

ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC 2004 : MÔN ĐẠI SỐ

Câu 1 (3 điểm)

Chứng minh rằng : Đa thức $P(x)$ với các hệ số thuộc tập số nguyên $\mathbb{Z}$ không có nghiệm nguyên nếu $P(0)$ và $P(k)$ lẻ với k là một số lẻ nào đó cho trước.

Câu 2 (2,5 điểm)

Tính $1+2^2\varepsilon+3^2\varepsilon^2+\dots+n^2\varepsilon^{n-1}$ trong đó ε là một giá trị của $\sqrt[n]{1}$.

Câu 3 (3 điểm)

Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn: $AB+BA=0$ trong đó $B=AX-XA$ với X là ma trận vuông cấp n tùy ý.

Hãy chứng minh A^2 là ma trận có dạng:

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & k & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & k & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & k \end{bmatrix}$$

Câu 4

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ và $f(x) = x^2 - 4x - 6$ & $g(x) = x^{2003} - x + 6$.

1) (2,5 điểm)

Tính $|g(A)|$

2) (3 điểm)

Tính $[f(A)]^{2004}$

Câu 5 (3 điểm)

Hạng của 2 ma trận vuông A và B cấp n tương ứng là r_1 và r_2 . Hãy chứng minh hạng của ma trận tích $A.B$ không nhỏ hơn $r_1 + r_2 - n$.

Câu 6 (3 điểm)

Tìm ma trận A vuông cấp 3 thỏa mãn $A^2 = 0$.

Thời gian làm bài: 120 phút