MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VỀ TỔ HỢP DÀNH CHO HỌC SINH CÓ NĂNG KHIẾU TOÁN BẬC TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Mục lục

Mở đầu

Có thể nói tư duy về tổ hợp ra đời từ rất sớm. Vào thời nhà Chu, người ta đã biết đến các hình vẽ có liên quan đến những hình vuông thần bí. Thời cổ Hy lạp, nhà triết học Kxenokrat, sống ở thế kỷ thứ 4 trước công nguyên, đã biết tính số các từ khác nhau lập từ một bảng chữ cái cho trước. Nhà toán học Pitago và các học trò của ông đã tìm ra nhiều con số có tính chất đặc biệt. Việc tìm ra được các số như vậy đòi hỏi phải có một nghệ thuật tổ hợp nhất định. Tuy nhiên, có thể nói rằng, lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới và quãng thế kỷ 17 bằng một loạt các công trình nghiên cứu nghiêm túc của các nhà toán học xuất sắc như Pascal, Fermat, Leibnitz, Euler...Mặc dù vậy, trong suốt hai thế kỷ rưỡi, tổ hợp không có vai trò nhiều trong việc nghiên cứu tự nhiên. Đến nay, với sự hỗ trợ đắc lực của máy tính , tổ hợp đã chuyển sang lĩnh vực toán ứng dụng với sự phát triển mạnh mẽ, có nhiều kết quả có ích cho con người.

Nhận thức được vai trò của lý thuyết tổ hợp đối với đời sống hiện đại. Lý thuyết tổ hợp đã được đưa vào chương trình học phổ thông và chiếm một phần trong các kỳ thi toán quốc gia và quốc tế. Tuy nhiên, ở nước ta, tài liệu viết về tổ hợp chưa nhiều. Do đó, bản luận văn này sẽ cung cấp thêm một tài liệu về tổ hợp cho học sinh phổ thông; đặc biệt là dành cho những em học sinh có năng khiếu môn toán. Chúng tôi hi vọng luận văn này sẽ đáp ứng được phần nào lòng yêu thích khám phá toán học của các em. Đồng thời đây cũng là một tài liệu để các đồng nghiệp tham khảo.

Luận văn gồm ba chương. Chương một chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản của tổ hợp theo một lôgic khác so với sách phổ thông nhằm gây sự mới lạ cho học sinh. Chương hai là trọng tâm của luận văn. Trong chương này, học sinh được tìm hiểu mười chuyên đề:

Chuyên đề 1: Quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Chuyên đề 2: Hoán vị và tổ hợp.

Chuyên đề 3: Nguyên lý chuồng chim bồ câu.

Chuyên đề 4: Các số Ramsey.

Chuyên đề 5: Các số Catalan.

Chuyên đề 6: Các số Stirling.

Chuyên đề 7: Hoán vị và tổ hợp tổng quát.

Chuyên đề 8: Nguyên lý bao hàm và loại trừ.

Chuyên đề 9: Những sự xáo trộn và những sự sắp đặt trước.

Chuyên đề 10: Đại lượng bất biến.

Trong mỗi chuyên đề, các bài tập thường được dẫn dắt theo những chủ đề nhất định. Qua đó học sinh tự tìm thấy cho mình những kiến thức liên quan đến chủ đề được nêu. Đồng thời, mỗi bài đều có lời giải chi tiết, ngắn gọn, đầy sáng tạo và bất ngờ. Các lời giải này ít gặp trong các tài liệu về tổ hợp có trên thị trường. Tác giả hi vọng chính điều này kích thích sự ham hiểu biết, lòng say mê của các học sinh có năng khiếu toán. Chương ba có nội dung là những bài tập đề nghị được chọn lựa kĩ lưỡng; nhằm giúp các em vận dụng những kiến thức thu được từ hai chương trước để nâng cao kỹ năng giải toán tổ hợp của mình.

Sau một thời gian nghiên cứu luận văn đã được hoàn thành. Tuy nhiên sẽ không tránh khỏi nhiều sai sót. Kính mong sự góp ý của quý thầy cô, các bạn đồng nghiệp và các em học sinh. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn!

Chương 1
Kiến thức cơ bản

1.1. Quy tắc cộng và quy tắc nhân

Quy tắc cộng: Nếu $E_i (i = 1, ..., k)$ là k sự kiện thoả mãn:

(i) Không có hai sự kiện nào trong số chúng xảy ra đồng thời

(ii) E_i có thể xảy ra theo n_i cách

thì một trong k sự kiện có thể xảy ra theo $(n_1 + n_2 + ... + n_k)$ cách.

Ví dụ 1.1.1 Một lớp học có 18 học sinh nam và 12 học sinh nữ thì có $18 + 12 = 30$ cách chọn một học sinh (không kể nam, nữ) làm người đại diện cho lớp.

Ví dụ 1.1.2 Giả thiết E là sự kiện chọn các số nguyên tố nhỏ hơn 10 và F là sự kiện chọn các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn 10.

Thì: E có 4 cách xảy ra, F có 4 cách xảy ra. Nhưng vì 2 là một số nguyên tố chẵn nên một trong hai sự kiện E hoặc F có thể xảy ra theo $4+4-1 = 7$ cách.

Quy tắc nhân: Nếu $E_i (i = 1, ..., k)$ là k sự kiện và E_1 có thể xảy ra theo n_1 cách; E_2 có thể xảy ra theo n_2 cách (không phụ thuộc đến việc E_1 xảy ra như thế nào); E_3 có thể xảy ra theo n_3 cách (không phụ thuộc đến việc E_1 và E_2 xảy ra như thế nào),...,E_k có thể xảy ra theo n_k cách (không phụ thuộc đến $(k - 1)$ sự kiện trước xảy ra như thế nào), thì k sự kiện có thể xảy ra đồng thời theo $n_1.n_2.n_3...n_k$ cách.

Ví dụ 1.1.3 Một giá sách có 6 quyển sách tiếng Anh đôi một khác nhau; 8 quyển sách tiếng Pháp đôi một khác nhau và 10 quyển sách tiếng Đức đôi một khác nhau.

(i) Có $6.8.10 = 480$ cách chọn lấy 3 quyển sách trong đó mỗi quyển một thứ tiếng.

(ii) Có $6 + 8 + 10 = 24$ cách chọn lấy 1 quyển sách bất kỳ trong số các quyển sách nói trên.

Ví dụ 1.1.4 Nếu một bài thi trắc nghiệm có 8 câu hỏi mỗi câu hỏi có 3 phương án trả lời (một phương án đúng và hai phương án sai). Vậy số cách chọn câu trả lời của tất cả 8 câu hỏi trên là $3^8 = 6561$ cách.

1.2. Hoán vị và tổ hợp

Cho X là một tập hợp bao gồm n phần tử và r là một số nguyên không âm nhỏ hơn hoặc bằng n.

Định nghĩa 1.2.1 Một r-hoán vị của X là một bộ sắp thứ tự gồm r phần tử từ n phần tử của X.

Một n-hoán vị của X được gọi là một hoán vị của X.

Số r-hoán vị của một tập hợp n phần tử được ký hiệu là $P(n, r)$.

Ví dụ 1.2.2 $\{2, 3, 4\}$ và $\{2, 4, 3\}$ là hai 3-hoán vị khác nhau của $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Định nghĩa 1.2.3 Một r-tổ hợp của X là một tập con gồm r phần tử của X.

Số r-tổ hợp của một tập hợp n phần tử được ký hiệu là $C(n, r)$.

Định lý 1.2.4 (i) $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

$$(ii)\ C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, n-r)$$

Ở đây chúng ta đưa ra hàm giai thừa:

$$m! \equiv (1).(2)...(m) \quad \text{và} \quad 0! \equiv 1$$

Chứng minh: (i) Có n cách chọn một phần tử bất kỳ của X vào vị trí đầu tiên trong r vị trí; có $(n-1)$ cách chọn một phần tử từ nhóm $(n-1)$ phần tử còn lại để chiếm vị trí thứ hai trong số r vị trí. Chú ý rằng số cách chọn phần tử chiếm vị trí thứ hai không phụ thuộc vào cách chọn phần tử chiếm ở vị trí thứ nhất như thế nào.

Do đó theo quy tắc nhân, hai vị trí đầu tiên có thể lấp đầy bởi $n(n-1)$ cách...và tất cả r vị trí có thể lấp đầy bởi:

$$P(n,r) = n(n-1)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

cách.

(ii) Để đánh giá $C(n,r)$, chú ý rằng một r-hoán vị của tập hợp n phần tử X là hoán vị của một r-tập con nào đó của X.

Hơn nữa, những r-tập con phân biệt sinh ra r-tổ hợp phân biệt. Do đó, bằng quy tắc cộng ta có:

$$P(n,r) = P(r,r) + P(r,r) + ... + P(r,r)$$

Số các số hạng ở vế phải là số các r-tập con của X tức là $C(n,r)$. Do đó ta có:

$$P(n,r) = C(n,r)P(r,r) = C(n,r)r!$$

Mỗi r-tập con của X có một tập con bù duy nhất là $(n-r)$-tập con. Từ đó ta có một quan hệ quan trọng là:

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

Đặc biệt, số hoán vị của n phần tử là:

$$P(n,n) = n!$$

Nhận xét 1.2.5 Trong chương trình phổ thông, một r- hoán vị của một tập hợp có n phần tử được gọi là một chỉnh hợp chập r của n phần tử, một r- tổ hợp của một tập hợp có n phần tử được gọi là một tổ hợp chập r của n phần tử đó.

Ví dụ 1.2.6 Một câu lạc bộ gồm 12 học sinh khối 12; 10 học sinh khối 11; 9 học sinh khối 10. Cần lập ra một ban đại diện gồm: 4 học sinh khối 12; 4 học sinh khối 11; 3 học sinh khối 10. Vậy ta có: $C(12,4) = \dfrac{12!}{4!8!} = 495$

cách chọn 4 học sinh khối 12; $C(10, 4) = 210$ cách chọn 4 học sinh khối 11; $C(9, 3) = 84$ cách chọn 3 học sinh khối 10. Bằng quy tắc nhân, số cách để chọn ra ban đại diện trên là: $495.210.84 = 8731800$ cách.

1.3. Nguyên lý chuồng chim bồ câu (Nguyên lý Dirichlet)

Một số kết quả sâu sắc của lý thuyết tổ hợp xuất phát từ một mệnh đề đơn giản:

Nếu n chuồng chim bồ câu là nơi trú ẩn của ít nhất $(n + 1)$ con chim bồ câu thì có ít nhất một chuồng chim chứa từ hai con chim bồ câu trở lên.

Ví dụ 1.3.1 Giả thiết rằng có nhiều chiếc tất đỏ, nhiều chiếc tất trắng và nhiều chiếc tất xanh ở trong hộp. Hỏi phải lấy từ hộp đó ra ít nhất bao nhiêu chiếc tất (khi lấy không nhìn vào bên trong) để chắc chắn được 2 chiếc cùng màu.

Giải

Mỗi một màu được coi như một chuồng chim bồ câu vậy $n = 3$. Do đó, nếu lấy $n + 1 = 4$ chiếc tất thì ít nhất có hai chiếc tất cùng màu. Một tổng quát đơn giản của nguyên lý chuồng chim bồ câu như sau:

Nếu n chuồng chim bồ câu là nơi trú ẩn của $kn + 1$ con chim bồ câu với k là một số nguyên dương thì ít nhất có một chuồng chứa từ $k + 1$ con chim bồ câu trở lên.

Ví dụ 1.3.2 Tương tự như ví dụ 1.3.1 nếu cần lấy 6 chiếc tất cùng màu thì ta vẫn có $n = 3$ và để đảm bảo rằng một (hay nhiều hơn) trong số các chuồng đó chứa $k + 1 = 6$ (hoặc nhiều hơn) con chim bồ câu thì chúng ta phải lấy $kn + 1 = 16$ con chim. Do đó đáp số là 16 chiếc tất.

Ví dụ 1.3.3 Một tủ chứa 20 chiếc áo sơ mi trong đó có 4 chiếc màu đỏ; 7 chiếc màu trắng và 9 chiếc màu xanh. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu chiếc áo (khi lấy không được nhìn vào tủ) để lấy được $r = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ chiếc áo cùng màu?

Giải

$*$) Trường hợp 1: $r = 4 = k + 1$. Suy ra $k = 3$. Có 3 màu nên $n = 3$. Do đó, cần phải lấy ra ít nhất $kn + 1 = 3.3 + 1 = 10$ chiếc áo sơ mi.

$*$) Trường hợp 2: $r = 5 = k + 1$. Suy ra $k = 4$. Phân tích đơn giản nhất, chúng ta tưởng tượng rằng những chiếc áo được lấy ra từ tủ một cách tuần tự. Tình huống "lãng phí" sự di chuyển nhất là 4 chiếc áo lấy ta đầu tiên cùng màu đỏ. Do đó các chiếc còn lại phải lấy ra có màu xanh hoặc màu trắng. Để chắc chắn $r = 5$ chiếc áo lấy ra có cùng màu thì $n = 2$. Số lượng áo ít nhất có màu xanh hoặc màu trắng cần lấy ra là: $kn + 1 = 4.2 + 1 = 9$ (theo nguyên lý chuồng chim bồ câu). Vậy cần lấy ra ít nhất $4 + 9 = 13$ chiếc áo.

$*$) Trường hợp 3: $r = 6 = k + 1$. Suy ra $k = 5$. Tương tự như trường hợp 2, kết quả là $4 + kn + 1 = 4 + 5.2 + 1 = 15$ chiếc áo cần phải lấy ra.

$*$) Trường hợp 4: $r = 7 = k + 1$. Suy ra $k = 6$. Tương tự kết quả là $4 + kn + 1 = 4 + 6.2 + 1 = 17$ chiếc áo cần phải lấy ra.

$*$) Trường hợp 5: $r = 8 = k + 1$. Suy ra $k = 7$. Bây giờ nếu lấy ra những chiếc áo màu đỏ hoặc màu trắng thì đều vô giá trị. Do đó số chiếc áo cần lấy ra là: $4 + 7 + kn + 1 = 4 + 7 + 7.1 + 1 = 19$ chiếc.

$*$) Trường hợp 6: $r = 9 = k + 1$. Tương tự như trường hợp 5 ta có kết quả: $4 + 7 + kn + 1 = 4 + 7 + 8.1. + 1 = 20$ chiếc áo cần phải lấy ra.

Cho S là một tập hợp, tạo thành bởi x_1 đối tượng có dấu hiệu 1; $x_2 \geq x_1$ đối tượng có dấu hiệu 2; $x_3 \geq x_2$ đối tượng có dấu hiệu 3,..., $x_n \geq x_{n-1}$ đối tượng có dấu hiệu n. Kí hiệu v_r là số nguyên nhỏ nhất thoả mãn tất cả các tập con gồm v_r phần tử của S mà mỗi tập con chứa ít nhất r đối tượng có cùng một dấu hiệu. Khi đó:

$$v_r = \begin{cases} n(r-1)+1, & r \leq x_1 \\ (n-1)(r-1)+1+x_1, & x_1 < r \leq x_2 \\ (n-2)(r-1)+1+x_1+x_2, & x_2 < r \leq x_3 \\ \text{...} & \\ (1)(r-1)+1+x_1+x_2+...+x_{n-1}, & x_{n-1} < r \leq x_n \end{cases}$$

Định nghĩa 1.3.4 Nếu x là một số thực thì phần nguyên của x, kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x.

Định lý 1.3.5 Nếu nhốt m con chim bồ câu vào n chuồng thì ít nhất một chuồng chứa từ $p+1$ con trở lên với $p = \left[\dfrac{(m-1)}{n}\right]$.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, tất các chuồng đều chứa nhiều nhất p con chim. Vậy số chim bồ câu nhỏ hơn hoặc bằng $np \leq n\left(\dfrac{m-1}{n}\right) = m-1 < m$ (mâu thuẫn).

Ví dụ 1.3.6 Giả sử có 26 sinh viên ($m = 26$) và 7 chiếc ô tô để chở họ. Vậy có $p = \left[\dfrac{25}{7}\right] = 3$. Do đó có ít nhất một chiếc ô tô chở từ 4 sinh viên trở lên.

1.4. Hoán vị và tổ hợp tổng quát

Định nghĩa 1.4.1 Nếu X là một đa tập gồm n vật (không cần thiết phải phân biệt), bất kỳ một sự sắp xếp nào của $r \leq n$ vật từ đa tập X được gọi là một r-hoán vị tổng quát của X (nếu $r = n$ chúng ta gọi đơn giản là hoán vị tổng quát của X).

Ví dụ 1.4.2 Đa tập $X = \{A, A, B, B, B, C, C\}$ có $AABCBBC$ là một hoán vị tổng quát của X.

Nếu $n_i (i = 1, 2, ..., k)$, r và n là $k+2$ số nguyên dương thoả mãn $n_1 + n_2 + ... + n_k = r \leq n$ ta đặt $P(n; n_1, n_2, ..., n_k) \equiv \dfrac{P(n,r)}{n_1!n_2!...n_k!}$

Nhận xét 1.4.3 Từ $P(n,r) = \dfrac{P(n,n)}{(n-r)!}$ ta có:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = P(n; n_1, n_2, ..., n_k, n-r)$$

Ví dụ 1.4.4 $P(18;3,4,6) = \dfrac{P(18,3+4+6)}{3!4!6!} = \dfrac{P(18,13)}{3!4!6!} = \dfrac{18!}{3!4!6!5!}$
$= \dfrac{P(18;3+4+6+5)}{3!4!6!5!}$
$= P(18;3,4,6,5)$ Ta nhận được công thức cho số hoán vị của một đa tập bởi định lý sau:

Định lý 1.4.5 Số các hoán vị tổng quát của một đa tập X bao gồm n_i vật giống nhau có cùng dấu hiệu i $(i = 1, 2, ..., k)$ là $P(n; n_1, n_2, ..., n_k)$; ở đây $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Chứng minh: Gọi p là tổng số các hoán vị tổng quát của X. Nếu n vật của X là phân biệt thì $P(n,n)$ là số hoán vị của X. Khi đó, so sánh số hoán vị tạo bởi n_1 vật phân biệt có dấu hiệu 1 và $n - n_1$ phần tử còn lại với số hoán vị tạo bởi n_1 vật giống nhau có dấu hiệu 1 và $n - n_1$ vật còn lại thì số hoán vị tăng lên $n_1!$ lần. Điều này cũng đúng đối với những vật có dấu hiệu i $(i = 2, 3, ..., k)$. Do đó theo quy tắc nhân, đặt $q = n_1!n_2!...n_k!$ thì ta có:

$$p = \frac{P(n,n)}{q} = P(n; n_1, n_2, ..., n_k)$$

Ví dụ 1.4.6 $X = \{C, E, E, I, M, M, O, T, T\}$ thì số hoán vị tổng quát của X là:

$$P(9,1,2,1,2,1,2) = \frac{9!}{1!2!1!2!1!2!} = 45360$$

Nhận xét 1.4.7 Trong chương trình phổ thông, hoán vị tổng quát gọi là hoán vị lặp.

Ví dụ 1.4.8 Hỏi có bao nhiêu cách xếp hết 4 quả bóng màu đỏ giống nhau; 3 quả bóng màu trắng giống nhau; 5 quả bóng màu xanh giống nhau, vào 18 vị trí thẳng hàng cho trước (mỗi vị trí có nhiều nhất 1 bóng).

Giải

Số cách xếp là:

$$P(18;4,3,5) = \frac{18!}{4!3!5!6!} = 514594080$$

Giả sử rằng X là tập hợp n phần tử và S là một tập con bất kỳ của X có r phần tử. Một sự phân chia có quan tâm đến thứ tự của S được gọi là một r-tổ hợp tổng quát của X. Nếu $r = n$, chúng ta có khái niệm tổ hợp tổng quát của X.

Số r-tổ hợp tổng quát của X có n_1 phần tử ở ô chứa thứ 1; n_2 phần tử ở ô chứa thứ 2.;...; n_k phần tử ở ô chứa thứ k kí hiệu $C(n;n_1,n_2,...,n_k)$ trong đó $n_1 + n_2 + ... + n_k = r$ là:

$$\begin{aligned} C(n;n_1,n_2,...,n_k) &= C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)....C(n-n_1-n_2-...-n_{k-1}) \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!(n-r)!} = \frac{P(n,r)}{n_1!n_2!...n_k!} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Định lý 1.4.9 $C(n;n_1,n_2,...,n_k) = P(n;n_1,n_2,...,n_k)$ trong đó $n_1 + n_2 + ... + n_k = r \leq n$

Ví dụ 1.4.10 Có 17 sinh viên muốn đi dự tiệc và có 5 ô tô đến đón họ. Tuy nhiên số chỗ ngồi còn trống trên 5 xe là $4, 4, 2, 5$ và 1. Do đó chỉ đủ chỗ ngồi cho 16 sinh viên. Vậy số cách chở 16 sinh viên trong 17 sinh viên trên là:

$$C(17;4,4,2,5,1) = \frac{17!}{4!4!2!5!1!1!}$$

Hệ quả 1.4.11 Số cách phân chia (không quan tâm đến thứ tự) của một tập hợp có lực lượng n thành p_1 tập con có lực lượng n_1, p_2 tập con có lực lượng n_2,...,p_k tập con có lực lượng n_k (trong đó các n_i $(i = 1,2,...,k)$ là phân biệt và $\sum_{i=1}^{k} p_i n_i = n$) được cho bởi công thức:

$$\frac{C(n;\overbrace{n_1,...n_1}^{p_1 \text{số hạng}},\overbrace{n_2,...n_2}^{p_2 \text{số hạng}},...,\overbrace{n_k,...n_k}^{p_k \text{số hạng}})}{p_1!p_2!...p_k!} = \frac{n!}{[p_1!(n_1!)^{p_1}][p_2!(n_2!)^{p_2}]...[p_k!(n_k!)^{p_k}]}$$

Ví dụ 1.4.12 Giả sử có 12 sinh viên tham gia chương trình "Tiếp sức mùa thi " . Họ cần có mặt tại một bến xe A.

(i) Số cách phân công 12 sinh viên này làm việc vào ba buổi sáng, chiều, tối; mỗi buổi 4 người khác nhau là $C(12; 4, 4, 4)$

(ii) Số cách phân chia 12 sinh viên này thành ba nhóm, mỗi nhóm có 4 người khác nhau là $C(12; 4, 4, 4)/3!$

(ii) Số cách phân chia 12 sinh viên này đứng vào 4 cửa (mỗi cửa một sinh viên) là $\dfrac{C(12; 4, 4, 4)}{3!}.4!$

Nhận xét 1.4.13 Ngoài ra, trong chương trình phổ thông chúng ta còn sử dụng đến hai khái niệm chỉnh hợp lặp và tổ hợp lặp:

Chỉnh hợp lặp: Cho tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi dãy có độ dài r gồm các phần tử của tập X, mà mỗi phần tử có thể lặp lại nhiều lần và được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập r của n phần tử thuộc tập X. Số chỉnh hợp lặp chập r của n phần tử bằng số ánh xạ từ tập r phần tử đến tập n phần tử và bằng n^r.

Tổ hợp lặp: Cho tập hợp X gồm n phần tử. Một tổ hợp lặp chập r (r không nhất thiết phải nhỏ hơn n) của n phần tử thuộc X là một bộ gồm r phần tử, mà mỗi phần tử này là một trong những phần tử của X. Số tổ hợp lặp chập r của n phần tử bằng $C(n + r - 1, r)$.

1.5. Công thức bao hàm và loại trừ

Số lượng phần tử của một tập hợp hữu hạn A được kí hiệu là $n(A)$ hay $\mid A \mid$. Ta dễ dàng chứng minh được rằng:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

trong đó A và B là các tập hợp hữu hạn. Do đó để tính số phần tử của $A \cup B$, chúng ta cộng $n(A)$ và $n(B)$ sau đó trừ đi $n(A \cap B)$ từ tổng đó (chúng ta loại trừ đi những gì là chung của hai tập hợp). Đây là ý tưởng của nguyên lý bao hàm và loại trừ.

Nếu A là một tập con của X ta ký hiệu phần bù của A trong X là A'. Khi đó nếu A và B là hai tập con của X thì ta có đẳng thức sau:

$$n\Big((A \cup B)'\Big) = n(X) - n(A \cup B) = n(X) - [n(A) + n(B) + n(A \cap B)]$$

Nhưng $(A \cup B)' = A' \cap B'$ do đó:

$$n(A' \cap B') = n(X) - [n(A) + n(B)] + n(A \cap B)$$

Định nghĩa 1.5.1 Nếu x là một phần tử bất kỳ của X và A là một tập con nào đó của X, thì phép đếm của x trong A bằng 1 nếu x ở trong A và bằng 0 nếu x không ở trong A.

Sieve đã chứng minh một định lý tổng quát sau:

Định lý 1.5.2 (Công thức Sieve.) Nếu $A_1, A_2, ..., A_m$ là những tập con của một tập hữu hạn X thì:

$$n(A'_1 \cap A'_2 \cap ... \cap A'_m) = n(X) - S_1 + S_2 - ... + (-1)^m S_m$$

trong đó S_k là ký hiệu của tổng các lực lượng của tất cả những k-bộ giao nhau được tạo ra từ m tập hợp ở trên.

$(S_1 = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_m); S_2 = \sum\limits_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} n(A_i \cap A_j), ...)$

Chứng minh: Lấy x là một phần tử tuỳ ý của tập hợp X.Ta chỉ ra rằng phép đếm của x có kết quả giống nhau ở cả hai vế của phương trình trên. Chúng ta quan tâm tới 2 trường hợp:

(i) x không là phần tử của bất kỳ tập hợp nào trong số m tập hợp trên.

(ii) x là phần tử của đúng r tập hợp trong số m tập hợp trên, $r \geq 1$; chúng ta luôn có thể giả thiết là $A_1, A_2, ..., A_r$.

Trong trường hợp đầu, phép đếm của x bằng 1 ở cả hai vế của phương trình. Trong trường hợp sau, phép đếm của x ở vế trái bằng 0. Đối với vế phải chúng ta có:

$$S_k = \sum n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) \qquad (k = 1, 2, ..., m)$$

Phép đếm của x ở vế phải là:

$$1 - C(r,1) + C(r,2) - C(r,3) + ... + (-1)^r C(r,r) = (1-1)^r = 0$$

Định lý 1.5.3 Với ký hiệu giống như định lý 1.7

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) = S_1 - S_2 + ... + (-1)^{m-1} S_m$$

Chứng minh: Ta có $n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) = n(X) - n(A'_1 \cap A'_2 \cap ... \cap A'_m)$ suy ra điều phải chứng minh.

Chương 2

Một số chuyên đề về tổ hợp dành cho học sinh có năng khiếu toán bậc trung học phổ thông

Trong chương này tác giả xin trình bày 10 vấn đề:

Chuyên đề 1: Quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Chuyên đề 2: Hoán vị và tổ hợp.

Chuyên đề 3: Nguyên lý chuồng chim bồ câu.

Chuyên đề 4: Các số Ramsey.

Chuyên đề 5: Các số Catalan.

Chuyên đề 6: Các số Stirling.

Chuyên đề 7: Hoán vị và tổ hợp tổng quát.

Chuyên đề 8: Nguyên lý bao hàm và loại trừ.

Chuyên đề 9: Những sự xáo trộn và những sự sắp đặt trước.

Chuyên đề 10: Đại lượng bất biến.

Trong mỗi chuyên đề, các bài tập thường được dẫn dắt theo những chủ đề nhất định. Qua đó học sinh tự tìm thấy cho mình những kiến thức liên quan đến chủ đề được nêu. Đồng thời, mỗi bài đều có lời giải chi tiết, ngắn gọn, đầy sáng tạo và bất ngờ. Các lời giải này ít gặp trong các tài liệu về tổ hợp có trên thị trường. Tác giả hi vọng chính điều này kích thích sự ham hiểu biết, lòng say mê của các học sinh có năng khiếu toán.

2.1. Chuyên đề 1: Quy tắc cộng và quy tắc nhân

Mục đích của chuyên đề là dùng hai quy tắc đếm cơ bản tìm hiểu một số tính chất về số palindrome, chuỗi nhị phân, hàm lôgic tự đối ngẫu; từ đó dùng làm cơ sở để giải một số bài toán tổ hợp khác trong các chuyên đề tiếp theo. Ngoài ra, còn có một số bài toán khác vận dụng hai quy tắc này đem đến một lời giải hay, độc đáo. Học sinh có thể tìm thấy sự thú vị qua cách viết các số ở bài 2.1.5, cách tìm ra mối liên hệ giữa bài 2.1.7 và bài 2.1.8 hay trong các bài 2.1.9 và 2.1.10 thay vì tìm số cách phân tích số nguyên N thành tích của hai số nguyên tố cùng nhau ta lại đi tìm số cách phân chia một tập hợp tương ứng thành hai tập hợp khác rỗng không giao nhau...

Định nghĩa 2.1.1 Một palindrome là một dãy hữu hạn các ký tự mà đọc xuôi và đọc ngược như nhau (Ví dụ: $ABEUEBA$).

Bài toán 2.1.2 Hỏi có bao nhiêu palindrome có 7 chữ số hoặc 8 chữ số, biết rằng trong số đó không có chữ số nào xuất hiện nhiều hơn 2 lần.

Giải: Giả sử một số palindrome có độ dài n. Do tính đối xứng, ta chỉ cần quan tâp đến $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ vị trí đầu tiên. Cụ thể, trong bài này ta chỉ cần quan tâm đến 4 vị trí đầu. Vị trí đầu tiên phải khác 0 nên có 9 cách chọn. Có 9 cách chọn cho vị trí thứ 2, 8 cách chọn cho vị trí thứ 3, 7 cách chọn cho vị trí thứ 4. Do đó có $(9).(9).(8).(7) = 4536$ số palindrome thoả mãn yêu cầu bài toán.

Định lí 2.1.3 *Chứng minh rằng : "Một số palindrome có độ dài chẵn thì chia hết cho* 11*".* $\qquad (1)$

Chứng minh: Ta thấy nếu bỏ đi chữ số đầu tiên và chữ số cuối cùng của một số palindrome thì ta lại được một số palindrome mới. Do đó ta chứng minh (1) theo phương pháp quy nạp.

Giả sử cho N là một số palindrome có độ dài $2k$.

+) Nếu $k = 1$ thì (1) hiển nhiên đúng.

+) Nếu $k \geq 2$ ta có:

$N = a_{2k-1}.10^{2k-1} + a_{2k-2}.10^{2k-2} + ... + a_k.10^k + a_k.10^{k-1} + ... + a_{2k-2}.10^1$ $+ a_{2k-1}.10^0 = a_{2k-1}(10^{2k-1} + 10^0) + (a_{2k-2}.10^{2k-2} + ... + a_{2k-2}.10^1) =$ $a_{2k-1}.P + Q$

Trong đó: $P = \underbrace{100...001}_{2k\text{chữ số}} = 11.\underbrace{9090...9091}_{2k-2\text{chữ số}}$

và $Q = a_{2k-2}.10^{2k-2} + ... + a_{2k-2}.10^1$

Theo giả thiết quy nạp Q chia hết cho 11. Vậy n chia hết cho 11. (đpcm)

Bài toán 2.1.4 Trong một số palindrome nhị phân, chữ số đứng đầu là 1 và những chữ số tiếp theo có thể là 0 hoặc 1. Hãy đếm tất cả các số palindrome nhị phân có độ dài n.

Giải: Theo bài 2.1.2, chúng ta chỉ cần quan tâm đến $\left[\dfrac{n+1}{2}\right] - 1 = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ vị trí, mỗi vị trí này có thể lấp đầy bằng chữ số 1 hoặc chữ số 0.Vậy có tất cả $2^{[\frac{n-1}{2}]}$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.1.5 Trong 100000 số nguyên dương đầu tiên có bao nhiêu số mà trong biểu diễn thập phân của nó chứa đúng một chữ số 3, một chữ số 4 và một chữ số 5.

Giải: Ta viết 100000 số nguyên dương đầu tiên theo cách sau:

+) Số 0 viết là 00000.

+) Số 1 viết là 00001.

+) Số 2 viết là 00002.

....

+) Số 99999 viết là 99999.

Theo cách viết trên, mỗi số cần tìm có 5 vị trí. Chữ số 3 có thể chọn bất kỳ một trong 5 vị trí đã cho, sau đó chữ số 4 có thể chọn bất kỳ một trong 4 vị trí còn lại, chữ số 5 có thể chọn bất kỳ một trong 3 vị trí còn lại, còn hai vị trí ta có thể chọn bất kỳ chữ số nào thuộc tập hợp $\{0, 1, 2, 6, 7, 8, 9\}$. Vậy có $(5).(4).(3).(7).(7) = 2940$ số nguyên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.1.6 Tìm số ước thực sự của số 441000 (một ước thực sự của một số nguyên dương n là bất kỳ ước nào của n khác 1 và n).

Giải: Một số nguyên bất kỳ có thể biểu thị duy nhất bằng tích của luỹ thừa các số nguyên tố. Cụ thể: $441000 = (2^3).(3^2).(5^3).(7^2)$. Bất kỳ một ước nào thực sự hay không thực sự là số có dạng $(2^a).(3^b).(5^c).(7^d)$, trong đó: $0 \leq a \leq 3; 0 \leq b \leq 2; 0 \leq c \leq 3; 0 \leq d \leq 2$. Trong cách biểu diễn này, a có 4 cách chọn, b có 3 cách chọn, c có 4 cách chọn, d có 3 cách chọn. Vậy bằng quy tắc nhân, tổng số ước thực sự thoả mãn sẽ là:

$$(4).(3).(4).(3) - 2 = 142 \quad \text{(số)}$$

Bài toán 2.1.7 Đếm số ước thực sự của một số nguyên N biết N có kết quả phân tích ra thừa số nguyên tố như sau:

$$N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$$

(trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các ước số nguyên tố)

Giải: Theo bài 2.1.6 số các ước thực sự của N là:

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1)...(n_k + 1) - 2$$

Bài toán 2.1.8 Một tập hợp gồm n_i vật đồng nhất có dấu hiệu i, trong đó $i = 1, 2, ..., k$. Có bao nhiêu cách lấy ra ít nhất một vật từ tập hợp trên.

Giải: Giả sử những vật có dấu hiệu i là những vật p_i (coi p_i là nhân tử nguyên tố của số nguyên N trong bài 2.1.7). Yêu cầu bài toán tương tự như đếm số ước của N, không bao gồm số 1. Theo bài 2.1.7 kết quả cần tìm là:

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1)...(n_k + 1) - 1$$

Bài toán 2.1.9 Tìm số cách phân tích 441000 thành hai nhân tử m và n sao cho $m > 1, n > 1$ và m, n chỉ có ước chung là 1. (Nói cách khác m và n là hai số nguyên tố cùng nhau).

Giải: Ta xét tập hợp $X = \{2^3; 3^2; 5^3; 7^2\}$ liên quan đến sự phân tích ra thừa sốnguyên tố của 441000. Rõ ràng rằng mỗi phần tử của X phải xuất hiện trong sự phân tích ra thừa số nguyên tố của m hoặc của n nhưng không được xuất hiện đồng thời ở cả 2 số. Hơn nữa, hai sự phân tích của m và n phải hợp thành X. Tức là số cách phân tích 441000 thành cặp m, n bằng với số cách chia X thành 2 tập con không rỗng (không quan tâm đến thứ tự vì $m.n$ và $n.m$ là sự phân tích giống nhau). Các kết quả phân chia tập X (không tính thứ tự) thoả mãn yêu cầu là:

$$\begin{aligned}X &= \{2^3\} + \{3^2, 5^3, 7^2\} = \{3^2\} + \{2^3, 5^3, 7^2\} \\ &= \{7^2\} + \{2^3, 3^2, 5^3\} \\ &= \{2^3, 3^2\} + \{5^3, 7^2\} = \{2^3, 5^3\} + \{3^2, 7^2\} \\ &= \{2^3, 7^2\} + \{3^2, 5^3\}\end{aligned}$$

Do đó kết quả của bài toán là: $4 + 3 = 7 = 2^{4-1} - 1$

Bài toán 2.1.10 Tổng quát bài 2.1.9 ta có: nếu $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$, $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố $(k \geq 2)$. Thì số cách phân tích $N = m.n$ sao cho m, n là hai số nguyên tố cùng nhau là:

$$2^{k-1} - 1 \qquad\qquad (m > 1, n > 1)$$

Giải: Chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo k.

+) Cho $k = 2$, kết quả là dễ thấy.

+) Cho $k \geq 3$, chúng ta chỉ ra rằng một tập hợp k phần tử phân biệt $\mathbf{Z} = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_{k-1}}, \mathbf{a_k}\}$ có $2^{k-1} - 1$ cách phân chia thành hai phần không rỗng (không tính thứ tự). Giả thiết kết quả đúng với những tập hợp có $(k-1)$ phần tử phân biệt. Một sự phân chia của $\mathbf{Z}$ là:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= \{a_k\} \cup \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\} \\ &\equiv \{a_k\} \cup W\end{aligned}$$

Bây giờ giả thiết quy nạp W có $2^{k-2} - 1$ cách phân chia thoả mãn yêu cầu. Ứng với mỗi cách phân chia đó ta thêm a_k vào một trong hai phần thì được hai cách phân chia của $\mathbf{Z}$. Tính thêm cách phân chia ở trên ta có kết quả số phân chia $\mathbf{Z}$ thành hai phần thoả mãn yêu cầu là:

$$1 + (2^{k-2} - 1).2 = 2^{k-1} - 1(\text{đpcm}).$$

Định nghĩa 2.1.11 Trong một chuỗi nhị phân các phần tử bằng 0 hoặc bằng 1. Cho X là một tập hợp tất cả các chuỗi nhị phân có độ dài n. Một hàm lôgíc của n biến là một hàm từ X tới tập hợp $Y = \{0, 1\}$.

Bài toán 2.1.12 Tìm số hàm lôgíc phân biệt của n biến.

Giải: Lực lượng của X là: $r = 2^n$. Do đó số hàm lôgíc thoả mãn là 2^r.

Định nghĩa 2.1.13 Một hàm lôgíc được gọi là tự đối ngẫu nếu giá trị của hàm f vẫn không thay đổi nếu mỗi phần tử thuộc miền xác định của f thay đổi bằng cách: chữ số 0 đổi thành số 1 và ngược lại.

Ví dụ 2.1.14 Khi $n = 6, f(101101) = f(010010)$ nên f là một hàm lôgíc tự đối ngẫu.

Bài toán 2.1.15 Hãy liệt kê tất cả các hàm lôgíc tự đối ngẫu hai biến.

Giải: Có 4 hàm lôgíc đối ngẫu từ tập hợp $X = \{00; 01; 10; 11\}$ tới tập hợp $Y = \{0; 1\}$

$a) f_1(00) = f_1(11) = f_1(01) = f_1(10) = 0$

$b) f_2(00) = f_2(11) = f_2(01) = f_2(10) = 1$

$c) f_3(00) = f_3(11) = f_3(01) = f_3(10) = 1$

$d) f_4(00) = f_4(11) = f_4(01) = f_4(10) = 0$

Bài toán 2.1.16 Tìm số lượng các hàm lôgíc tự đối ngẫu của n biến.

Giải: Theo bài 2.1.12 X có thể phân thành $\dfrac{r}{2} = 2^{n-1}$ cặp (ς, ς') trong đó chuỗi ς' có được từ ς bằng cách thay 0 thành 1 và ngược lại. Đối với mỗi cặp thì giá trị của hàm lôgíc tự đối ngẫu có thể nhận là 0 hoặc 1. Do đó có $2^{\frac{r}{2}}$ hàm như vậy. Đây chính là căn bậc hai của tổng số các hàm lôgíc.

Bài toán 2.1.17 Cho một lưới gồm các ô vuông. Các nút được đánh số từ 0 đến n theo chiều từ trái sang phải và từ 0 đến m theo chiều từ dưới lên trên. Hỏi có bao nhiêu đường đi khác nhau từ nút (0, 0) đến nút (n, m) nếu chỉ cho phép đi trên cạnh các ô vuông theo chiều sang phải hoặc lên trên.

Giải

Một đường đi như thế được xem gồm $n + m$ đoạn (mỗi đoạn là một cạnh ô vuông). Tại mỗi đoạn chỉ được chọn một trong hai giá trị : đi lên (mà ta mã là 1) hay sang phải (mà ta mã là 0). Số đoạn đi lên đúng bằng m và số đoạn sang phải đúng bằng n. Bài toán dẫn đến việc tìm xem có bao nhiêu dãy nhị phân độ dài $n+m$ trong đó có đúng m thành phần bằng 1. Đây cũng chính là số tập con m phần tử của một tập $n+m$ phần tử, vì thế số đường đi cần đếm bằng $C(n+m, m)$.

Bài toán 2.1.18 Cho m, n là các số nguyên lớn hơn 1. Cho S là một tập hợp có n phần tử, $A_1, A_2, ..., A_m$ là những tập con của S. Giả thiết rằng bất kỳ hai phần tử x và y trong S bao giờ cũng có một tập hợp A_i sao cho x ở trong A_i và y không ở trong A_i hoặc x không ở trong A_i và y ở trong A_i. Chứng minh rằng $n \leq 2^m$.

Giải: Chúng ta hãy liên kết mỗi phần tử x trong S với một dãy nhị phân có m chữ số $a(x) = (x_1, x_2, ..., x_m)$ thỏa mãn $x_i = 1$ nếu x ở trong A_i và $x_i = 0$ nếu x không ở trong A_i. Ta xây dựng một hàm số :

$$f : S \longrightarrow T = \{(x_1, x_2, ..., x_m) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$$

.

Từ giả thiết, nếu x khác y thì $f(x)$ khác $f(y)$, hay f là một hàm đơn ánh. Vì vậy số phần tử của tập hợp T phải nhiều hơn hoặc bằng số phần tử của tập S. Dễ thấy số phần tử của T bằng 2^m(bởi vì mỗi thành phần x_i của $(x_1, x_2, ..., x_m)$ chỉ có thể nhận một trong hai giá trị là 0 hoặc 1). Do đó ta có $n \leq 2^m$.

2.2. Chuyên đề 2: Hoán vị và tổ hợp

Cho f là một ánh xạ từ tập hữu hạn A vào tập hữu hạn B. Chúng ta đều biết rằng, nếu f là đơn ánh thì $n(A) \leq n(B)$. Nếu f là toàn ánh thì $n(A) \geq n(B)$, còn nếu f là song ánh thì $n(A) = n(B)$. Đây chính là cơ sở của phương pháp thiết lập song ánh để giải một số bài toán tổ hợp mà một số sách đã nêu và cũng là chủ đề đầu tiên tác giả luận văn đưa ra trong vấn đề này. Tiếp đến là một số bài toán về hoán vị vòng quanh. Học sinh có thể thấy thích thú với sự xuất hiện hợp lý của những chiếc ghế trong những bài này. Chủ đề thứ ba đề cập đến đó là phương pháp chứng minh bằng lý luận tổ hợp. Các em có thể áp dụng phương pháp này vào chứng minh một số công thức tổ hợp mà không phải dùng nhiều đến các công thức tính toán. Do đó các công thức về tổ hợp trở nên đơn giản, dễ nhớ hơn đối với các em.

Định nghĩa 2.2.1 Một ánh xạ f từ tập hợp A tới tập hợp B được gọi là một - một nếu cứ hai phần tử x và y phân biệt của A thì có hai ảnh $f(x), f(y)$ phân biệt thuộc B.

Bài toán 2.2.2 Tìm số ánh xạ một - một từ A tới B, biết A có m phần tử, B có n phần tử $(n \geq m)$.

Giải: Có $P(n,m)$ sự lựa chọn cho miền giá trị của hàm số. Do đó có $P(n,m)$ hàm một - một phân biệt thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.2.3 Mười bức hoạ khác nhau được cấp phát cho n phòng làm việc sao cho không có phòng nào được nhận nhiều hơn một bức hoạ. Tìm số cách hoàn thành công việc này biết:

$a) n = 14$

$b) n = 6$

Giải: $a)$ $P(14,10)$ (theo bài $2.2.1$)

$b)$ Ta có số bức hoạ nhiều hơn số phòng, do đó chúng ta lập ánh xạ từ tập hợp các phòng tới tập hợp các bức hoạ. Kết quả cần tìm là: $P(10,6)$

Định nghĩa 2.2.4 Một hoán vị vòng quanh là một sự sắp xếp các phần tử phân biệt quanh một vòng tròn (hoặc đơn giản chỉ là một đường cong khép kín).

Bài toán 2.2.5 Tìm số hoán vị vòng quanh của n phần tử phân biệt.

Giải: Đánh số các vị trí dành cho n phần tử phân biệt lần lượt là $1, 2, ..., n$. Như thường lệ ta sẽ có n! cách sắp xếp. Tuy nhiên đó không phải là kết quả đúng trong trường hợp này vì thực tế hai hoán vị tuyến tính được coi như là một hoán vị vòng quanh. Ví dụ, hoán vị $ABCD$ và $BCDA$ được coi là một hoán vị vòng quanh. Kết quả của bài toán trên là $(n-1)!$. Phép chứng minh thật đơn giản. Một phần tử A_1 bất kỳ trong số n phần tử ở trên được đặt vào một vị trí nào đó trên vòng tròn. Còn lại $n-1$ phần tử được sắp xếp vào $n-1$ vị trí còn lại trên vòng tròn. Do đó có tất cả $(n-1)!$ cách sắp xếp thoả mãn yêu cầu bài toán.

Định nghĩa 2.2.6 Hai hoán vị tuyến tính của n phần tử p và q được gọi là phản xạ với nhau nếu phần tử thứ nhất ở p là phần tử cuối cùng ở q, phần tử thứ hai ở p là phần tử thứ $n-1$ ở q,...,phần tử cuối cùng ở p là phần tử đầu tiên ở q. Một hoán vị vòng quanh của n phần tử được gọi là một hoán vị vành khăn nếu được xác định bởi một hoán vị tuyến tính của $n-1$ phần tử và 2 hoán vị phản xạ thì không được coi là phân biệt.

Bài toán 2.2.7 Tìm số hoán vị vành khăn của n phần tử phân biệt.

Giải: Mỗi hoán vị vòng quanh xác định 2 hoán vị vành khăn, do đó số hoán vị vành khăn là:

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Bài toán 2.2.8 Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho n học sinh nữ và n học sinh nam quanh một bàn tròn biết rằng giữa hai học sinh nữ là một học sinh nam.

Giải: Có $(n-1)!$ cách sắp xếp chỗ ngồi cho n học sinh nữ, bây giờ cứ giữa hai học sinh nữ đặt một cài ghế để cho một học sinh nam ngồi vào. Vậy có $n!$ cách sắp xếp chỗ ngồi cho n học sinh nam. Kết quả: $n!(n-1)!$ cách sắp xếp thoả mãn yêu cầu.

Bài toán 2.2.9 Có n người tham dự một cuộc họp trong đó có 1 giám đốc và 2 phó giám đốc. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho n người đó quanh một bàn tròn sao cho giám đốc và 2 phó giám đốc luôn ngồi cạnh nhau, giám đốc ngồi ở giữa, hai phó giám đốc ngồi ở hai bên.

Giải: Giám đốc ngồi vào một cái ghế, hai ghế ở hai bên cạnh dành cho hai phó giám đốc. Do đó có hai cách sắp xếp chỗ ngồi cho hai phó giám đốc. Còn lại $n-3$ người ngồi vào $n-3$ ghế. Do đó có $(n-3)!$ cách sắp xếp cho các người còn lại. Kết quả có: $2.(n-3)!$ cách sắp xếp thoả mãn yêu cầu.

Bài toán 2.2.10 Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho r người trong

số n người quanh một bàn tròn và số còn lại ngồi quanh một bàn tròn khác.
Giải: Đầu tiên chọn ra r người cho chiếc bàn thứ nhất. Có $C(n,r)$ cách chọn. Có $(r-1)!$ cách sắp xếp chỗ ngồi ở bàn thứ nhất. Có $(n-r-1)!$ cách sắp xếp chỗ ngồi ở bàn thứ hai. Kết quả cần tìm là:

$$C(n,r)(r-1)!(n-r-1)!$$

Bài toán 2.2.11 Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho m học sinh nữ và n học sinh nam $(m < n)$ xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho không có hai học sinh nữ nào ngồi cạnh nhau.
Giải: Đặt n chiếc ghế xung quanh cái bàn, sau đó sắp xếp chỗ ngồi cho n học sinh nam. Có $(n-1)!$ cách sắp xếp cho n học sinh nam. Tiếp đó cứ giữa hai học sinh nam ta thêm vào một chiếc ghế. Có n chiếc ghế mới cần thêm vào. Sắp xếp chỗ ngồi cho m học sinh nữ vào n chiếc ghế đó. Có $P(n,m)$ cách sắp xếp thoả mãn. Sau khi các học sinh nữ đã ngồi hết thì những ghế thừa lại bỏ ra. Vậy có tất cả: $(n-1)!P(n,m)$ cách sắp xếp thoả mãn yêu cầu.
Bài toán 2.2.12 Một phép chứng minh bằng lý luận tổ hợp là một phép chứng minh sử dụng những lý luận tổ hợp thay thế cho những phép tính toán. Hãy dùng phép chứng minh bằng lý luận tổ hợp chứng minh công thức:

$$C(m+n,2) - C(m,2) - C(n,2) = m.n$$

Giải: Xem xét một nhóm gồm m học sinh nam và n học sinh nữ. Bằng quy tắc nhân có $m.n$ cách chọn ra một học sinh nam và một học sinh nữ. Theo cách khác mà cũng đưa đến kết quả tương tự là có $C(m+n,2)$ cách chon hai học sinh bất kỳ sau đó trừ đi $C(m,2)$và $C(n,2)$ số cách chọn ra hai học sinh cùng là nam hoặc cùng là nữ.
Sau đây ta chứng minh một số công thức quen thuộc về tổ hợp:
Bài toán 2.2.13 Sử dụng phép chứng minh bằng lý luận tổ hợp, chứng minh công thức Pascal $C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$.
Giải: Ta xem xét một tập X gồm n phần tử phân biệt. Lấy Y là một tập con

bất kỳ của X gồm $(n-1)$ phần tử. Mỗi tập con của X có r phần tử là một tập con của Y có r phần tử hoặc là hợp của một tập con của Y có $(r-1)$ phần tử với tập hợp đơn lẻ gồm một phần tử còn lại của X nhưng không thuộc Y. Có $C(n-1,r)$ tập con thuộc loại trước và $C(n-1,r-1)$ tập con thuộc loại sau. Tổng của hai kết quả trên là: $C(n,r)$

Bài toán 2.2.14 Chứng minh công thức khai triển nhị thức Newton.

$$(x+y)^n = x^n + C(n,1)x^{n-1}y + ... + C(n,r)x^{n-r}y^r + ... + y^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^{n-r}y^r$$

Giải: Số hạng tổng quát trong khai triển $(x+y)^n$ là $x^{n-r}y^r$ nhân với hệ số $C(n,r)$. Nếu chúng ta viết $(x+y)^n$ như sau:$(x+y)_1(x+y)_2...(x+y)_n$, chúng ta thấy hệ số $C(n,r)$ chính là số cách chọn ra r ngoặc đơn từ n ngoặc đơn ở trên để có được y^r trong tích $x^{n-r}y^r$. Số nguyên $C(n,r)$ được gọi là hệ số nhị thức.

Bài toán 2.2.15 Chứng minh Công thức Vandermonde:

$$C(p+q,r) = \sum_{j=0}^{r} C(p,j)C(q,r-j)$$

Chứng minh: Bằng định lý nhị thức, vế trái của công thức Vandermonde là hệ số của x^r trong $(1+x)^{p+q}$; vế phải của công thức đó là hệ số của x^rtrong $(1+y)^p(1+y)^q$. Hai hệ số hiển nhiên phải bằng nhau.

Bài toán 2.2.16 Chứng minh công thức Newton's:

$$C(n,r)C(r,k) = C(n,k)C(n-k,r-k)$$

Giải: Giả thiết một câu lạc bộ có n thành viên. Cần bầu ra một ban đại diện gồm r người. Trong số r người thuộc ban đại diện chọn ra k người làm ban lãnh đạo câu lạc bộ $(n \geq r \geq k)$. Số cách chọn ra ban lãnh đạo có thể tìm bằng hai cách.

(i) Đầu tiên chọn r người từ tập hợp n thành viên của câu lạc bộ, công việc này có thể thực hiện theo $C(n,r)$ cách. Sau đó, chọn k người vào ban lãnh đạo từ r người đại diện. Công việc thứ hai có thể thực hiện theo $C(r,k)$ cách. Kết quả có $C(n,r)C(r,k)$ cách chọn ra ban đại diện gồm r người trong đó có k người trong ban lãnh đạo. Đây là vế trái công thức.

(ii) Đầu tiên chọn k thành viên trong số n thành viên của câu lạc bộ vào ban lãnh đạo, có $C(n,k)$ cách chọn. Sau đó chọn thêm $(r-k)$ người nữa trong số những người còn lại để cùng với k người trong ban lãnh đạo lập thành ban đại diện, có $C(n-k,r-k)$cách chọn. Kết quả cần tìm là:

$$C(n,k)C(n-k,r-k)$$

Đây chính là vế phải của công thức.

Bài toán 2.2.17 Chứng minh công thức

$$C(n+1,r+1) = C(n,r)+C(n-1,r)+C(n-2,r)+...+C(r,r) \qquad (*)$$

Giải: +) Với $n=1$ thì công thức hiển nhiên đúng.

+) Với $n>1$, sử dụng công thức Pascal ta thay thế vế trái bằng $C(n,r+1)+C(n,r)$. Hiển nhiên đẳng thức đúng theo phương pháp quy nạp toán học.

Bài toán 2.2.18 Tính $S = 1.2+2.3+3.4+...+n.(n+1)$

Giải: Ta có: $k(k+1) = C(k+1,2)$

$$S = 2[C(2,2)+C(3,2)+...+C(n+1,2)]$$
$$\overset{(*)}{=} 2C(n+2,3) = \frac{n(n+1)(n+1)}{3}$$

Bài toán 2.2.19 Theo bài 2.2.2 một hoán vị của $X = \{1,2,3,...,n\}$ là một ánh xạ 1-1 từ tập X vào chính nó. Nếu P và Q là hai hoán vị của X, tích của chúng $P \circ Q$ cũng là một hoán vị của X. Hơn nữa, ánh xạ nghịch đảo của P là P^{-1} cũng là một hoán vị của X. Cho $X = \{1,2,3,4,5\}$; $Q = 23415$; $P = 12534$. Hãy tìm:

$a)$ $P \circ Q$

$b)$ $Q \circ P$

$c)Q^{-1}$ và P^{-1}

Giải: $a)$ $P \circ Q = 25314$

$b)$ $Q \circ P = 23541$

$c)Q^{-1} = 41235$ và $P^{-1} = 12453$

2.3. Chuyên đề 3: Nguyên lý chuồng chim bồ câu

Bài toán 2.3.1 Cho $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, S là tập con bất kỳ của X có 7 phần tử. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai phần tử của S mà tổng của chúng bằng 10.

Giải: Những tập con $H_1 = \{0; 10\}; H_2 = \{1; 9\}; H_3 = \{2; 8\}; H_4 = \{3; 7\}; H_5 = \{4; 6\}; H_6 = \{5\}$ có thể coi như 6 chuồng chim bồ câu và các phần tử của S coi như 7 con chim bồ câu. Theo nguyên lý chuồng chim bồ câu ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.3.2 Cho X là một tập hợp bất kỳ gồm 7 số nguyên phân biệt. Hãy chỉ ra rằng có hai số nguyên x, y thuộc X thoả mãn $x + y$ hoặc $x - y$ chia hết cho 10.

Giải: Giả sử $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ là tập hợp gồm 7 số nguyên phân biệt. Gọi r_i là số dư khi chia x_i cho 10. Ta xét các tập con của X:

$$\begin{array}{ll} H_1 = \{x_i \mid r_i = 0\} & H_2 = \{x_i \mid r_i = 5\} \\ H_3 = \{x_i \mid r_i = 1 \text{ hoặc } 9\} & H_4 = \{x_i \mid r_i = 2 \text{ hoặc } 8\} \\ H_5 = \{x_i \mid r_i = 3 \text{ hoặc } 7\} & H_6 = \{x_i \mid r_i = 4 \text{ hoặc } 6\} \end{array}$$

Vậy có 6 chuồng chim bồ câu cho 7 con chim.

Nếu x và y cùng thuộc H_1 hoặc H_2 thì cả $x + y$ hoặc $x - y$ chia hết cho 10. Nếu x và y thuộc một trong 4 tập còn lại thì $x + y$ hoặc $x - y$ chia hết cho 10 nhưng không xảy ra cả $x + y$ hoặc $x - y$ chia hết cho 10.

Bài toán 2.3.3 Cho một tam giác đều có độ dài bằng $2cm$. Lấy bất kỳ 5 điểm trong tam giác đó. Chứng minh rằng có ít nhất 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn $1cm$.

Giải: Chia tam giác đã cho thành 4 tam giác đều có khoảng cách bằng $1cm$. Chúng ta có 4 tam giác và 5 điểm do đó kết quả là hiển nhiên.

Bài toán 2.3.4 Cho một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $3cm$. Lấy 10 điểm bất kỳ trong tam giác đó. Chứng minh rằng có ít nhất hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn $1cm$.

Giải: Chia tam giác ban đầu thành 9 tam giác đều có độ dài cạnh bằng $1cm$. Ta có 9 tam giác và 10 điểm do đó kết quả là hiển nhiên.

Bài toán 2.3.5 Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng $2cm$. Lấy bất kỳ 5 điểm nằm trong hình vuông đó. Chứng minh rằng có ít nhất 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn $\sqrt{2}cm$.

Giải: Chia hình vuông ban đầu thành 4 hình vuông có độ dài cạnh bằng $1cm$. Ta có 4 hình vuông có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{2}$ và 5 điểm do đó kết quả là hiển nhiên.

Bài toán 2.3.6 Có n đội bóng đá tham gia thi đấu vòng tròn tính điểm. Biết rằng đội nào cũng có ít nhất một trận thắng (cả giải không có trận nào hoà). Hãy chứng minh rằng có ít nhất 2 đội có cùng số trận thắng.

Giải: Số trận thắng của một đội ít nhất là 1 trận và nhiều nhất là $n-1$ trận. Như vậy ta coi số trận thắng $1, 2, 3, ..., n-1$ như $(n-1)$ chuồng chim bồ câu, n đội coi như n con chim bồ câu. Do đó kết quả là hiển nhiên.

Bài toán 2.3.7 Cho tập hợp X gồm n số nguyên bất kỳ. Chứng minh rằng X luôn có một tập con mà tổng của các số nguyên có trong tập hợp đó chia hết cho n.

Giải: Giả sử $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và $S_i = x_1 + x_2 + ... + x_i$ trong đó $i = 1, 2, ..., n$. Nếu có một S_i nào đó chia hết cho n thì ta có điều phải chứng minh.

Trong trường hợp ngược lại, ta gọi r_i là số dư khi chia S_i cho n thì r_i nhỏ nhất bằng 1 và lớn nhất bằng $(n-1)$. Do đó bằng nguyên lý chuồng chim bồ câu, chúng ta phải có p, q nào đó thoả mãn $p < q$ và $r_p = r_q$. Ta có:

$$S_q - S_p = x_{p+1} + x_{p+2} + ... + x_q$$

Hiển nhiên $S_q - S_p$ chia hết cho n. (đpcm)

Bài toán 2.3.8 Có 12 máy vi tính và 8 máy in laze trong một văn phòng. Hãy tìm một phương án kết nối giữa các máy vi tính với các máy in sao cho trong cùng một thời gian 8 máy tính (hoặc ít hơn) có thể in ở những máy in khác nhau.

Giải: Chúng ta có thể chỉ ra có 40 kết nối thoả mãn yêu cầu này. Giả sử các máy in kí hiệu là $P_j(j = 1, 2, ..., 8)$ và các máy tính kí hiệu là $C_i(i = 1, 2, ..., 12)$. Nối máy in thứ nhất với 5 máy vi tính đầu tiên, sau đó nối máy in thứ hai với 5 máy vi tính liên tiếp tính từ C_2. Sau đó, nối máy in thứ ba với 5 máy vi tính liên tiếp tính từ C_3. Tiếp tục như vậy ta có bảng (1.1)

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
C_1	1	0	0	0	0	0	0	0
C_2	1	1	0	0	0	0	0	0
C_3	1	1	1	0	0	0	0	0
C_4	1	1	1	1	0	0	0	0
C_5	1	1	1	1	1	0	0	0
C_6	0	1	1	1	1	1	0	0
C_7	0	0	1	1	1	1	1	0
C_8	0	0	0	1	1	1	1	1
C_9	0	0	0	0	1	1	1	1
C_{10}	0	0	0	0	0	1	1	1
C_{11}	0	0	0	0	0	0	1	1
C_{12}	0	0	0	0	0	0	0	1

Bảng 2.1

Giả sử 8 máy vi tính (dĩ nhiên có thể ít hơn) cần dùng máy in trong một lúc là $C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_s}$ trong đó $i_1 < i_2 < ... < i_s$. Ta thấy rằng

$$s \le i_s \le s + 4 \quad (s = 1, 2, ..., 8) \qquad (1)$$

Thật vậy, nếu $i_s < s$ tức là có s số nguyên dương nhỏ hơn s. (Vô lý). Nếu $i_s \ge s + 5$ thì sau s nhiều nhất là còn $7 - s$ chỉ số còn lại nhưng thực tế còn $8 - s$ chỉ số. (Mâu thuẫn)

Theo (1) và bảng 2.1 C_{i_1} dùng P_1, C_{i_2} dùng P_2,..., C_{i_8} dùng P_8

2.4. Chuyên đề 4: Các số Ramsey

Có thể khẳng định rằng trong 6 người bất kỳ luôn tìm được 3 người sao cho hoặc họ quen nhau từng đôi một hoặc họ không quen nhau từng đôi một hay không? Đây là một bài toán đố đã xuất hiện từ lâu và đã từng được coi là một bài toán tồn tại trong lý thuyết tổ hợp. Lời giải của nó là một trường hợp riêng của định lý đã được Ramsey chứng minh vào năm 1928. Định lý này có nhiều mở rộng sâu sắc và quan trọng không những chỉ trong lý thuyết tổ hợp và đồ thị mà còn trong các lĩnh vực khác như giải tích, đại số, hình học,...Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu về các số $Ramsey$ và nghiên cứu một số bài tập liên quan đến loại số này.

Bài toán 2.4.1 Cho trước một nhóm 6 người bất kỳ. Chứng minh rằng luôn có một nhóm con gồm 3 người trong đó họ quen nhau từng đôi một hoặc họ không quen nhau từng đôi một.

Giải: Giả sử $\{A, B, C, D, E, F\}$ là một nhóm gồm 6 người. Giả thiết rằng những người quen người A thì ngồi ở phòng Y và những người không quen người A thì ngồi ở phòng Z. Người A không ngồi trong hai phòng đó. Khi đó có ít nhất 3 người ngồi trong phòng Y hoặc ngồi trong phòng Z.

(a) Không mất tổng quát giả sử 3 người cùng ngồi trong phòng Y là B, C, D nếu 3 người này không quen biết lẫn nhau thì yêu cầu bài toán được thoả mãn. nếu 3 người này có 2 người quen biết nhau giả sử B, C thì ta có nhóm 3 người là A, B, C quen biết lẫn nhau. Yêu cầu bài toán được thoả mãn.

(b) Giả sử 3 người cùng ngồi trong phòng Z là B, C, D tương tự ta chỉ cần thay đổi khái niệm "quen biết lẫn nhau" với "không quen biết lẫn nhau" thì ta cũng chỉ ra được nhóm 3 người thoả mãn yêu cầu bài toán.

Nếu ta coi 6 người như là 6 điểm trong mặt phẳng thì ta có thể gặp bài toán trên dưới một dạng khác như sau:

Trong mặt phẳng cho sáu điểm được nối với nhau từng đôi một bởi các cung màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 điểm sao cho các cung nối chúng có cùng một màu (ta nói là chúng tạo thành tam giác xanh hoặc đỏ).

Giải: Chọn điểm P nào đó trong 6 điểm. Từ nó có 5 cung nối với 5 điểm còn lại. Theo nguyên lý Dirichlet, có 3 trong số 5 cung đó phải có cùng một màu, chẳng hạn là màu xanh. Giả sử đó là các cung PA, PB, PC. Nếu như một trong số 3 cung AB, AC, BC có màu xanh thì nó cùng với hai trong số ba cung PA, PB, PC tạo thành một tam giác xanh. Nếu ngược lại thì tam giác ABC là một tam giác đỏ.

Bài toán 2.4.2 Cho một nhóm gồm 10 người bất kỳ. Chứng minh rằng luôn có $a)$ và $b)$ biết:

$a)$ Một nhóm con 3 người không quen biết lẫn nhau hoặc một nhóm con 4 người quen biết lẫn nhau.

$b)$ Một nhóm con 3 người quen biết lẫn nhau hoặc một nhóm con 4 người không quen biết lẫn nhau.

Giải: Giả sử A là một trong 10 người đó, còn 9 người ngồi vào 2 phòng, phòng Y gồm những người quen A, phòng Z gồm những người không quen A.Người A không vào một trong hai phòng đó.

$a)$ Ta có phòng Y có ít nhất 6 người hoặc phòng Z có ít nhất 4 người.

(i) Giả sử phòng Y có ít nhất 6 người theo bài toán trên trong phòng Y

luôn tìm được nhóm 3 người quen biết lẫn nhau hoặc 3 người không quen biết lẫn nhau. A cùng với nhóm 3 người quen biết lẫn nhau tạo thành nhóm 4 người quen biết lẫn nhau.

(ii) Giả sử phòng Z có ít nhất 4 người. Khi đó hoặc 4 người này quen biết lẫn nhau hoặc có ít nhất 2 người không quen biết lẫn nhau. Giả sử là B, C. Trong trường hợp đầu ta có nhóm 4 quen biếtlẫn nhau. Trong trường hợp sau A, B, C là nhóm 3 người không quen biết lẫn nhau. Yêu cầu bài toán được thoả mãn.

b) Tương tự ý a phòng Z có ít nhất 6 người hoặc phòng Y có ít nhất 4 người. Ta chỉ cần đổi hai khái niệm "quen biết lẫn nhau" với "không quen biết lẫn nhau" thì chỉ ra được những nhóm người thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.4.3 Cho một nhóm 20 người bất kỳ. Chứng minh rằng luôn có một nhóm con 4 người quen biết lẫn nhau hoặc không quen biết lẫn nhau

Giải: Giả sử A là một trong 20 người đó, phòng Y gồm những người quen A, phòng Z gồm những người không quen A. Người A không ngồi trong hai phòng đó. Vậy thì hoặc phòng Y có ít nhất 10 người, hoặc phòng Z có ít nhất 10 người.

i) Giả sử phòng Y có ít nhất 10 người theo bài toán trên trong phòng Y có 3 người quen biết lẫn nhau hoặc 4 người không quen biết lẫn nhau. A cùng với nhóm 3 người quen biết lẫn nhau có thể tạo thành nhóm 4 người quen biết lẫn nhau. Yêu cầu bài toán được thoả mãn.

ii) Giả sử phòng Z có ít nhất 10 người. Tương tự như trường hợp i ta chỉ cần đổi hai khái niệm "quen biết lẫn nhau" với "không quen biết lẫn nhau" thì chỉ ra được những nhóm người thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.4.4 Cho p và q là hai số nguyên dương. Một số nguyên dương r được gọi là có tính chất (p, q)-Ramsey nếu trong một nhóm r người bất kỳ luôn có một nhóm con p người quen biết lẫn nhau hoặc q người không quen biết lẫn nhau. Số nhỏ nhất r có tính chất (p, q)-Ramsey được gọi là số Ramsey, kí hiệu $R(p, q)$. Chứng minh rằng:

$a)$ $R(p,q) = R(q,p)$

$b)$ $R(p,2) = p$

Giải: $a)$ Tương tự như các bài tập trên ta chỉ cần thay đổi hai khái niệm "quen biết lẫn nhau" và "không quen biết lẫn nhau" thì ta được:

$$R(p,q) = R(q,p)$$

$b)$ Hiển nhiên vì cho một nhóm p người bất kỳ thì hoặc p người này quen biết lẫn nhau hoặc có ít nhất hai người không quen biết lẫn nhau

Bài toán 2.4.5 Chỉ ra rằng $R(3,3) = 6$.

Giải: Theo bài $(2.4.1)$ ta có $R(3,3) \leq 6$. Ta phải chỉ ra $R(3,3) > 5$ ta sắp xếp chỗ ngồi cho một nhóm 5 người quanh một bàn tròn sao cho mỗi người chỉ quen biết với hai người ngồi ngay bên cạnh. Trong tình huống này không có tập hợp 3 người nào thoả mãn quen biết lẫn nhau từng đôi một hoặc không quen biết lẫn nhau từng đôi một. Vậy $R(3,3) = 6$.

Bài toán 2.4.6 Chứng minh rằng nếu m, n là hai số nguyên lớn hơn 2 thì:

$$R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1)$$

(Biểu thức này cho ta cận trên của $R(m,n)$)

Giải: Lấy $p \equiv R(m-1,n)$, $q \equiv R(m,n-1)$ và $r \equiv p+q$. Ta quan tâm đến một nhóm r người là $\{1,2,...,r\}$. Gọi L là tập hợp những người biết người 1 và M là tập hợp những người không biết người 1. Cả hai tập hợp này có $r-1$ người. Do đó hoặc L có ít nhất p người hoặc M có ít nhất q người

$a)$ Nếu L có ít nhất $p = R(m-1,n)$ người thì bằng định nghĩa, L chứa một tập con của $(m-1)$ người quen biết lẫn nhau hoặc chứa một tập con của n người không quen biết lẫn nhau. Trong trường hợp này $(m-1)$ người này và người 1 tạo thành nhóm m người quen biết lẫn nhau.

Do đó, trong trường hợp này nhóm của $R(m-1,n) + R(m,n-1)$ người luôn có m người quen biết lẫn nhau hoặc n người không quen biết lẫn nhau. Vậy:

$$R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1)$$

$b)$ Lý luận tương tự nếu M có ít nhất q người

Từ $a)$ và $b)$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2.4.7 Nếu $R(m-1,n)$ và $R(m,n-1)$ là 2 số chẵn lớn hơn 2. Chứng minh rằng:

$$R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1) - 1$$

Giải: Tương tự như 2.4.6, lấy $p \equiv R(m-1,n)$, $q \equiv R(m,n-1)$ và $r \equiv p+q$. Như thế đủ để chỉ ra rằng trong một nhóm $(r-1)$ người bất kỳ $X = \{1,2,...,r-1\}$ luôn có hoặc một nhóm con m người quen biết lẫn nhau hoặc một nhóm con n người không quen biết lẫn nhau. Goi d_i là số người quen biết người i với $i = 1,2,...,r-1$. Ta có: $d_1 + d_2 + ... + d_{r-1}$ là số chẵn. Nhưng $r-1$ là số lẻ, do đó tồn tại ít nhất một số i để d_i chẵn, ta có thể chọn $i = 1$. Gọi L là tập hợp những người quen biết người 1 và M là tập hợp những người không quen biết người 1. Từ đó, L, M cùng phải có số chẵn người. Bây giờ, hoặc L có ít nhất $p-1$ người hoặc M có ít nhất q người. Nhưng $p-1$ là lẻ. Do đó hoặc L có ít nhất p người hoặc M có ít nhất q người.

$a)$ Giả sử L có ít nhất p người lý luận tương tự bài trên suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

$b)$ Giả sử M có ít nhất q người lý luận tương tự suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2.4.8 Chứng minh rằng:

$$R(4,3) = 9$$

Giải: Theo bài trên ta có:

$$R(4,3) \leq R(3,3) + R(4,2) - 1 = 6 + 4 - 1 = 9$$

Để chứng minh $R(4,3) = R(3,4) > 8$ chúng ta đưa ra một nhóm 8 người nhưng trong nhóm đó không tìm ra một nhóm con gồm 3 người quen biết lẫn nhau và không có nhóm con gồm 4 người không quen biết lẫn nhau. Ta xếp 8 người quanh một bàn tròn. Mỗi người chỉ biết chính xác 3 người khác: 2 người ngồi ngay bên cạnh anh ta và một người ngồi xa anh ta nhất. Vậy $R(4,3) = 9$

Bài toán 2.4.9 Chứng minh rằng:

$$R(5,3) = 14$$

Giải: $R(5,3) \leq R(4,3) + R(5,2) = 9 + 5 = 14$. Để chứng minh $R(5,3) = R(3,5) > 13$ ta sắp xếp 13 người ngồi quanh một bàn tròn sao cho mỗi người chỉ quen biết với người thứ 5 ở bên trái anh ta và người thứ 5 ở bên phải anh ta. Trong tình huống này sẽ không có một nhóm con nào gồm 3 người quen biết lẫn nhau và không có nhóm con nào gồm 5 người không quen biết lẫn nhau. Vậy $R(5,3) = 14$.

Bài toán 2.4.10 Một cấp số cộng có độ dài n là một dãy có dạng $< a; a + d; a + 2d; ...; a + (n-1)d >$. Chỉ ra rằng bất kỳ sự phân chia nào của $X = \{1, 2, ..., 9\}$ thành 2 tập con thì ít nhất một trong hai tập con đó chứa một cấp số cộng có độ dài 3.

Giải: Giả sử kết luận của bài toán là sai. Ta phân chia X thành 2 tập hợp P và Q và lấy 5 là phần tử của P. Dĩ nhiên 1 và 9 không cùng ở trong P do đó có 3 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Số 1 ở trong P và 9 ở trong Q. Từ 1 và 5 ở trong P do đó 3 ở trong Q. Từ 3 và 9 ở trong Q suy ra 6 ở trong P. Từ 5 và 6 ở trong P suy ra 4 ở trong Q. Từ 3 và 4 ở trong Q suy ra 2 ở trong P. Từ 5 và 6 ở trong P suy ra 7 ở trong Q. Từ 7 và 9 ở trong Q suy ra 8 ở trong P. Nhưng như thế P chứa một cấp số cộng là $2, 5, 8$, mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Số 9 ở trong P và 1 ở trong Q. Vì tập X là không thay đổi khi thay mọi phần tử i trong đó bằng phần tử $10 - i$. Do đó lý luận tương tự như trường hợp 1 suy ra điều mâu thuẫn.

Trường hợp 3: Số 1 và 9 ở trong Q. Số 7 hoặc ở trong P hoặc ở trong Q. Giả sử nó ở trong P. Từ 5 và 7 ở trong P suy ra cả 3 và 6 ở trong Q. Điều đó có nghĩa Q có một cấp số cộng $3, 6, 9$. Nếu 7 ở trong Q thì 8 ở trong P. Do đó 1 và 7 ở trong Q, 4 ở trong P. Từ 4 và 5 ở trong P thì 3 ở trong Q. Từ 1 và 3 ở trong Q thì 2 ở trong P. Vậy P có cấp số cộng $2, 5, 8$, mâu thuẫn.

Bài toán 2.4.11 (Vô địch Liên Xô) Có một nhóm người mà trong đó, mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, còn mỗi cặp quen nhau thì không có người quen chung. Chứng minh rằng số người quen của mỗi người là như nhau.

Giải: Giả sử a quen b và tập các người quen của a và b (không kể a và b) là A và B. Mỗi người a' thuộc A sẽ quen duy nhất một người thuộc B (do a' và b không quen nhau, hơn nữa họ đã có một người quen chung là a). Tương tự, mỗi người thuộc B sẽ quen duy nhất một người thuộc A. Vậy tồn tại một song ánh đi từ A tới B, tức a và b có số người quen bằng nhau.

Nếu a không quen b thì tồn tại c quen cả a và b. Do đó sốngười quen của a và b bằng nhau do cùng bằng số người quen của c.

2.5. Chuyên đề 5: Các số Catalan

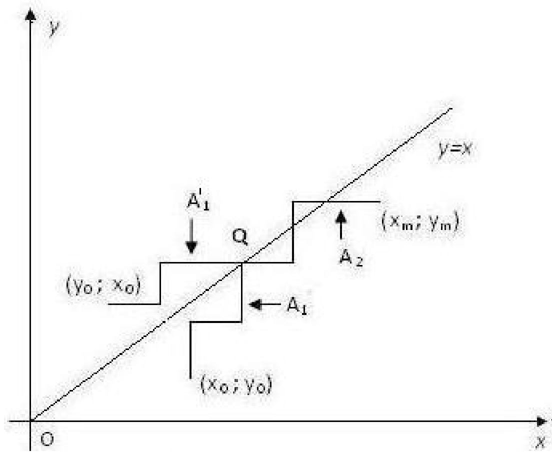
Bài toán 2.5.1 Một đường đi từ điểm P_0 tới điểm P_m trong hệ trục toạ độ có thể coi như là một dãy điểm có toạ độ nguyên $< P_0, P_1, ...P_m >$; $P_i(x_i, y_i)$ sao cho $i = 0, 1, ..., m-1$ $x_{i+1} = x_i + 1; y_{i+1} = y_i$ hoặc $x_{i+1} = x_i; y_{i+1} = y_i + 1$. Đường đi này là đẹp nếu $y_i < x_i$ $(i = 0, 1, ..., m)$ nếu không thoả mãn như vậy ta nói là đường đi xấu.

$a)$ Tìm ra số đường đi từ P_0 tới P_m.

$b)$ Đếm số đường đi đẹp từ (x_0, y_0) tới (x_m, y_m).

Giải: $a)$ Theo bài 2.1.17 đặt $m = x_m - x_0$ và $n = y_m - y_0$ thì ta có kết quả là $C(x_m - x_0 + y_m - y_0; x_m - x_0)$.

$b)$



Sơ đồ 2.1

Sơ đồ 2.1 minh hoạ đường đi xấu từ (x_0, y_0) tới (x_m, y_m). Đường đi này cắt đường thẳng $y = x$ tại điểm đầu tiên Q. Gọi đoạn đường đi từ (x_0, y_0) tới Q là A_1, từ Q tới (x_m, y_m) là A_2. Lấy đối xứng với A_1 qua đường thẳng $y = x$ ta được đường thẳng A_1'. Ta có $A_1' + A_2$ là một đường đi từ (y_0, x_0) tới (x_m, y_m). (Tất cả các đường đi từ (y_0, x_0) đều là xấu nhưng điều đó không quan trọng ở dây). Vậy, bất kỳ một đường đi từ (y_0, x_0) tới (x_m, y_m) xác định một đối xứng từng phần của một đường đi xấu từ (x_0, y_0) tới (x_m, y_m). Theo bài 2.1.13 có $C(x_m - y_0 + y_m - x_0; x_m - y_0)$ đường đi xấu. Do đó có:

$$C(x_m - x_0 + y_m - y_0; x_m - x_0) - C(x_m - x_0 + y_m - y_0; x_m - y_0)$$

đường đi đẹp từ (x_0, y_0) tới (x_m, y_m).

Định nghĩa 2.5.2 Số Catalan thứ n, kí hiệu là C_n, được xác định bằng số đường đi đẹp từ $(1; 0)$ tới $(n; n-1)$.

Bài toán 2.5.3 Chứng minh rằng:

$$C_n = \frac{1}{n} C(2n-2, n-1)$$

Giải: Theo bài trên thay x_0 bằng 1, $y_0 = 0, x_m = m, y_m = n-1$ ta có:

$$\begin{aligned} C_n &= C(2n-2; n-1) - C(2n-2; n) \\ &= C(2n-2; n-1)\left[1 - \frac{n-1}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n} C(2n-2, n-1) \end{aligned}$$

Bài toán 2.5.4 Tìm số đường đi từ $(0,0)$ tới (n,n) thoả mãn:

$a)$ $x > y$ tại tất cả các điểm nguyên nằm trong đường đi hoặc $y > x$ tại tất cả các điểm nguyên nằm trong đường đi .

$b)$ $x \geq y)$ tại tất cả các điểm nguyên có trên đường đi.

$c)$ Đường đi không bao giờ cắt ngang qua đường $y = x$.

Giải: $a)$ Số đường đi trong trường hợp này bằng hai lần số đường đi đẹp từ $(1;0)$ tới $(n;n-1)$ do đó kết quả là $2C_n$

$b)$ Gọi A là điểm (n,n). Giả sử điểm gốc $O(0;0)$ chuyển tới điểm $O'(-1;0)$. Trong hệ trục toạ độ mới $O'(0;0)$, $O(1;0)$ và $A(n+1,n)$. Số đường đi đẹp (trong hệ trục mới) từ O tới A chính là C_{n+1} bằng số đường đi (trong hệ trục cũ) từ O tới A trong đó $y \leq x$ tại tất cả các điểm nguyên có trên đường đi.

$c)$ Bằng phép đối xứng qua đường $y = x$, câu trả lời là số lượng đường đi thoả mãn gấp đôi số lượng đường đi ở ý $b)$ tức là $2C_{n+1}$

Bài toán 2.5.5 Giả sử P và Q là hai ứng cử viên của một văn phòng. Gọi p, q tương ứng là số phiếu bầu của P và Q. Nếu $p > q$, tìm xác suất để P luôn dẫn trước Q trong suốt quá trình đếm phiếu bầu cử.

Giải: Trong hệ trục toạ độ đề các, kí hiệu x và y tương ứng là số phiếu bầu tích luỹ của P và Q tại giai đoạn nào đó. Mọi đường đi từ $(0;0)$ tới (p,q) đại diện cho tiến trình có thể có của quá trình bầu cử và ngược lại. Ta có số đường đi có thể có là $C(p+q,p)$. Số đường đi thể hiện P luôn dẫn đầu là $C(p+q-1;p-1) - C(p+q-1,p)$ (bằng số đường đi đẹp từ $(1,0)$ tới (p,q)) Vậy xác xuất cần tìm là:

$$\frac{C(p+q-1;p-1) - C(p+q-1,p)}{C(p+q,p)} = \frac{p-q}{p+q}$$

Bài toán 2.5.6 Tìm số dãy có dạng $< u_1, u_2, ..., u_{2n} >$ thoả mãn:

(i) u_i bằng -1 hoặc bằng 1 với mọi i.

(ii) $u_1 + u_2 + ... + u_k \geq 0$, với $1 \leq k \leq 2n-1$

(iii) $u_1 + u_2 + ... + u_{2n} = 0$.

Giải: Ta quan tâm tới một đường đi từ $(0;0)$ tới $(n;n)$. Đặt $u_i \equiv (x_i -$

$x_{i-1}) - (y_i - y_{i-1}), (i = 1, 2, ..., 2n)$. Nếu đường đi này không bao giờ vượt lên trên đường $y = x$ thì các số nguyên u_i thoả mãn:

(i) u_i bằng -1 hoặc bằng 1 với mọi $i = 1, 2, ..., 2n$.

(ii) $u_1 + u_2 + ... + u_k = x_k - y_k \geq 0$, với $1 \leq k \leq 2n - 1$

(iii) $u_1 + u_2 + ... + u_{2n} = x_{2n} - y_{2n} = n - n = 0$.

Vậy dãy u_i thoả mãn 3 điều kiện $(i), (ii), (iii)$. Xác định một đường đi từ $(0; 0)$ tới $(n; n)$ thoả mãn không bao giờ vượt quá đường $y = x$. Do đó số dãy thoả mãn yêu cầu bài toán là C_{n+1}.

Bài toán 2.5.7 Tìm số dãy có dạng $< a_1, a_2, ..., a_{2n+1} >$ thoả mãn:

(i) Mỗi a_i là một số nguyên không âm.

(ii) $a_1 = a_{2n+1} = 0$.

(iii) $a_{i+1} - a_i$ bằng -1 hoặc bằng 1 với mọi i.

Giải: Xây dựng dãy u_i thoả mãn: $u_i = a_{i+1} - a_i$ $(i = 1, 2, ..., 2n)$. Ta có: $a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} u_i (k = 0, 1, 2, ..., 2n)$. Khi đó dãy a_i thoả mãn 3 điều kiện $(i), (ii), (iii)$ ở trên thì u_i thoả mãn 3 điều kiện $(i), (ii), (iii)$ ở bài 2.5.6. Do đó kết quả cần tìm là C_{n+1}.

2.6. Chuyên đề 6: Các số Stirling

Trong trường hợp này chúng ta làm quen với số Stirling loại 1, số Stirling loại 2. Nêu được vai trò của số Stirling trong các bài toán về sự phân chia một tập hợp cho trước thành hợp của các tập con. Đồng thời chúng ta sẽ đi tìm số lượng nghiệm của phương trình "$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$. Trong đó m, n nguyên dương, x_k là số nguyên không âm, $k = 1, 2, ...m$" và một số bài toán phát triển từ bài toán này. Trước hết ta làm quen với một số khái niệm.

$*$) Kí hiệu $[x]_0 \equiv 1$ và $[x]_n \equiv x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$ $\qquad (i)$
với $(n = 1, 2, ...)$

Định nghĩa 2.6.1 Hệ số của x^r trong $[x]_n$ được hiểu là số Stirling loại một,

ký hiệu $s(n,r)$.
Ta có: $[x]_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} s(n,r)x^r, \quad s(n,r) = 0$ nếu $r > n$ $\qquad (ii)$

$*$) Kí hiệu $[x]^0 \equiv 1$ và $[x]^n \equiv x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$ với $(n = 1, 2, ...)$

$*$) Số cách phân chia một tập hợp có n phần tử thành m tập con không rỗng ký hiệu là $S(n,m)$ và được gọi là số Stirling loại hai. $(S(0;0) = 1; S(n;m) = 0$ nếu $m > n)$

Ta có thể chứng minh đẳng thức truy hồi sau:

Định lý 2.6.2 *Chứng minh rằng* $s(n+1,r) = s(n,r-1) - ns(n,r) \qquad (iii)$

Chứng minh: Theo (i); $[x]_{n+1} = (x-n)[x]_n$. Do đó từ (ii) ta có:

$$\sum_{r=0}^{\infty} s(n+1,r)x^r = x\sum_{r=0}^{\infty} s(n,r)x^r - n\sum_{r=0}^{\infty} s(n,r)x^r$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}[s(n,r-1) - ns(n,r)]x^r$$

Bằng phương pháp cân bằng hệ số ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài toán 2.6.3 Tìm số cách đặt n vật phân biệt vào m hộp phân biệt, theo thứ tự từ trái qua phải biết rằng có thể cho phép một số hộp để trống. (Chú ý rằng nếu $m > n$, ít nhất $m - n$ hộp phải bỏ trống).

Giải: Giả sử số cần tìm là $f(n,m)$. Giả thiết rằng đã có $f(n-1,m)$ và một sự phân phối $n-1$ vật đó là: mang i_1 vật vào hộp 1, i_2 vật vào hộp 2,..., i_m vật vào hộp m sao cho $i_k \geq 0$ $k = 1, 2, .., m)$ và $i_1 + i_2 + ... + i_m = n - 1$. Vật thứ n có thể vào hộp k theo $i_k + 1$ cách. (Vị trí đầu tiên về bên trái, vị trí thứ 2 từ trái qua phải,..., vị trí thứ $i_k + 1$ tính từ trái qua phải). Do đó có:

$$(i_1 + 1) + (i_2 + 1) + ... + (i_m + 1) = n - 1 + m$$

cách sắp xếp cho vật thứ n. Vậy ta có quan hệ:

$$f(n,m) = (n-1+m)f(n-1,m)$$
$$= (n+m-1)(n+m-2)...m = [m]^n$$

Bài toán 2.6.4 Yêu cầu tương tự bài 2.6.3 tuy nhiên thêm điều kiện $m \leq n$ và những trường hợp để trống là không được phép.

Giải: Bây giờ mỗi hộp được đặt vào đó một vật đầu tiên ở phía bên trái. Công việc này có thể làm theo $P(n, m)$ cách. Do đó kết quả cần tìm là:

$$\begin{aligned} P(n,m).[m]^{n-m} &= \frac{n!}{(n-m)!}m(m+1)(m+2)...(n-1) \\ &= n!C(n-1;m-1) \end{aligned}$$

Từ các bài toán 2.6.3 và 2.6.4 ta có thể tính được số nghiệm nguyên của một phương trình tuyến tính.

Bài toán 2.6.5 Nếu m và n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ có đúng $\dfrac{[m]^n}{n!}$ nghiệm. Trong đó x_k là các số nguyên không âm (kết quả cũng đúng khi $n = 0$).

Giải: Bài toán tương đương với có bao nhiêu cách đặt n vật giống nhau vào m hộp phân biệt (một hộp có x_1 vật, một hộp có x_2 vật,..., một hộp có x_m), vật), có thể có hộp không có vật nào. Nếu chúng ta tạm thời làm cho các vật trở nên phân biệt bằng cách gián nhãn cho chúng là $l_1, l_2, ..., l_m$ thì theo bài 2.6.3 có $[m]^n$ cách sắp xếp. Tuy nhiên trở lại bài toán này, những sự sắp xếp mà chỉ khác nhau bởi những nhãn dán trên n vật thì được coi là một nghiệm của phương trình trên. Do đó câu trả lời là:

$$\frac{[m]^n}{n!} = C(n+m-1, m-1)$$

nghiệm thoả mãn.

Từ kết quả của bài toán 2.6.3 ta nhận được kết quả sau:

Bài toán 2.6.6 Giả sử $A = \{a_i : i = 1, 2, ..., m\}$ là một bảng chữ cái bao gồm m chữ cái được sắp xếp thứ tự như sau: $a_1 < a_2 < ... < a_m$. Một từ $\theta_1\theta_2...\theta_m$ tạo ra từ bảng chữ cái này được gọi là một từ tăng (có độ dài n) nếu $\theta_1 \leq \theta_2 \leq ... \leq \theta_n$. Hãy chứng minh số các từ tăng có độ dài n là $C(n + m - 1, m - 1)$.

Giải: Một từ tăng có độ dài n sẽ bao gồm x_1 chữ cái a_1, sau đó là x_2 chữ cái a_2,..., x_m sau đó là chữ cái a_m thoả mãn $x_k \geq 0 (k = 1, 2, ..., m)$ và $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$. Vậy theo bài 2.6.4 số các từ tăng là $C(n+m-1, m-1)$.

Định nghĩa 2.6.7 Một hàm f có tập xác định là $N = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ và tập giá trị là: $M = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m\}$, f là một hàm tăng (từ N tới M) nếu $f(\alpha_i) \leq f(\alpha_j)$ nếu $\alpha_i < \alpha_j$

Bài toán 2.6.8 Xác định số lượng hàm tăng như trong định nghĩa trên.

Giải: Chúng ta có thể giả thiết rằng

$$\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n \text{ và } \beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_m$$

Khi đó, một hàm tăng từ N tới M sẽ biến x_1 số α đầu tiên ở trên thành β_1, x_2 số α tiếp theo thành β_2,..., x_m số α cuối cùng thành β_m trong đó $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ và x_k là số nguyên không âm, $k = 1, 2, ..., m$. Vậy, bất kỳ một tập hợp x_k thoả mãn những điều kiện trên đều xác định một hàm tăng từ N tới M. Theo bài trên, kết quả cần tìm là $C(n + m - 1, m - 1)$.

Bài toán 2.6.9 Cho trước $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ là các số nguyên không âm. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình: $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ sao cho $x_i \geq \lambda_i$, với $i = 1, 2, ..., m$.

Giải: Với mỗi i lấy $x_i = \lambda_i + y_i$ và viết $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m$. Ta có phương trình $y_1 + y_2 + ... + y_m = n - \lambda$; $y_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$.

$*$) Nếu $\lambda < n$ thì kết quả cần tìm là:

$$C(n - \lambda + m - 1, m - 1)$$

$*$) Nếu $\lambda = n$ thì ta có phương trình: $y_1 + y_2 + ... + y_m = 0$, $y_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ có nghiệm duy nhất$(0, 0, ..., 0)$ do đó phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

$*$) Nếu $\lambda > n$ hiển nhiên phương trình đã cho không có nghiệm nào thoả mãn.

Bài toán 2.6.10 Tìm số cách chọn ra r số nguyên phân biệt từ n số nguyên dương đầu tiên sao cho trong sự lựa chọn đó không có chứa hai số nguyên liên tiếp.

Giải: Sắp xếp n số nguyên dương đầu tiên thành một hàng theo thứ tự tăng bắt đầu từ 1. Nếu một số được chọn thì đặt biểu tượng Y dưới số đó, nếu không chọn thì đặt biểu tượng N dưới số đó. Gọi x_1 là số lượng số có biểu tượng N đứng trước biểu tượng Y đầu tiên; x_2 là số lượng số có biểu tượng N giữa biểu tượng Y đầu tiên và biểu tượng Y thứ hai,..., x_r là số lượng số có biểu tượng N giữa biểu tượng Y thứ $r-1$ và biểu tượng thứ r; và x_{r+1} là số lượng số đứng sau biểu tượng Y thứ r. Khi đó có một tương ứng một - một giữa những sự lựa chọn chấp nhận được với những nghiệm nguyên của phương trình: $x_1 + x_2 + ... + x_{r+1} = n - r$ với $x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, ..., x_r \geq 1, x_{r+1} \geq 0$. Do đó theo bài 2.6.9 kết quả cần tìm là $C(n - r + 1, r)$.

Bài toán 2.6.11 Tìm số cách chọn ra r số nguyên dương từ n số nguyên dương đầu tiên sao cho không có hai số nguyên liên tiếp nào xuất hiện trong sự lựa chọn và sự lựa chọn không có đồng thời cả hai số 1 và n.

Giải: Trường hợp 1: Sự lựa chọn có số 1. Theo ký hiệu bài 2.6.8, $x_1 = 0$ (có một biểu tượng Y dưới số 1) và $x_{r+1} \geq 1$, (có một biểu tượng N dưới số n). Do đó chúng ta có phương trình:

$$x_2 + x_3 + ... + x_{r+1} = n - r \text{ với } x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, ..., x_{r+1} \geq 1.$$

Suy ra ta có $C(n - r - 1, r - 1)$ cách lựa chọn.

Trường hợp 2: Sự lựa chọn không có số 1. Ta có $x_1 \geq 1$ (có một biểu tượng N dưới số 1). Do đó chúng ta có phương trình:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{r+1} = n - r \text{ với } x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, ..., x_{r+1} \geq 0.$$

Suy ra ta có $C(n - r, r)$ cách lựa chọn. Vậy tổng số sự lựa chọn thoả mãn là:

$$C(n - r - 1, r - 1) + C(n - r, r) = \frac{n}{r} C(n - r - 1, r - 1)$$

Bài toán 2.6.12 Chứng minh rằng số toàn ánh từ tập n phần tử tới tập m phần tử bằng $m!S(n, m)$.

Giải: Lấy các tập hợp $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ và $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Gọi $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$ là một sự phân chia bất kỳ của X thành m tập con không rỗng. Khi đó, bất kỳ một tương ứng một - một nào giữa y_i và X_j đều xác định một tương ứng từ X tới Y, có chính xác $m!$ toàn ánh một - một như vậy. Có $S(n, m)$ cách phân chia của tập X. Vậy chúng ta có: $m!S(n, m)$

toàn ánh thoả mãn.

Bài toán 2.6.13 Đếm số cách phân phối n vật phân biệt vào m hộp nếu thoả mãn:

$a)$ m hộp giống nhau và mỗi hộp phải có ít nhất một vật.

$b)$ m hộp giống nhau và cho phép có hộp trống.

$c)$ Các hộp đều phân biệt và mỗi hộp phải có ít nhất một vật.

Giải: $a)$ $S(n, m)$.

$b)$ $S(n, 1) + S(n, 2) + ... + S(n, m)$.

$c)$ $m!S(n, m)$.

Bài toán 2.6.14 Chứng minh rằng:

$a)S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$

$b)S(n, n-1) = C(n, 2)$.

Giải: $a)$ theo bài $2.1.10$

$b)$ Xét một sự phân chia tập X thành $n-1$ tập con trong đó có một tập con chứa 2 phần tử và $n-2$ tập con còn lại mỗi tập chứa 1 phần tử. Có $S(n, n-1)$ cách phân chia như thế. Tuy nhiên ta có thể nhìn theo cách khác, tập hợp gồm 2 phần tử có thể tạo ra theo $C(n, 2)$ cách. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.6.15 Chứng minh rằng:

$$S(n+1, m) = S(n, m-1) + mS(n, m)$$

Giải: Gọi $X \equiv \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và $A \equiv \{x_{n+1}\}$, $X' \equiv X \cup A$. Khi đó có $S(n+1, m)$ cách phân chia tập X' thành m tập con không rỗng. Để có một sự phân chia như vậy ta có thể làm theo một trong hai cách.

Cách 1: Phân chia X thành $m-1$ tập con không rỗng. $(m-1)$ tập con nào đó và A tạo thành một sự phân chia của X' thành m tập con. Có $S(n, m-1)$ cách phân chia.

Cách 2: Phân chia X thành m tập con không rỗng. Sau đó thêm x_{n+1} vào bất kỳ tập con nào trong số các tập con đó. Ta có được sự phân chia của X'

thoả mãn. Có $S(n, m)$ cách phân chia của X và m cách thêmx_{n+1} vào do đó có $mS(n, m)$ cách phân chia loại này.
Vậy ta có $S(n+1, m) = S(n, m-1) + mS(n, m)$.
Hệ quả 2.6.16 Từ kết quả bài 2.6.14 và điều kiện $S(n, 1) = S(n, n) = 1; S(n, m) = 0$ với $m > n$. Ta nhận được tam giác các số Stirling loại hai như sau:

n, m	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1
8	...	...	...	...	...	...	

2.7. Chuyên đề 7: Hoán vị và tổ hợp tổng quát

Hoán vị tổng quát thường áp dụng vào bài toán sắp xếp các vật trong đó có thể có sự lặp lại. Còn tổ hợp tổng quát là công cụ mạnh trong bài toán về sự phân phối các vật vào các "hộp " mà số lượng vật trong mỗi " hộp " có thể qui định trước. Sau đây là một bài toán dùng hoán vị và tổ hợp tổng quát.
Định lý 2.7.1 *(Định lý đa thức) Số hạng tổng quát trong khai triển* $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$ *là:*

$$C(n; n_1, n_2, ...n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k} \qquad (n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$$

Chứng minh: Ta có, số cách phân chia có thứ tự của tập hợp $S = \{(x_1 +$

$x_2 + ... + x_k)_1, (x_1 + ... + x_k)_2, ..., (x_1 + ... + x_k)_n\}$ vào một ngăn có n_1 phần tử, mỗi lần một phần tử x_1,..., một ngăn có n_k phần tử, mỗi lần một phần tử x_k là:

$$C(n; n_1, n_2, ..., n_k)$$

Từ đó nhận được điều phải chứng minh.

Hệ quả 2.7.2 Đặt $S = \sum\limits_{n_1+n_2+...+n_k=n} C(n; n_1, n_2, ..., n_k)$ khi đó $S = k^n$

Chứng minh: Theo định lý 2.7.1 ta có $S = (1 + 1 + ... + 1)^n = k^n$

Bài toán 2.7.3 Có 20 viên bi cùng cỡ nhưng khác màu nhau. (1 đỏ, 2 xanh, 2 nâu, 3 trắng, 3 vàng, 4 cam, 5 đen) trong một bình. Tìm số cách sắp xếp thành hàng 5 viên bi lấy ra từ bình đã cho.

Giải: Có 7 trường hợp phân biệt xảy ra:

$i)$ Tất cả 5 viên lấy ra cùng màu. Có một khả năng xảy ra là 5 viên ấy cùng màu đen suy ra có 1 cách sắp xếp chúng.

$ii)$ Chính xác có 4 viên cùng màu. Số cách lấy ra một mẫu 5 viên bi loại này là $C(2, 1).C(6, 1) = 21$. Ứng với mỗi mẫu có $P(5; 4, 1) = 5$ sự sắp xếp. Do đó tổng số cách sắp xếp là: $(21).(5) = 60$.

$iii)$ 3 viên cùng màu và 2 viên cùng một màu khác. Có $C(4, 1).C(5, 1) = 20$ mẫu thuộc loại này. Mỗi mẫu có $P(5; 3, 2) = 10$ cách sắp xếp. Do đó tổng số cách sắp xếp là: $20.10 = 200$ cách.

$iv)$ 3 viên cùng màu còn hai viên còn lại thuộc 2 màu khác nhau và khác màu 3 viên kia. Số mẫu thuộc loại này là: $C(4; 1).C(6; 2) = 60$ mỗi mẫu có $P(5; 3, 1, 1) = 20$ cách sắp xếp. Suy ra có tất cả: $60.20 = 1200$ cách sắp xếp loại này.

$v)$ Hai viên cùng màu, hai viên cùng một màu khác và một viên thuộc loại màu thứ 3. Số mẫu thuộc loại này là $C(6; 2).C(5; 1) = 75$ và mỗi mẫu có $P(5; 2, 2, 1) = 30$ sự sắp xếp. Tổng số cách sắp xếp ở đây là: $(75).(30) = 2250$ cách.

$vi)$ 2 viên cùng một màu và 3 viên còn lại có 3 màu khác nhau và khác màu 2 viên kia. Số mẫu là: $C(6; 1).C(6; 3) = 120$. Mối mẫu có $P(5; 2, 1, 1, 1) =$

60 sự sắp xếp. Vậy có $(120).(60) = 7200$ sự sắp xếp.

$vii)$ 5 viên có 5 màu khác nhau. Có $C(7;5) = 21$ mẫu, mỗi mẫu có $P(5;1,1,1,1,1) = 120$ sự sắp xếp. Vậy có: $(21).(120) = 2520$ cách sắp xếp thuộc loại này.

Tóm lại, số cách sắp xếp thoả mãn yêu cầu là:

$$1 + 60 + ... + 2520 = 13431 \text{ cách}$$

Bài toán 2.7.4 Chứng minh rằng nếu m và n là các số nguyên dương thì $(mn)!$ chia hết cho $(m!)^n$

Giải: Ta có $P(mn; \underbrace{m, m, ..., m}_{n-\text{số hạng}}) = \dfrac{(mn)!}{(m!)^n}$ là một số nguyên. Suy ra $(mn)!$ chia hết cho $(m!)^n$

Bài toán 2.7.5 Một hạt trong hệ trục toạ độ Đề các được tự do di chuyển từ bất kỳ điểm có toạ độ nguyên này tới điểm có toạ độ nguyên lân cận bất kỳ. Tìm số cách mà hạt đó bắt đầu xuất phát từ điểm gốc và quay trở về điểm gốc sau khi đi một đường đi có độ dài $2n$ đơn vị.

Giải: Một đường đi có độ dài $2n$ của điểm đó phải bao gồm p bước sang trái, p bước sang phải, q bước lên trên và q bước xuống dưới ($2p + 2q = 2n$). Do đó kết quả mong muốn là:

$$\sum_{p+q=n} P(2n; p, p, q, q)$$

Bài toán 2.7.6 Chỉ ra rằng $(n!)!$ chia hết cho $(n!)^{(n-1)!}$.

Giải: Chúng ta quan tâm tới một đa tập của $n!$ phần tử. Trong đó có $(n-1)!$ dấu hiệu, cứ n phần tử thuộc một dấu hiệu. Đa tập này có thể sắp xếp theo:

$$P(n!; \underbrace{n, n, ..., n}_{(n-1)!-\text{số hạng}}) = \frac{(n!)!}{(n!)^{(n-1)!}}$$

cách. Rõ ràng $P(n!; \underbrace{n, n, ..., n}_{(n-1)!-\text{số hạng}})$ là một số nguyên nên ta có điều phải chứng minh.

2.8. Chuyên đề 8: Nguyên lý bao hàm và loại trừ

Nguyên lý bao hàm và loại trừ có ứng dụng nhiều trong chứng minh các công thức của tổ hợp, đại số. Ngoài ra ta thường dùng nguyên lý này trong các bài toán định lượng tương tự như bài 2.8.1 , 2.8.2, 2.8.9...

Bài toán 2.8.1 Trong một ký túc xá có 12 sinh viên tham gia học hội hoạ (A); 20 sinh viên tham gia học sinh học (B), 20 sinh viên tham gia học hoá học (C), 8 sinh viên tham gia học kịch (D). Có 5 sinh viên tham gia cả A và B; 7 sinh viên tham gia cả A và C; 4 sinh viên tham gia cả A và D; 16 sinh viên tham gia cả B và C; 4 sinh viên tham gia cả B và D; 3 sinh viên tham gia cả C và D. Có 3 sinh viên tham gia cả A, B, C; 2 sinh viên tham gia cả A, B, D; 2 sinh viên tham gia cả B, C và D; 3 sinh viên tham gia cả A, C và D. Cuối cùng 2 sinh viên tham gia cả 4 lớp học. Biết rằng có71 sinh viên trong ký túc xá không tham gia bất kỳ một khoá học nào. Tìm tổng số sinh viên trong ký túc xá.

Giải: Gọi N là tổng số sinh viên trong ký túc xá thì:

$$71 = N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$$

trong đó:

$$S_1 = 12 + 20 + 20 + 8 = 60$$
$$S_2 = 5 + 7 + 4 + 16 + 4 + 3 = 39$$
$$S_3 = 3 + 2 + 2 + 3 = 10$$
$$S_4 = 2$$

Suy ra $N = 100$

Bài toán 2.8.2 Tìm số nghiệm nguyên của phương trình: $a+b+c+d = 17$ trong đó $1 \leq a \leq 3; 2 \leq b \leq 4; 3 \leq c \leq 5; 4 \leq d \leq 6$

Giải: Đặt $a = 1 + \alpha; b = 2 + \beta; c = 3 + \gamma; d = 4 + \delta$. Phương trình đã cho trở thành phương trình:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 7, \qquad 0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq 2$$

Gọi X là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình: $\alpha+\beta+\gamma+\delta=7$ và gọi A là tập con của X thoả mãn $\alpha \geq 3$, B là tập con thoả mãn $\beta \geq 3$, C là tập con thoả mãn $\gamma \geq 3$, D là tập con thoả mãn $\delta \geq 3$. Theo công thức Sieve:

$$n(A' \cap B' \cap C' \cap D') = n(X) - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$$

Theo bài 2.6.9 ta có:

$$n(X) = C(10,3); n(A) = n(B) = n(C) = n(D) = C(7,3)$$
$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = \cdots = n(C \cap D) = C(4,3)$$
$$n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B \cap D) = \cdots = n(B \cap C \cap D) = 0$$
$$n(A \cap B \cap C \cap D) = 0$$

Do đó

$$n(X) = 120$$
$$S_1 = C(4,1).C(7,3) = 140$$
$$S_2 = C(4,2).C(4,3) = 24$$
$$S_3 = 0; S_4 = 0$$

Kết quả cần tìm là:

$$n(A' \cap B' \cap C' \cap D') = 120 - 140 + 24 = 4$$

Bài toán 2.8.3 Chứng minh rằng số Stirling loại hai có thể được đánh giá từ công thức bao hàm và loại trừ sau:
$m!S(n,m) = m^n - C(m,1)(m-1)^n + C(m,2)(m-2)^n - ... + (-1)^{m-1}C(m,m-1).1^n$

Giải: Gọi M là tập hợp các ánh xạ từ $X = \{x_!, x_2, ..., x_n\}$ tới $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Goi A_i là tập con của M bao gồm các ánh xạ mà trong tập giá trrị không có $y_i, (i = 1, 2, ..., m)$. Chúng ta có: $n(M) = m^n$ và $S_k = C(m,k).(m-k)^n$ $(k = 1, 2, ..., m-1)$. Theo công thức Sieve ta có: Số ánh xạ thuộc M mà tập giá trị của nó chính bằng Y là:

$$m^n - C(m,1)(m-1)^n + ... + (-1)^{m-1}C(m;m-1).1^n$$

Mặt khác, kết quả này chính bằng số toàn ánh từ X vào Y bằng $m!S(n,m)$ bài $(2.6.10)$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2.8.4 Tìm các hoán vị của các chữ số từ 1 đến 9 mà trong đó:

$a)$ Không chứa các "khối" $23; 45$ và 678;

$b)$ Không chứa các "khối" $34; 45$ và 738.

Giải: Gọi X là tập hợp tất cả các hoán vị của 9 chữ số từ 1 đến 9. Khi đó $n(X) = 9!$

$a)$ Gọi A, B, C là các tập con của tập X tương ứng chứa các khối $23; 45$; và 678. Ta có:

$$\begin{aligned}
&n(A) = n(B) = 8!\\
&n(C) = n(A \cap B) = 7!\\
&n(A \cap C) = n(B \cap C) = 6!\\
&n(A \cap B \cap C) = 5!
\end{aligned}$$

Kết quả cần tìm là:

$$9! - (8! + 8! + 7!) + (7! + 6! + 6!) - 5! = 283560$$

$b)$ Gọi A, B, C là các tập con của tập X tương ứng chứa các khối $34; 45$; và 738. Khi đó:

$$\begin{aligned}
&n(A) = n(B) = 8!\\
&n(C) = n(A \cap B) = 7!\\
&n(B \cap C) = 6!\\
&n(A \cap C) = n(A \cap B \cap C) = 0
\end{aligned}$$

Kết quả cần tìm là

$$9! - (8! + 8! + 7!) + (7! + 0 + 6!) - 0 = 282960$$

Bài toán 2.8.5 Tìm số các số nguyên dương nhỏ hơn 601 thoả mãn không có ước là 3 hoặc 5 hoặc 7.

Giải: Gọi $X = \{1, 2, ..., 600\}$ thì $n(X) = 600$. Gọi A, B và C là các tập con của X tương ứng chứa các số chia hết cho $3, 5$ và 7. Ta có:

$S_1 = n(A) + n(B) + n(C) = \left(\dfrac{600}{3}\right) + \left(\dfrac{600}{5}\right) + \left[\dfrac{600}{7}\right] = 405.$

$S_2 = n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) = \left(\dfrac{600}{15}\right) + \left[\dfrac{600}{21}\right] + \left[\dfrac{600}{35}\right] = 85.$

$S_3 = n(A \cap B \cap C) = \dfrac{600}{105} = 5$

Vậy $n(A' \cap B' \cap C') = 600 - 405 + 85 - 5 = 275$

Định nghĩa 2.8.6 $\pi(n) \equiv$ số các số nguyên tố không vượt quá số nguyên dương n.

Định lý 2.8.7 *Chứng minh* $\pi(n) = n - 1 + r - S_1 + S_2 + ... + (-1)^r S_r$ *, trong đó* r *là số các số nguyên tố không vượt quá* $\sqrt{n}$.

Chứng minh: Gọi $X = \{2, 3, ..., n\}$ và r là số các số nguyên tố không vượt quá $\sqrt{n}$. Tức là: $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_r \leq \sqrt{n} < p_{r+1}$. Khi đó, gọi A_i là tập con của X chứa các số chia hết cho p_i $(i = 1, 2, .., r)$. Ta có

$$S_1 = \left[\frac{n}{p_1}\right] + \left[\frac{n}{p_2}\right] + ... + \left[\frac{n}{p_r}\right] = \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{n}{p_i}\right]$$

Và tổng quát

$$S_i = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq r} \left[\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_j}}\right] \qquad (j = 1, 2, ..., r)$$

$$n(\cup_i A_i) = S_1 - S_2 + ... + (-1)^{r-1} S_r$$

Suy ra $\pi(n) = n - 1 + r - S_1 + S_2 + ... + (-1)^r S_r$

Bài toán 2.8.8 Chỉ ra rằng 97 là số nguyên tố thứ 25

Giải: Ta sẽ chỉ ra $\pi(100) = 25$. Thật vậy, theo ký hiệu bài trên: $r = 4; p_1 =$

$2; p_2 = 3; p_3 = 5; p_4 = 7$.

$S_1 = \left[\dfrac{100}{2}\right] + \left[\dfrac{100}{3}\right] + \left[\dfrac{100}{5}\right] + \left[\dfrac{100}{7}\right] = 117.$

$S_2 = \left[\dfrac{100}{(2).(3)}\right] + \left[\dfrac{100}{(2).(5)}\right] + \left[\dfrac{100}{(2).(7)}\right] + \left[\dfrac{100}{(3).(5)}\right] + \left[\dfrac{100}{(3).(7)}\right] + \left[\dfrac{100}{(5).(7)}\right] = 45$

$S_3 = \left[\dfrac{100}{(3).(5).(7)}\right] + \left[\dfrac{100}{(2).(5).(7)}\right] + \left[\dfrac{100}{(2).(3).(7)}\right] + \left[\dfrac{100}{(2)(3).(5)}\right] = 6$

$S_4 = \left[\dfrac{100}{(2).(3).(5).(7)}\right] = 0$

Vậy: $\pi(100) = 100 - 1 + 4 - 117 + 45 - 6 + 0 = 25$

Bài toán 2.8.9 Có 30 sinh viên trong ký túc xá, 15 sinh viên tham gia học lớp hội hoạ, 8 sinh viên tham gia học lớp sinh học, 6 sinh viên tham gia học học hoá học. Biết rằng có 3 sinh viên tham gia cả 3 lớp trên. Chứng minh rằng có ít nhất 7 sinh viên không tham gia lớp học nào.

Giải: Gọi A là tập hợp các sinh viên trong ký túc xá tham gia lớp hội hoạ. B là tập hợp các sinh viên trong ký túc xá tham gia lớp sinh học. C là tập hợp các sinh viên trong ký túc xá tham gia lớp hoá học. Ta có: $S_1 = 15 + 8 + 6 = 19$, $S_3 = 3$. Gọi X là số sinh viên không tham gia lớp học nào. Khi đó:

$$x = 30 - 29 + S_2 - 3 = S_2 - 2$$

Mặt khác: $n(A \cap B \cap C) = 3$ nên

$$\begin{cases} n(A \cap B) \geq 3 \\ n(A \cap C) \geq 3 \\ n(B \cap C) \geq 3 \end{cases}$$

Suy ra $S_2 \geq 9$. Vậy $x \geq 9 - 2 = 7$

2.9. Chuyên đề 9: Những sự xáo trộn và những sự sắp đặt trước

Định nghĩa 2.9.1 Một hoán vị P của tập $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ được gọi là một sự xáo trộn nếu $P(x_i) \neq x_i$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Định lý 2.9.2 *Gọi D_n là số các xáo trộn của tập hợp $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Khi đó:*

$$D_n = n!\Big[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big]$$

Chứng minh: Gọi Q là tập hợp tất cả các hoán vị của X suy ra $n(Q) = n!$. Gọi A_i là tập con của Q chứa tất cả các hoán vị có x_i cố định $(i = 1, 2, .., n)$.Ta áp dụng công thức Sieve :

$$S_k = \sum n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = C(n, k)(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

Do đó

$$D_n = n(A_1' \cap A_2' \cap ... \cap A_k') = n!\Big[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big]$$

Hệ quả 2.9.3 Lập bảng tính D_n với $n = 1, 2, ..., 10$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133469	1334961

Bài toán 2.9.4 Trong một lớp học có n học sinh và n quyển sách phân biệt. Giáo viên phát ngẫu nhiên cho mỗi học sinh một quyển sách và yêu cầu học sinh phải nộp lại sau 1 tuần. Tuần sau, những quyển sách đó lại được phát ngẫu nhiên cho n học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối sao cho không học sinh nào nhận 2 lần cùng một quyển sách?

Giải: Tuần đầu, các quyển sách có thể phân phát theo $n!$ cách. Ứng với mỗi cách phân phát đó có D_n cách phân phát của tuần thứ hai sao cho thoả mãn yêu cầu bài toán. Vậy kết quả cần tìm là $n!D_n$.

Bài toán 2.9.5 Có n phụ nữ tham dự một buổi tiệc. Khi đến mỗi người đều mang theo một chiếc mũ , một chiếc áo khoác và gửi ở phòng tiếp tân. Khi ra về mỗi người phụ nữ sẽ lấy ngẫu nhiên một chiếc mũ và một chiếc áo khoác. Tìm số cách lấy những chiếc mũ và những chiếc áo khoác này nếu:

$a)$ Không người phụ nữ nào nhận đúng mũ hoặc áo của cô ấy.

b) Không người phụ nữ nào nhận đúng cả mũ và áo của cô ấy.

Giải: a) Những chiếc áo khoác bị xáo trộn theo D_n cách. Những chiếc mũ bị xáo trộn theo D_n cách. Vậy ta có $(D_n)^2$ cách lấy những chiếc mũ và những chiếc áo khoác thoả mãn yêu cầu bài toán.

b) Gọi A_i là tập con của tập X tất cả các sự phân phối, trong đó người phụ nữ thứ i nhận đúng cả mũ và áo khoác của cô ấy. $(i = 1, 2, ..., n)$

$$n(X) = (n!)^2; S_r = C(n, r)[(n-r)!]^2, (r = 1, 2, ..., n)$$

Vậy kết quả cần tìm là:

$$n(X) - S_1 + S_2 - ... + (-1)^n S_n$$

Bài toán 2.9.6 Có 8 bức thư khác nhau để gửi đến 8 địa chỉ khác nhau. Tìm số cách phân phối 8 bức thư này sao cho ít nhất một bức thư đến đúng tay người nhận.

Giải: Dễ thấy kết quả cần tìm là: $8! - D_8 = 40320 - 14833 = 25487$.

Bài toán 2.9.7 Tìm số đơn ánh từ tập hữu hạn X có n phần tử vào chính nó sao cho mỗi đơn ánh có ít nhất một điểm cố định ($n_0 \in X$, nếu $f(n_0) = n_0$ thì n_0 được gọi là một điểm cố định của đơn ánh f) .

Giải: Tương tự bài trên kết quả cần tìm là: $n! - D_n$.

Bài toán 2.9.8 Có 6 đôi găng tay trẻ em trong một hộp. Các đôi có màu khác nhau. Giả sử các chiếc găng tay phải được phân phát ngẫu nhiên cho 6 em và sau đó những chiếc găng tay trái lại được phát ngẫu nhiên cho 6 em đó. Tìm xác suất để:

a) Không em nào nhận đôi găng tay phù hợp.

b Tất cả 6 em đều nhận đôi găng tay phù hợp.

c) Chỉ có một em nhận được đôi ngăng tay phù hợp.

d) Ít nhất hai em nhận được đôi găng tay phù hợp.

Giải: Sáu chiếc găng tay phải có 6! cách phân phát. Sau đó có 6! cách phân phát ngẫu nhiên 6 chiếc găng tay trái. Vậy có tất cả $(6!)^2$ khả năng có thể xảy ra.

a) Có $6!$ cách phân phát ngẫu nhiên 6 chiếc găng tay phải. Ứng với mỗi cách đó có D_6 cách phân phối 6 chiếc găng tay trái để có kết quả theo yêu cầu của bài toán. Vậy xác suất cần tìm là: $\dfrac{6!D_6}{(6!)^2} = \dfrac{D_6}{6!}$.
b) Ứng với mỗi cách phân phát 6 chiếc găng tay phải thì có một cách phân phát 6 chiếc găng tay trái do đó ta có kết quả: $\dfrac{6!.1}{(6!)^2} = \dfrac{1}{6!}$
c) Ứng với mỗi cách phân phát 6 chiếc găng tay phải thì có $6.(1).D_5$ cách phân phát 6 găng tay trái sao cho có đúng một người nhận được đôi găng tay phù hợp. Vậy ta có kết quả: $\dfrac{6!.(6).(1).D_5}{(6!)^2} = \dfrac{D_5}{5!}$.
d) Sử dụng kết quả a) và c) ta có xác suất cần tìm là: $1 - \dfrac{D_6}{6!} - \dfrac{D_5}{5!}$.

2.10. Chuyên đề 10: Đại lượng bất biến

Đại lượng bất biến là một tính chất của bài toán không thay đổi qua sự tác động biến đổi của hệ thống. Nhiều bài toán nhờ phát hiện ra hoặc cố tình tạo ra những biến có tính chất bất biến hoặc đơn điệu bất biến từ đó đưa ta đến kết luận của bài toán.

Bài toán 2.10.1 Trên bảng ta viết 20 dấu cộng và 25 dấu trừ tại các vị trí bất kì. Ta thực hiện xóa hai dấu bất kì và viết vào đó một dấu cộng nếu xóa hai dấu giống nhau và dấu trừ nếu xóa hai dấu khác nhau; đến khi trên bảng chỉ còn một dấu . Hỏi dấu đó là dấu gì?

Giải:

Cách 1: Ta thay mỗi dấu cộng bằng số 1, còn mỗi dấu trừ bằng số (-1). Thao tác thực hiện là: xóa hai số và viết lại một số bằng tích của chúng. Vì thế tích của tất cả các số viết trên bảng sẽ không đổi. Ban đầu tích này bằng (-1). Vậy số cuối cùng phải là (-1). Hay dấu cần tìm là dấu trừ.

Cách 2: Sau mỗi lần thao tác, số dấu trừ hoặc là không thay đổi hoặc là giảm đi hai. Ban đầu số dấu trừ là lẻ nên ta có dấu cần tìm là dấu trừ.

Cách 3: Thay mỗi dấu cộng bằng số 0, còn mỗi dấu trừ bằng số 1. Thao tác thực hiện là tổng hai số là 0 hoặc 2 thì viết lại bằng số 0, tổng hai số là số 1 thì viết lại bằng số 1. Như vậy sau mỗi thao tác thực hiện, tổng các số trên bảng hoặc không đổi hoặc giảm đi hai. Đầu tiên, tổng các số trên bảng là số lẻ nên số cuối cùng là số lẻ. Do đó dấu cần tìm là dấu trừ.

Nhận xét 2.10.1 Phân tích ba cách giải, ta thấy, cách 1 lợi dụng tính không đổi của tích các số viết trên bảng; cách 2 là sự không đổi của số chẵn các dấu trừ ; cách 3 sử dụng sự không đổi tính chẵn lẻ của tổng các số.

Bài toán 2.10.2 Trên bảng ta viết ba số nguyên. Sau đó xóa đi một số và thay vào đó tổng của hai số còn lại trừ đi 1. Thao tác như vậy đến khi ta nhận được ba số 15, 2007, 2009. Hỏi ba số đầu tiên có phải là 2, 2, 2?

Giải: Giả sử ba số đầu tiên là 2, 2, 2. Sau mỗi thao tác, trong ba số luôn có hai số chẵn và một số lẻ. Nhưng kết quả đã cho đều là ba số lẻ nên câu trả lời cần tìm là ba số đầu tiên không phải là 2, 2, 2.

Nhận xét 2.10.3 Bài toán trên được giải nhờ phát hiện ra tính chẵn lẻ của ba số không thay đổi, nên từ trạng thái xuất phát không thể nhận được trạng thái kết thúc.

Bài toán 2.10.4 Trên bảng ô vuông $n \times n$ (n chẵn) ô vuông bao gồm $\dfrac{n^2}{2}$ ô trắng và $\dfrac{n^2}{2}$ ô đen. Trong cùng một hàng hoặc một cột bất kì, ta thay tất cả các ô trắng thành đen, các ô đen thành trắng. Hỏi có thể thực hiện hữu hạn bước thay đổi như vậy để trên bảng chỉ còn lại một ô đen hay không?

Giải: Không. Nếu có đúng k ô đen trong một hàng hoặc một cột trước khi thực hiện thay đổi thì, sau khi thực hiện một lần thay đổi, số ô đen trong hàng đó hoặc trong cột đó sẽ là $n - k$. Sự thay đổi số ô đen trong bảng là $(n - k) - k = n - 2k$. Đây một số chẵn. Do đó tính chẵn lẻ của số những ô đen vẫn giữ nguyên. Mặt khác bắt đầu có chẵn số ô đen nên không thể chỉ còn lại một ô đen trên bảng tại một bước biến đổi nào đó.

Bài toán 2.10.5 Có ba đống sỏi có số lượng tương ứng là 19, 8, 9 viên sỏi. Ta được phép chọn hai đống sỏi và chuyển một viên sỏi của mỗi đống sỏi đã chọn sang đống thứ ba. Sau một số lần làm như vậy thì có khả năng tạo ra ba đóng sỏi đều có 12 viên sỏi hay không?

Giải: Không. Đặt số viên sỏi trong ba đống tương ứng là a, b và c. Ta xét số dư của ba số này khi chia cho 3. Đầu tiên những số dư này là 1, 2, 0. Sau mỗi lần thực hiện những số dư này là 0, 1, 2 với những thứ tự khác nhau. Do đó tất cả các đống sỏi đều 12 viên là không thể được vì khi đó ba số dư là 0, 0, 0.

Bài toán 2.10.6 Mỗi thành viên của một câu lạc bộ có nhiều nhất là ba đối thủ trong câu lạc bộ (đối thủ ở đây là tương tác lẫn nhau). Chứng minh rằng những thành viên của câu lạc bộ có thể chia thành hai nhóm sao cho mỗi thành viên trong mỗi nhóm có nhiều nhất một đối thủ trong nhóm.

Giải: Đầu tiên ta chia ngẫu nhiên những thành viên trong câu lạc bộ thành hai nhóm. Kí hiệu S là số các cặp đối thủ trong cùng một nhóm. Nếu một thành viên có ít nhất hai đối thủ trong cùng một nhóm thì thành viên này có nhiều nhất một đối thủ trong nhóm khác. Thành viên này được di chuyển sang nhóm khác, ta sẽ giảm S đi ít nhất là 1. Vì S là một số nguyên không âm, nó không thể giảm mãi được. Như vậy sau một số hữu hạn lần chuyển đổi sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.10.7 A và B tiến hành trò chơi với 2009 hạt gạo. Một nước đi là lấy khỏi đống hạt gạo 1, 2 hoặc 3 hạt. A đi trước và thay phiên nhau. Người nào lấy được hạt gạo sau cùng là người chiến thắng. Vậy người nào có chiến thuật để luôn thắng và chiến thuật đó như thế nào?

Giải: A luôn thắng nếu A thực hiện chiến thuật sau: Khởi đầu A lấy một hạt gạo, nước tiếp theo A sẽ lấy đi $4 - x$ hạt, ở đây x là số hạt B đã lấy ở nước đi trước đó. Thật vậy, sau khi A đi lần đầu tiên, còn lại 2008 hạt gạo. Tiếp đó, theo chiến thuật trên thì sau mỗi lần B lấy rồi đến A đi, số hạt gạo còn lại trong đống bằng bội số của 4. Do vậy, cuối cùng đến lượt B thì còn lại 4 hạt. Dù B thực hiện cách nào thì A cũng là người chiến thắng.

Chương 3
Một số bài tập đề nghị

Bài 3.1 Tập hợp $A = \{1, 2, ..., 100\}$ được chia thành 7 tập hợp con khác tập rỗng và đôi một không giao nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tập con sao cho trong tập con này tìm được 4 phần tử a, b, c, d mà $a + b = c + d$ hoặc tìm được 3 phần tử e, f, g sao cho $e + f = 2g$.
Hướng giải: Sử dụng nguyên lý Dirichlet.
Bài 3.2 Cho 1978 tập hợp, mỗi tập hợp có 40 phần tử. Biết rằng hai tập hợp bất kỳ có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một phần tử thuộc tất cả 1978 tập hợp đã cho.
Hướng giải: Sử dụng nguyên lý Dirichlet.
Bài 3.3 Cho hai tập hợp khác rỗng gồm các số nguyên dương sao cho mỗi phần tử của các tập hợp này nhỏ hơn n (n là số nguyên dương cho trước, $n \geq 2$). Chứng minh rằng nếu tổng số phần tử của hai tập hợp không bé hơn n thì có thể chọn trong mỗi tập hợp một phần tử sao cho tổng số của chúng bằng n.
Hướng giải: Sử dụng nguyên lý Dirichlet.
Bài 3.4 Cho $A = \{0, 1, ..., 8\}$, tìm số ánh xạ $f : A \longrightarrow A$ thỏa mãn các điều kiện:
1, Nếu i khác j (i,j thuộc A) thì f(i) khác f(j).
2, Nếu $i + j = 8$ thì $f(i) + f(j) = 8$.
Hướng giải: Sử dụng quy tắc nhân.
Bài 3.5 Chứng minh rằng từ tập hợp gồm 25 số dương luôn có thể chọn được hai số mà tổng và hiệu của chúng không trùng với 23 số còn lại.
Hướng giải: Sử dụng nguyên lý Dirichlet.
Bài 3.6 Cho tập hợp X có k phần tử và tập hợp Y có m phần tử. Hỏi có bao

nhiêu ánh xạ từ X đến Y.

Hướng giải: Sử dụng quy tắc nhân.

Bài 3.7 Cho $S = \{1, 2, 3..., 280\}$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm n phần tử của S đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Hướng giải: Sử dụng công thức về số phân tử của hợp các tập hợp và nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.8 Chứng minh rằng với mỗi $n \in N^*$ ta có đẳng thức:

$$\sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \frac{1}{i_1.i_2..i_k} = n$$

Trong đó tổng được lấy theo tất cả các bộ có thể.

$i_1 < i_2 < ... < i_k, k = 1, 2, ...n$ từ tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$.

Hướng giải: Dùng đồng nhất hệ số đa thức và biến đổi tổ hợp.

Bài 3.9 Cho tập hợp $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \in N^*$ và số nguyên dương m sao cho $n > \frac{m}{2}$. Biết rằng số dư trong phép chia các phần tử của A cho m là khác nhau đôi một.

Chứng minh rằng với mỗi $k \in Z$, tồn tại $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ (i, j không nhất thiết khác nhau) sao cho số $a_i + a_j - k$ chia hết cho m.

Hướng giải: Sử dụng nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.10 Cho $n \in N^*$, chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C(n,k)} = \frac{n+1}{2^{n+1}}.\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}.$$

Hướng giải: Quy nạp và biến đổi tổ hợp.

Bài 3.11 Cho $P(x) \in R[x]$ có bậc $\le 2n$. Biết rằng với mỗi số nguyên $k \in [-n, n]$ thì $\mid P(x) \mid \le 1$.Chứng minh rằng với mọi $x \in [-n, n]$ thì $\mid P(x) \mid \le 2^{2n}$

Hướng giải: Dùng đa thức nội suy Lagrange và biến đổi tổ hợp.

Bài 3.12 Cho các số nguyên : $x_0 < x_1 < ... < x_n$ và cho đa thức $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. Chứng minh rằng trong các số $P(x_j), j = 0, 1, .., n$ luôn tồn tại ít nhất một số có giá trị tuyệt đối không nhỏ hơn $\frac{n!}{2^n}$.

Hướng giải : Giống bài 3.11.

Bài 3.13 Tìm tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện : Nếu $F(x) \in Z(x)$ sao cho $0 \leq F(c) \leq k$ với mọi $c \in \{0, 1, .., k+1\}$ thì $F(0) = F(1) = ... = F(k+1)$.

Hướng giải: Sử dụng nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.14 Giả sử : $(1.x + 2.x^2 + ... + n.x^n)^2 = a_0 + a_1 x + ... a_{2n} x^{2n}$. Chứng minh rằng $a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n} = \dfrac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}$.

Hướng giải : Biến đổi tổ hợp.

Bài 3.15 Cho $P(x) \in Z[x]$ sao cho với mỗi $x \in N^*$ ta có $P(x) > x$. Dãy (b_n) xác định như sau: $b_1 = 1, b_{k+1} = P(b_k), \forall k \geq 1$. Biết rằng với mỗi $d \in N^*$ luôn tồn tại ít nhất một số hạng của dãy (b_n) chia hết cho d. Chứng minh rằng: $P(x) = x + 1, \forall x \in N^*$.

Hướng giải: Phản chứng và dùng nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.16 Cho n số $p_1, p_2, ..., p_n \in [0, 1]$. Chứng minh rằng bất phương trình: $\sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{| x - p_i |} \leq 8n(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + ... + \dfrac{1}{2n-1})$ có nghiệm thuộc $[0, 1]$.

Hướng giải: Sử dụng nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.17 Cho $n \in N^*$, đặt $S_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (C(n,k) - C(n,k-1))^2$. Chứng minh rằng $S_n = \dfrac{1}{n+1}.C(2n, n)$.

Hướng giải : Biến đổi tổ hợp.

Bài 3.18 Cho các số thực $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Chứng minh rằng tồn tại số c phụ thuộc vào $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sao cho có vô số bộ các số $(m_1, m_2, ..., m_n) \in Z^n$ mà $| \alpha_1 m_1 + ... + \alpha_n m_n | < \dfrac{c}{| m_1 | + ... + | m_n |^{n-1}}$.

Hướng giải : Dùng qui tắc nhân và nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.19 Cho các tập hợp $M = \{1, 2, ..., 27\}$ và $A = \{a_1, ..., a_k\} \subset \{1, 2, ..., 14\}$. Có tính chất sau: Mỗi phần tử của M là một phần tử của A hoặc là tổng của hai phần tử (không nhất thiết phân biệt) của A. Tìm giá trị nhỏ nhất của k.

Hướng giải : Dùng tổ hợp và chứng minh phản chứng để có kết quả giá trị nhỏ nhất của k bằng 8.

Bài 3.20 Cho hệ phương trình gồm $q = 2p$ ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1q}x_q = 0. \\ .... \\ a_{p1}x_1 + ... + a_{pq}x_q = 0. \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Chứng minh rằng tồn tại nghiệm $(x_1, ..., x_q)$ khác $(0, 0, ..., 0), x_j \in Z$ và $| x_j | \leq q, \forall j = 1, 2, ..., q$.

Hướng giải : Dùng qui tắc nhân và nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.21 Cho tập hợp M gồm 2002 số nguyên dương, mỗi số chỉ có ước nguyên tố không vượt quá 23. Chứng minh rằng tồn tại 4 số phân biệt trong M có tích là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.

Hướng giải: Nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.22 Cho tập hợp A gồm n nguyên tố phân biệt và M là tập gồm $n + 1$ số tự nhiên phân biệt sao cho mỗi số trong M đều không là số chính phương và chỉ có ước nguyên tố thuộc A. Chứng minh rằng có thể chọn ra trong M một số có tích là một số chính phương.

Hướng giải: Nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.23 Cho $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ và P là tập các tập con của S mà $|T| = 49$. Với mỗi $T \in P$, ta đánh số một cách ngẫu nhiên, các số lấy từ tập S. Chứng minh rằng tồn tại tập con M của S có số phần tử là 50 và với mỗi $x \in M$, tập $M \setminus \{x\}$ không được đánh số bởi x.

Hướng giải: Nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.24 Tô màu các ô của bảng 4 x 7 bởi hai màu: đen, trắng.

Chứng minh rằng với mọi cách tô luôn tồn tại một hình chữ nhật có các cạnh nằm trên đường lưới sao cho 4 ô ở 4 góc cùng màu.

Hướng giải: Nguyên lý Dirichlet.

Bài 3.25 Xét bảng ô vuông 4 x 4. Điền vào mỗi ô một số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột bằng 0.

Hỏi có bao nhiêu cách?

Đáp án: 90 cách.

Bài 3.26 Lưới ô vuông n x n, trong đó n là số nguyên dương. Mỗi nút lưới ta tô một trong hai màu: xanh hoặc đỏ sao cho mỗi hình vuông đơn vị có hai đỉnh màu đỏ và hai đỉnh màu xanh.

Hỏi có bao nhiêu cách?

Đáp án: $2^{n+2} - 2$ cách.

Bài 3.27 Cho n là số nguyên dương. Kí hiệu $Z_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Xét các tập:

$$A_n = \{(a, b, c) : a, b, c \in Z_n, a < b < c, a + b + c \equiv 0(modn)\}$$

,

$$B_n = \{(a, b, c) : a, b, c \in Z_n, a \leq b \leq c, a + b + c \equiv 0(modn)\}$$

a) Chứng minh rằng $|B_n| = |A_n| + n$.

b) Tính $|A_n|$.

Hướng giải: b) Dùng so sánh để chứng minh

$|A_{n+3}| = |B_n|$. Suy ra $|A_{n+3}| = |A_n| + n$. Từ đó tính được $|A_n|$.

Bài 3.28 Cho tập $X = \{1, 2, ..., 2000\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con T của X mà tổng các phần tử của T chia hết cho 5.

Đáp số: Số tập con cần tìm là $\frac{1}{5}(2^{402} + 2^{2000})$

Bài 3.29 Cho bảng ô vuông 1991 x 1992. Kí hiệu ô (m, n) là nằm ở giao của hàng thứ m và cột thứ n. Tô màu các ô của bảng theo quy tắc sau: Lần thứ nhất tô ba ô $(r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2)$ với $1 \leq r \leq 1989$, $1 \leq s \leq 1990$. Từ lần thứ hai, mỗi lần tô ba ô chưa có màu nằm bên cạnh nhau trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Hỏi ta có thể tô màu hết tất cả các ô của bảng được không?

Đáp số: Không (Sử dụng bất biến) .

Bài 3.30 Cho góc vuông Oxy. Chia góc đó thành các hình vuông đơn vị bởi các đường thẳng song song với Ox và Oy. Kí hiệu ô (i, j) là ô nằm ở giao của dòng thứ i và cột thứ j (thứ tự các dòng và cột được tính từ dưới lên và từ trái sang phải). Thực hiện thuật toán sau: Mỗi lần lấy ra khỏi góc xOy viên bi ở ô (i, j) nào đó mà tại các ô $(i+1, j)$ và $(i, j+1)$ đều không có bi, đồng thời thêm vào hai ô này mỗi ô một viên bi.

Hỏi sau một số lần thực hiện thuật toán ta có thể nhận được trạng thái mà:

a) Các ô (1,1),(1,2),(2,1),(2,2) đều không có bi?

b) Các ô (1,1),(1,2),(2,1),(2,2), (1,3) và (3,2) đều không có bi?

Đáp số:

a) Có

b) Không (Sử dụng bất biến) .

Bài 3.31 Hai người luân phiên viết các số 0 hoặc 1 vào các ô của bảng 1993 x 1994. Gọi A_n và B_n tương ứng là giá trị lớn nhất của tổng các số thuộc cùng một hàng và tổng các số thuộc cùng một cột. Người thứ nhất thắng nếu $A_n > B_n$, ngược lại thì người thứ hai thắng.

Hỏi có chiến lược thắng.

Đáp số: Người thứ hai có chiến lược thắng.

Bài 3.32 Trên bảng cho trước số nguyên dương $n_0 \geq 2$. Hai người chơi trò chơi sau: Người thứ nhất được phép viết lên bảng số n_1 sao cho $n_0 \leq n_1 \leq {n_0}^2$, người thứ hai được phép viết số n_2 sao cho $\dfrac{n_1}{n_2}$ có dạng p^s, trong đó p là số nguyên tố và s là số nguyên dương. Sau đó thay giá trị của n_0 bởi giá trị của n_2 và tiếp tục chơi. Người thứ nhất sẽ thắng nếu viết được số 2001 và người thứ hai sẽ thắng nếu viết được số 1. Giả thiết rằng, hai người chơi đều rất thông minh. Hỏi ai là người chiến thắng.

Đáp số: Nếu $n_0 \in \{2, 3, 4, 5\}$ thì người thứ hai sẽ thắng. Nếu $n_0 \in \{6, 7\}$ thì hai người hòa. Các trường hợp còn lại thì người thứ nhất sẽ thắng.

Bài 3.33 Trong một cuộc thi hoa hậu, mỗi giám khảo được đề nghị 10 thí sinh vào vòng chung kết. Một nhóm thí sinh gọi là chấp nhận được đối với giám khảo A nếu trong nhóm đó có ít nhất một thí sinh do A đề nghị. Biết rằng, với 6 giám khảo bất kì đều tồn tại một nhóm gồm đúng 2 thí sinh là nhóm chấp nhận được đối với cả 6 giám khảo đó. Chứng minh rằng tồn tại một nhóm gồm 10 thí sinh là nhóm chấp nhận được đối với mọi thành viên của ban giám khảo.

Hướng dẫn: Phản chứng.

Bài 3.34 Cho k, n là các số nguyên dương và một bảng ô vuông vô hạn. Đặt $3k$ x n quân cờ trong hình chữ nhật $3k$ x n. Xét cách chơi sau đây: mỗi quân cờ sẽ nhảy ngang hoặc nhảy dọc qua một ô kề nó chứa quân cờ để đến ô tiếp theo nếu ô này còn trống. Sau khi làm như vậy thì loại bỏ quân cờ vừa bị nhảy qua.Hỏi có khi nào trên bảng ô vuông đã cho chỉ còn lại đúng một quân cờ?.

Hướng giải: Sử dụng bất biến.

Bài 3.35 Trong hình tròn đơn vị cho 2000 điểm tạo thành đa giác lồi $A_1A_2...A_2000$. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm trong số đó tạo thành tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{31250000}$.

Hướng giải: Phương pháp cực hạn.

Bài 3.36 Trên mặt phẳng cho một số điểm đỏ và một số điểm xanh. Một số cặp điểm được nối với nhau . Một điểm được gọi là kì dị nếu quá nửa số đoạn thẳng xuất phát từ điểm này có đầu mút còn lại là khác màu với nó. Thực hiện thuật toán sau: Mỗi lần chọn tra một điểm kì dị và đổi màu nó. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước, tất cả các điểm kì dị đều bị xóa.

Hướng giải: Phương pháp cực hạn.

Bài 3.37 Xem kết quả học tập của một lớp học, người ta thấy hơn 2/3 số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Toán cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Vật Lý; hơn 2/3 số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Vật Lý cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Ngữ văn; hơn 2/3 số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Ngữ văn cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử; hơn 2/3 số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Toán. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một học sinh đạt điểm giỏi ở cả bốn môn nêu trên.

Hướng dẫn: Nguyên lý bù trừ.

Bài 3.38 Cho trước n là số tự nhiên lẻ lớn hơn 1, với mỗi hoán vị $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ trong số $n!$ hoán vị của $1, 2, ..., n$, ta đặt

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} 2^i a_i$$

Chứng minh rằng tồn tại 2 hoán vị b và c, b khác c sao cho $n!$ là một ước số của $S(b) - S(c)$.

Hướng dẫn: Phương pháp phản chứng.

Bài 3.39 Một hình tròn được chia thành 6 hình quạt bằng nhau, trong mỗi hình quạt đặt một quân cờ. Mỗi lần cho phép chuyển một quân cờ ở một hình quạt sang một trong hai hình quạt bên cạnh. Chứng minh rằng không thể dồn các quân cờ vào một hình quạt sau 2006 lần thực hiện.

Hướng dẫn : Xây dựng hệ thức truy hồi.

Bài 3.40 Cho $P_1, P_2, ..., P_n$ là n điểm trên cùng một đường tròn. Cho $p \in N, 2 \leq p \leq n$. Có bao nhiêu cách tô màu n diểm đã cho bằng p màu sao cho hai điểm kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau.

Đáp số: $a_1 = p, a_2 = p(p-1), a_n = (p-1)a_{n-2} + (p-2)a_{n-1}$.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

1. Nguyễn Hữu Điển (2004), Giải toán bằng phương pháp đại lượng bất biến, Nxb Giáo dục, Hà Nội.

2. Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành (2004), Toán rời rạc, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

3. Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Vũ Đình Hòa, Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng (2008), Chuyên đề chọn lọc tổ hợp và toán rời rạc, Nxb Giáo dục, Hà Nội.

4. Ngô Đắc Tân (2004), Lý thuyết tổ hợp và đồ thị, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

Tiếng Anh

5. V.K. Balakrishnan, Ph.D (1995), Theory and problems of combinatorics, McGraw-Hill, INC, Singapore.

6. Titu Andreescu Zuming Feng (2004), A Path to Combinatoricts for Undergraduates (Counting Strategies), Birkhauser Boston, United states of America.