

Câu 3: (VMO 2015):**Cách 1:**

$$\text{Đặt } P(x) = (x + x^2 + x^5)(1 + x + x^2 + x^5)^{i-1}$$

Gọi A_i là số số có i chữ số lập từ tập $\{0, 1, 2, 5\}$ mà chia hết cho ba

Khi đó $A_i = \frac{1}{3}(P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2))$ với $\varepsilon = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$ là căn bậc

của 1.

$$\text{Ta có } P(1) = 3 \cdot 4^{i-1}$$

$$P(\varepsilon) = (\varepsilon + 2\varepsilon^2)\varepsilon^{2i-2}; \quad P(\varepsilon^2) = (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)\varepsilon^{i-1}$$

$$\text{Suy ra } A_i = \frac{1}{3}(3 \cdot 4^{i-1} + (\varepsilon + 2\varepsilon^2)\varepsilon^{2i-2} + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)\varepsilon^{i-1})$$

Vậy số các số lập từ $\{0, 1, 2, 5\}$ chia hết cho 3 mà không vượt quá 10^k là

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} \left(\sum_{i=0}^{k-1} 3 \cdot 4^i + \sum_{i=1}^k (\varepsilon^{2i-1} + 2\varepsilon^{2i}) + \sum_{i=1}^k (2\varepsilon^i + \varepsilon^{k+1}) \right) \\ &= \frac{4^k - 1}{3} + \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^k \varepsilon^{2i} + 2 \sum_{i=1}^k \varepsilon^i + \sum_{i=1}^k \varepsilon^{i+1} \right) \end{aligned}$$

Vậy

$$k = 3m, m \in \mathbb{N} \text{ thì } T = \frac{4^{k-1} - 1}{3}$$

$$k = 3m + 1, m \in \mathbb{N} \text{ thì } T = \frac{4^{k-1} - 4}{3}$$

$$k = 3m + 2, m \in \mathbb{N} \text{ thì } T = \frac{4^{k-1} - 7}{3}$$