Ngày thi: 08/11/2009

Câu 1: (2 điểm)

Nhân cột thứ hai và cột thứ ba của định thức đã cho với 3 rồi cộng cột thứ 2, 3, 4 vào cột thứ nhất ta được

$$D = \begin{vmatrix} (a_1 + a_2)^3 & a_1^2 a_2 & a_1 a_2^2 & a_2^3 & (a_1 + a_2)^3 \\ (a_2 + a_3)^3 & a_2^2 a_3 & a_2 a_3^2 & a_3^3 & (a_2 + a_3)^3 \\ (a_3 + a_4)^3 & a_3^2 a_4 & a_3 a_4^2 & a_4^3 & (a_3 + a_4)^3 \\ (a_4 + a_5)^3 & a_4^2 a_5 & a_4 a_5^2 & a_5^3 & (a_4 + a_5)^3 \\ (a_5 + a_1)^3 & a_5^2 a_1 & a_5 a_1^2 & a_1^3 & (a_5 + a_1)^3 \end{vmatrix} = 0$$

Câu 2: (2 điểm)

a) Do đa thức $\det(xI_n - A)$ khác 0 có bậc không quá n nên phương trình $\det(xI_n - A) = 0$ có không quá n nghiệm trong K . Suy ra có không quá n phần tử α khác nhau trong K sao cho $\det(\alpha I_n - A) = 0$.

b) Xét phương trình $\det(xA + B) = 0$. Do ma trận A khả nghịch nên ta có

$$\det(xI_n + BA^{-1}) \cdot \det A = 0 \Leftrightarrow \det(xI_n + BA^{-1}) = 0 \Leftrightarrow \det[xI_n - (-BA^{-1})] = 0$$

Áp dụng a) ta suy ra có không quá n phần tử α khác nhau trong K sao cho ma trận $(\alpha A + B)$ suy biến.

Câu 3: (2 điểm)

a) Ta có $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$

b) Gọi $A = (a_{ij})$, $A^{-1} = (b_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, $a_{ij} \geq 0$, $b_{ij} \geq 0$ với mọi i, j . Khi đó ta có

$$A \cdot A^{-1} = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) = I_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 0 & \text{nếu } i \neq j \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} a_{ik} b_{kj} = 0 & \text{nếu } i \neq j, k = \overline{1, n} \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a_{ik} = 0 \\ b_{kj} = 0 \end{bmatrix} & \text{nếu } i \neq j, k = \overline{1, n} \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

Suy ra $a_{ii}b_{ii} = 1, i = \overline{1, n} \Rightarrow b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}, i = \overline{1, n}$. Vậy các ma trận thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ii} > 0 (i = \overline{1, n})$$

Câu 4: (2 điểm)

Xét ma trận hệ số

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Ta tính $\det(A)$ như sau: Nhân (-1) cho dòng đầu rồi cộng vào các dòng còn lại ta được

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Sau đó cộng tất cả các cột thứ $i (i = \overline{2, n})$ vào cột thứ nhất của định thức này ta được

$$\det(A) = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = n+1 \neq 0$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm là $(0, 0, 0, \dots, 0)$.

Câu 5: (2 điểm)

Dễ thấy đa thức $P(x) = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Xét trường hợp $P(x) \neq 0$ và bậc của $P(x)$ là n . Khi đó ta có $\deg P(2x) = n, \deg P'(x) = n-1, \deg$
Theo đề bài ta có

$$n = (n-1) + (n-2) \Rightarrow n = 3$$

Suy ra $\deg P(x) = 3$. Gọi $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$. Theo đề bài ta có

$$8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b)$$

$$\Leftrightarrow 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = 18a^2x^3 + 18abx^2 + (4b^2 + 6ac)x + 2bc$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a = 18a^2 \\ 4b = 18ab \\ 2c = 4b^2 + 6ac \\ d = 2bc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Vậy $P(x) = \frac{4}{9}x^3$.