

**Giải đề thi tuyển sinh Sau Đại Học môn Toán năm 2010**  
**Trường Đại Học Mở TP.HCM**

Người giải đề: [ho\\_vinh1412](#).

**PHẦN ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH (4 điểm)**

**Câu 1.**

**1. Giải và biện luận hệ phương trình:**

$$\begin{cases} mx + 2y - mz = m + 3 \\ (m-1)x + my + 4z = 0 \\ 3x + (m-1)y + mz = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Xét ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & -m \\ m-1 & m & 4 \\ 3 & m-1 & m \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -m^2 + 5m + 24 = (-m+8)(m+3)$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow m = 8 \text{ hay } m = -3$$

**Trường hợp 1:  $m = 8$**

$$\text{Hệ (1) tương đương: } \begin{cases} 8x + 2y - 8z = 11 \\ 7x + 8y + 4z = 0 \\ 3x + 7y + 8z = 0 \end{cases}$$

Ta có ma trận hệ số mở rộng:

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & -8 & 11 \\ 7 & 8 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & -8 & 11 \\ 0 & 50 & 88 & -77 \\ 0 & 50 & 88 & -33 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & -8 & 11 \\ 0 & 50 & 88 & -77 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow R(A) = 2 < R(\overline{A}) = 3 \Rightarrow \text{Hệ (1) vô nghiệm}$$

**Trường hợp 2:  $m = -3$**

$$\text{Hệ (1) tương đương: } \begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ -4x - 3y + 4z = 0 \\ 3x - 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow R(A) = R(\overline{A}) = 2 < \text{số ẩn} \Rightarrow \text{Hệ (1) có vô nghiệm}$$

$$\text{Hệ (1) tương đương: } \begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ -17y = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Trường hợp 3:**  $m \neq 8$  và  $m \neq -3$

$\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$  Theo Cramer: Hệ (1) có nghiệm duy nhất

Đặt:

$$D_1 = \begin{vmatrix} m+3 & 2 & -m \\ 0 & m & 4 \\ 0 & m-1 & m \end{vmatrix} = (m+3) \begin{vmatrix} m & 4 \\ m-1 & m \end{vmatrix} = (m+3)(m^2 - 4m + 4) = (m+3)(m-2)^2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} m & m+3 & -m \\ m-1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & m \end{vmatrix} = -(m+3) \begin{vmatrix} m-1 & 4 \\ 3 & m \end{vmatrix} = -(m+3)(m^2 - m - 12) = -(m+3)^2(m-4)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} m & 2 & m+3 \\ m-1 & m & 0 \\ 3 & m-1 & 0 \end{vmatrix} = (m+3) \begin{vmatrix} m-1 & m \\ 3 & m-1 \end{vmatrix} = (m+3)(m^2 - 5m + 1)$$

Nghiệm của hệ (1) là:

$$\begin{cases} x = \frac{D_1}{|A|} = \frac{(m+3)(m-2)^2}{(-m+8)(m+3)} \\ y = \frac{D_2}{|A|} = \frac{-(m+3)^2(m-4)}{(-m+8)(m+3)} \\ z = \frac{D_3}{|A|} = \frac{(m+3)(m^2-5m+1)}{(-m+8)(m+3)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{(m-2)^2}{(-m+8)} \\ y = \frac{-(m+3)(m-4)}{(-m+8)} \\ z = \frac{(m^2-5m+1)}{(-m+8)} \end{cases}$$

## 2. Cho mô hình Input-Output Leontief với ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ và } D = (95; 85; 90)$$

Gọi  $X = (x_1; x_2; x_3)$  là sản lượng của mỗi ngành  
 $I_3$  là ma trận đơn vị cấp 3

Ta có:

$$(I_3 - A)X = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,1 \\ -0,3 & 0,8 & -0,4 \\ -0,2 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 95 \\ 85 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Đặt:

$$C = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,1 \\ -0,3 & 0,8 & -0,4 \\ -0,2 & -0,1 & 0,7 \end{vmatrix} = \frac{31}{100} \neq 0$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} 95 & -0,3 & -0,1 \\ 85 & 0,8 & -0,4 \\ 90 & -0,1 & 0,7 \end{vmatrix} = \frac{861}{10}$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} 0,8 & 95 & -0,1 \\ -0,3 & 85 & -0,4 \\ -0,2 & 90 & 0,7 \end{vmatrix} = \frac{2099}{20}$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,3 & 95 \\ -0,3 & 0,8 & 85 \\ -0,2 & -0,1 & 90 \end{vmatrix} = \frac{1589}{20}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{C_1}{C} = \frac{8610}{31} \\ x_2 = \frac{C_2}{C} = \frac{10495}{31} \\ x_3 = \frac{C_3}{C} = \frac{7945}{31} \end{cases}$$

Vậy sản lượng của mỗi ngành là  $X = (x_1; x_2; x_3) \Leftrightarrow X = \left( \frac{8610}{31}; \frac{10495}{31}; \frac{7945}{31} \right)$

**Câu 2.**

**1. Tính giới hạn:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2x} - e^x - x}{\ln(1-2x) - 2\ln(1-x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2e^{2x} - e^x - 1}{\frac{-2}{1-2x} + \frac{2}{1-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2e^{2x} - e^x - 1}{-2x} \right) (1-2x)(1-x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)(1-x) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2e^{2x} - e^x - 1}{-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - e^x}{-2} = -\frac{3}{2}$$

## 2. Tìm mức sản lượng để lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất

$$\Pi = TR - TC = -Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2 + 170Q_1 + 235Q_2 - 100$$

Ta có:

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_1} = -2Q_1 - Q_2 + 170 \\ \Pi'_{Q_2} = -Q_1 - 2Q_2 + 235 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \Pi'_{Q_1} = -2Q_1 - Q_2 + 170 \\ 0 = \Pi'_{Q_2} = -Q_1 - 2Q_2 + 235 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 35 > 0 \\ Q_2 = 100 > 0 \end{cases}$$

Lập ma trận Hess:

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = -2 < 0 \quad \forall Q_1, Q_2 > 0$$

$$H_2 = |H| = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad \forall Q_1, Q_2 > 0$$

$$\text{Vậy: } \Pi_{\max} \text{ tại } \begin{cases} Q_1 = 35 \\ Q_2 = 100 \end{cases}$$

## PHẦN XÁC SUẤT

### Câu 1:

Gọi:  $A_i$  là biến cố bắn trúng lần thứ  $i$  ( $i=1,2$ )

$B$  là biến cố bắn trúng phát II

$C$  là biến cố bắn trượt hết cả hai phát.

$$\begin{aligned} \text{a. } B &= A_1A_2 + \overline{A_1}A_2 \Rightarrow P(B) = P(A_1A_2 + \overline{A_1}A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2) \\ &\Rightarrow P(B) = P(A_1)P(A_2/A_1) + P(\overline{A_1}).P(A_2/\overline{A_1}) = 0.8 \times 0.6 + 0.2 \times 0.3 = 0.54 = 54\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } C &= \overline{A_1}\overline{A_2} \Rightarrow P(C) = P(\overline{A_1}\overline{A_2}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}/\overline{A_1}) \\ &\Rightarrow P(C) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 = 14\% \end{aligned}$$

### Câu 2:

a. Gọi  $X$  là trọng lượng của con bò.  $X \sim N(250; 40^2)$

$$\text{Ta cần tính: } P(|X - \mu| < 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{40}\right) = 2\Phi(0.25) = 2 \times 0.0987 = 0.1974$$

$$\text{b. } P(X > 300) = 1 - P(X < 300) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{300 - 250}{40}\right)\right) = \frac{1}{2} - \Phi(1.25) = 0.5 - 0.3944 = 0.1056$$

## PHẦN THỐNG KÊ

|            |   |      |    |      |    |    |
|------------|---|------|----|------|----|----|
| Lượng nước | 5 | 12.5 | 20 | 32.5 | 50 | 80 |
| Số hộ      | 9 | 22   | 29 | 20   | 15 | 5  |

### 1. Kiểm định trung bình

Tính được:  $n = 100$ ;  $\bar{x} = 27$ ;  $s = 18.254$

Độ tin cậy = 96%  $\Rightarrow z_{\alpha} = 2.054$

Đặt H:  $\mu = \mu_0 = 23.75$

$$\bar{H}: \mu \neq \mu_0$$

Với  $\mu$  là mức sử dụng nước trung bình một tháng hiện nay

$$|z| = \left| \bar{x} - \mu_0 \right| \frac{\sqrt{n}}{s} = 1.78$$

$\Rightarrow 1.78 = |z| < z_{\alpha} = 2.054 \Rightarrow$  Chấp nhận H.

Vậy mức sử dụng nước hiện nay không tăng so với trước đây.

### 2. Ước lượng tỷ lệ

Tính được:  $f = \frac{29 + 20 + 15}{100} = 0.64 = 64\%$

Độ tin cậy = 98%  $\Rightarrow z_{\alpha} = 2.326$

Gọi p là tỷ lệ hộ có mức tiêu thụ bình thường

$$p = f \pm z_{\alpha} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 64\% \pm 2.326 \sqrt{\frac{0.64(1-0.64)}{100}} = 64\% \pm 11.16\%$$

$\Rightarrow 52.84\% < p < 75.16\%$

### 3. Tính số hộ

Độ tin cậy = 98%  $\Rightarrow z_{\alpha} = 2.326$

$$\varepsilon = 10\%$$

$$\Rightarrow n = \frac{z_{\alpha}^2}{\varepsilon^2} f(1-f) = \frac{2.326^2}{0.1^2} 0.64(1-0.64) = 125$$

Vậy số hộ cần là 125 hộ.

### 4. Ước lượng mức tiêu thụ bình thường

|                        |    |      |    |
|------------------------|----|------|----|
| Lượng nước bình thường | 20 | 32.5 | 50 |
| Số hộ                  | 29 | 20   | 15 |

Tính được:  $n = 64$ ;  $\bar{x} = 30.9375$ ;  $s = 11.9315$

Độ tin cậy = 98%  $\Rightarrow z_{\alpha} = 2.326$

$$\mu = \bar{x} \pm z_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} = 30.9375 \pm 2.326 \frac{11.9215}{\sqrt{64}} = 30.9375 \pm 3.4691$$

$\Rightarrow 27.4684 < \mu < 34.4066$