

Chuyên mục: [Đề thi toán cao cấp](#)

Đề thi Olympic toán sinh viên ĐH Bách Khoa Hà Nội năm 2013

Ban Biên Tập

Thứ bảy, 26 Tháng 1 2013 12:58

Mời bạn thảo luận tại [đây](#)



Môn Giải tích

Câu 1: Tìm giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$

Câu 2: Tìm $L = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m$. Với $\alpha_m = \max_{x \in [0;1]} (x - x^m)$

Câu 3: Cho hàm $u(x)$ dương liên tục trên $[0; \infty)$. Hàm $\varphi(x)$ tăng và khả vi trên $[0; +\infty)$, $\varphi(0) = 1$.

Biết rằng với mọi $x \geq 0$, ta có:

$$u(x) \leq 1 + \int_0^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} u(t) dt$$

Chứng minh:

$$u(x) \leq \varphi(x), \forall x \in [0; +\infty)$$

Câu 4: Cho $f_1(x) = 4x^3 - 3x$, $f_{n+1} = f_1(f_n)$. Tính:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n^2(x) dx$$

Câu 5: Tìm tất cả hàm $f(x)$ xác định trên $(0; \infty)$ và khả vi 2 lần thỏa mãn :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(f'(x)) = -f(x) \end{cases}$$

Môn Đại số

Câu 1. cho Ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$

a. Cmr $A^2 - A + E = 0$ tính $f(A) = E + \sum_{k=1}^{2013} (-1)^k A^k$ với E là ma trận đơn vị cấp 2

b. Tính B^{2016}

Câu 2. Cho ma trận A là một ma trận thực, vuông cấp n. CMR $\det(A - A^t) \geq 0$ với A^t là ma trận chuyển vị của ma trận A

Câu 3. Cho ma trận A là ma trận vuông cấp n. Vết của A, kí hiệu $tr(A)$ là tổng các phần tử chéo của A. Ma trận A gọi là ma trận lũy đẳng nếu $A^2 = A$. CMR:

- Nếu A là ma trận lũy đẳng thì A chéo hóa được
- A là ma trận lũy đẳng khi và chỉ khi $rank(A) = tr(A)$ và $rank(E - A) = tr(E - A)$

Câu 4. Tính định thức của ma trận vuông cấp 2013 $A = [a_{ij}]$ với:

$$a_{ij} = \begin{cases} b & \text{khi } i=j \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Câu 5. Cho đa thức $f(x) \in R[x]$ có ít nhất 2 nghiệm thực.

CMR đa thức $p(x) = f(x) - 4026f'(x) + 2013f''(x)$ cũng có ít nhất 2 nghiệm

BBT xin trân trọng cảm ơn bạn Hoàng Quốc Việt đã cung cấp cho chúng tôi đề thi này