ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRỊNH VIỆT PHƯƠNG

NGUYÊN LÍ DIRICHLET VÀ ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN SƠ CẤP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS PHAN HUY KHẢI

Thái Nguyên - 2009

Lời nói đầu

Nguyên lí Dirichlet là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong lĩnh vực khác nhau của toán học. Nguyên lí này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi.

Luận văn này dành để trình bày các ứng dụng của nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán sơ cấp.

Ngoài phần mở đầu luận văn gồm bốn chương và danh mục tài liệu tham khảo. Chương **I** dành để trình bày các kiến thức cơ bản (đặc biệt giới thiệu nguyên lí Dirichlet) sẽ dùng đến trong các chương sau.

Chương **II** với tiêu đề "Ứng dụng nguyên lý Dirichlet vào bài toán hình học tổ hợp" trình bày các ứng dụng của nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán trong lĩnh vực hình học tổ hợp.

Cần nhấn mạnh rằng sử dụng nguyên lí Dirichlet là một trong những phương pháp hiệu quả nhất để giải các bài toán về hình học tổ hợp.

Chương **III** trình bày cách sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán về số học, đặc biệt là các bài toán về tính chia hết, tính chính phương ...

Phần còn lại của luận văn dành để trình bày các ứng dụng của nguyên lí Dirichlet vào các bài toán khác.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thày giáo PGS.TS Phan Huy Khải. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy. Tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo khoa Toán trường Đại học Khoa học, khoa Sau đại học - ĐHTN, các thầy, cô giáo đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tập tại đây. Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu và các đồng nghiệp của tôi ở trường THPT Phương Xá - Phú Thọ đã động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Mục lục

Chương 1

Các kiến thức cơ bản

Nguyên lí những cái lồng nhốt các chú thỏ đã được biết đến từ rất lâu. Nguyên lí này được phát biểu đầu tiên bởi nhà toán học người Đức Perter Guster Lijeune Dirichlet (1805-1859).

1.1 Nguyên lý Dirichlet cơ bản

Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.

1.2 Nguyên lý Dirichlet mở rộng

Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left[\dfrac{n+m-1}{m}\right]$ con thỏ, ở đây kí hiệu $[\alpha]$ để chỉ phần nguyên của số α.

Ta chứng minh nguyên lí Dirichlet mở rộng như sau : Giả sử trái lại mọi chuồng thỏ không có đến

$$\left[\frac{n+m-1}{m}\right] = \left[\frac{n-1}{m}+1\right] = \left[\frac{n-1}{m}\right]+1$$

con, thì số thỏ trong mỗi chuồng đều nhỏ hơn hoặc bằng $\left[\dfrac{n-1}{m}\right]$ con. Từ đó suy ra tổng số con thỏ không vượt quá $m.\left[\dfrac{n-1}{m}\right] \geq n-1$ con. Điều này vô lí vì có n con thỏ. Vậy giả thiết phản chứng là sai.

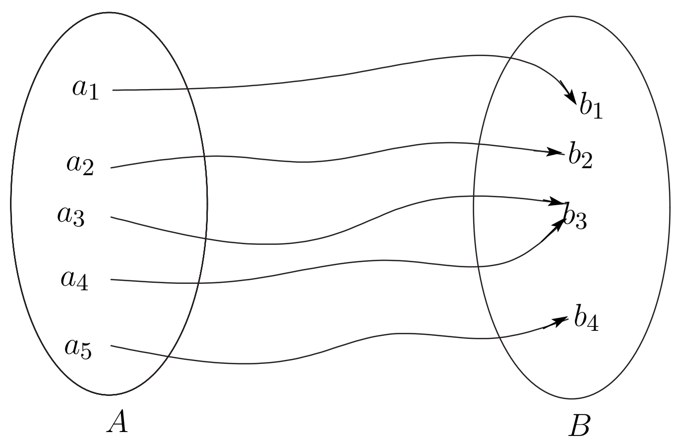
Nguyên lí Dirichlet mở rộng được chứng minh.

Nguyên lí Dirichlet tưởng chừng đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong lĩnh vực khác nhau của toán học. Nguyên lí này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi.

Nguyên lí Dirichlet thực chất là một định lí về tập hữu hạn. Người ta có thể phát biểu chính xác nguyên lí này dưới dạng sau đây.

1.3 Nguyên lí Dirichlet dạng tập hợp

Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B. Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B, thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B.



Hình 1.1

Với cùng một cách diễn đạt như vậy, nguyên lí Dirichlet mở rộng có dạng sau đây.

1.4 Nguyên lí Dirichlet dạng tập hợp mở rộng

Giả sử A, B là hai tập hợp hữu hạn và $S(A), S(B)$ tương ứng kí hiệu là các số lượng phần tử của A và B. Giả sử có một số tự nhiên k nào đó mà $S(A) > k.S(B)$ và ta có quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử của A với một phần tử của B. Khi đó tồn tại ít nhất $k+1$ phần tử của A mà chúng tương ứng với cùng một phần tử của B.

Chú ý: Khi $k = 1$, ta có ngay lại nguyên lí Dirichlet.

Chương 2

Ứng dụng nguyên lý Dirichlet vào bài toán hình học tổ hợp

Chương này trình bày phương pháp sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán hình học tổ hợp. Vì lẽ đó, chúng tôi xin trình bày một số mệnh đề (thực chất là một số nguyên lí Dirichlet áp dụng cho độ dài các đoạn thẳng, diện tích các hình phẳng, thể tích các vật thể) hay sử dụng nhiều đến trong nhiều bài toán hình học tổ hợp được đề cập đến trong chương này.

Mệnh đề 2.1 Nguyên lí Dirichlet cho diện tích

Nếu K là một hình phẳng, còn $K_1, K_2, \ldots, K_n$ là các hình phẳng sao cho $K_i \subseteq K$ với $i = \overline{1, n}$ và

$$|K| < |K_1| + |K_2| + \cdots + |K_n|.$$

Ở đây $|K|$ là diện tích của hình phẳng K, còn $|K_i|$ là diện tích của hình phẳng $K_i, i = \overline{1, n}$, thì tồn tại ít nhất hai hình phẳng $H_i, H_j, (1 \le i \le j \le n)$ sao cho H_i và H_j có điểm trong chung. (Ở đây ta nói rằng P là điểm trong của tập hợp A trên mặt phẳng, nếu như tồn tại hình tròn tâm P bán kính đủ bé sao cho hình tròn này nằm trọn trong A).

Tương tự nguyên lí Dirichlet cho diện tích, ta có nguyên lí Dirichlet cho độ dài các đoạn thẳng, thể tích các vật thể.

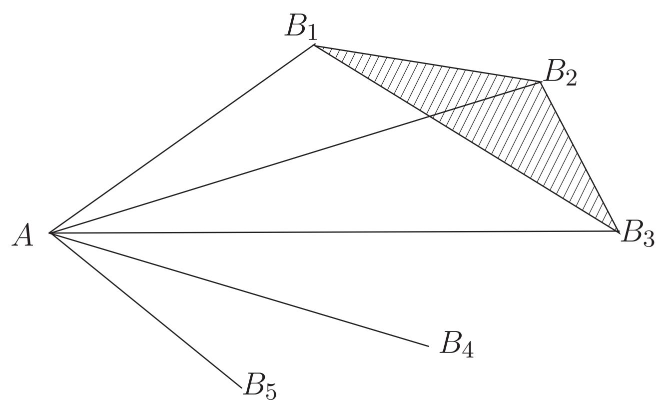
Nguyên lí Dirichlet còn được phát biểu cho trường hợp vô hạn như sau.

Mệnh đề 2.2 (Nguyên lí Dirichlet vô hạn) Nếu chia một tập hợp vô hạn các quả táo vào hữu hạn các ngăn kéo, thì phải có ít nhất một ngăn kéo chứa vô hạn quả táo.

Ta bắt đầu sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán hình học tổ hợp sau đây.

Ví dụ 2.1 Trong mặt phẳng cho sáu điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối từng cặp điểm được bôi màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong số sáu điểm đã cho, sao cho chúng là ba đỉnh của một tam giác mà các cạnh của nó được bôi cùng một màu.

Lời giải:



Hình 2.1

Xét A là một trong số sáu điểm đã cho. Khi đó xét năm đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng nối điểm A với năm điểm còn lại). Vì mỗi đoạn thẳng được bôi chỉ màu đỏ hoặc xanh, nên theo nguyên lí Dirichlet có it nhất ba trong năm đoạn nói trên cùng màu. Giả sử là các đoạn AB_1, AB_2, AB_3 và có thể cho rằng chúng cùng màu xanh.

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

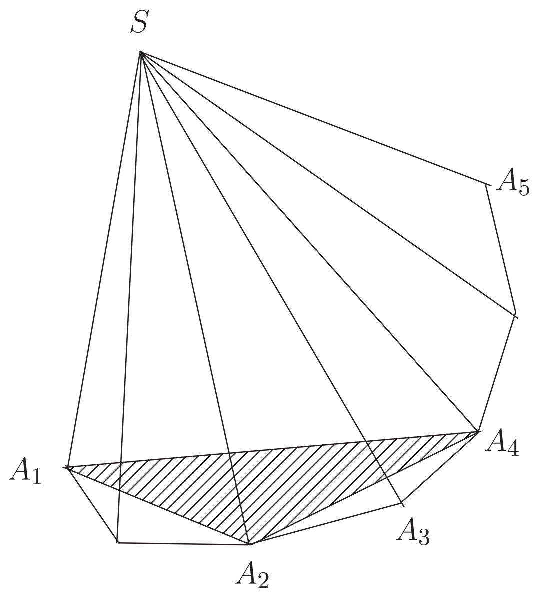
1. Nếu ít nhất một trong ba đoạn B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 màu xanh thì tồn tại một tam giác với ba cạnh xanh và kết luận của bài toán đúng trong trường hợp này.

2. Nếu không phải như vậy, tức là B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 màu đỏ, thì ba điểm phải tìm là B_1, B_2, B_3, vì $B_1B_2B_3$ là tam giác với ba cạnh đỏ.$\square$

Ví dụ 2.2 Cho hình chóp đáy là đa giác chín cạnh. Tất cả các cạnh bên và 27 đường chéo của đa giác đáy được bôi bằng một trong hai màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh của hình chóp sao cho chúng là những đỉnh của hình tam giác với các cạnh được bôi cùng màu.

Lời giải:

Xét chín cạnh bên. Vì chín cạnh này chỉ được bôi bằng hai màu đỏ hoặc xanh, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại năm cạnh bên được bôi cùng màu. Không giảm tổng quát có thể cho đó là các cạnh bên $SA_1, SA_2, SA_3, SA_4, SA_5$ được bôi cùng màu đỏ, các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 xếp theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Xét đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5$. Có hai khả năng sau xảy ra:



Hình 2.2

1. Nếu A_1A_2 là đường chéo của đáy, khi đó dĩ nhiên A_2A_4, A_4A_1 cũng là các đường chéo của đáy.
   Lại có hai khả năng sau xảy ra:

   (a) Nếu cả ba đoạn A_1A_2, A_2A_4, A_4A_1 cùng bôi màu xanh. Khi đó A_1, A_2, A_4 là ba đỉnh cần tìm, vì tam giác $A_1A_2A_4$ là tam giác với ba cạnh xanh.

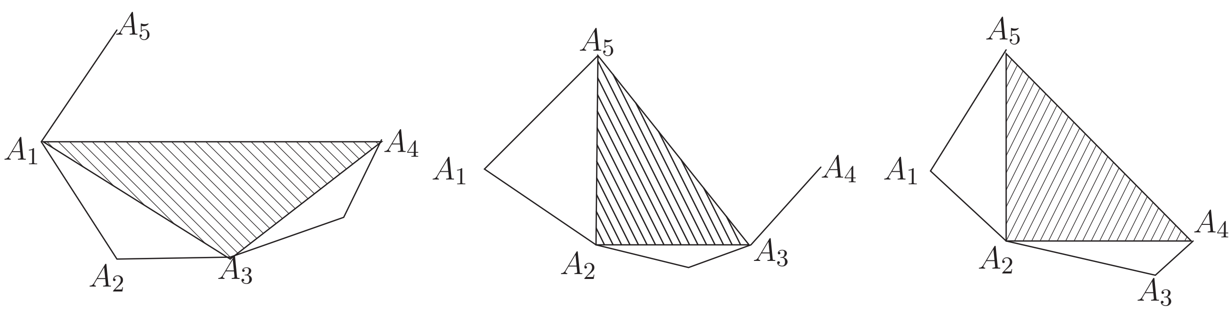
   (b) Nếu một trong các đoạn A_1A_2, A_2A_4, A_4A_1 là đỏ. Giả sử A_2A_4 đỏ, thì SA_2A_4 là tam giác với ba cạnh đỏ. Lúc này S, A_2, A_4 là ba đỉnh cần tìm. Trường hợp 1 đã giải quyết xong.

2. Nếu A_1A_2 là cạnh đáy. Khi đó dĩ nhiên A_1A_3, A_3A_5 chắc chắn là đường chéo đáy.

(a) Nếu A_1A_5 là đường chéo đáy thì ta quay về trường hợp 1 vừa xét, với $A_1A_3A_5$ là tam giác với ba cạnh là ba đường chéo đáy.

(b) Nếu A_1A_5 là cạnh đáy. Khi đó rõ ràng A_1A_3, A_1A_4 là các đường chéo đáy.

NếuA_3A_4 là đường chéo đáy, ta quay về trường hợp 1, nếu A_3A_4 là cạnh bên. Lại xét hai khả năng sau:



Hình 2.3

1. Nếu A_2A_3 là đường chéo đáy, thì tam giác $A_2A_3A_5$ là tam giác với ba cạnh là ba đường chéo đáy, ta quay về trường hợp 1.

2. Nếu A_2A_3 là cạnh đáy. Khi đó xét tam giác $A_2A_4A_5$ và quay về trường hợp 1.

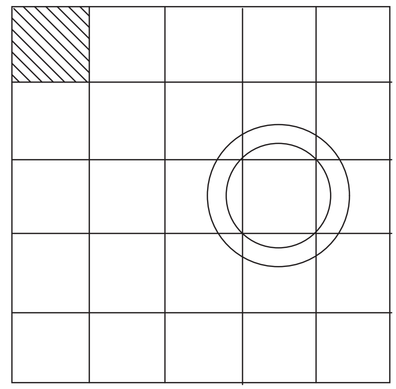
Tóm lại bài toán đã được giải quyết xong hoàn toàn.□

Ví dụ 2.3 Trong hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1) có 101 điểm. Chứng minh rằng có năm điểm trong các điểm đã chọn được phủ bởi một đường tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Lời giải:

Chia hình vuông ra làm 25 hình vuông bằng nhau, mỗi cạnh của hình vuông là 0.2.Vì có 101 điểm, mà chỉ có 25 hình vuông, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hình vuông nhỏ chứa ít nhất năm điểm (trong 101 điểm đã cho). Vì hình vuông này nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = \dfrac{\frac{1}{5}.\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

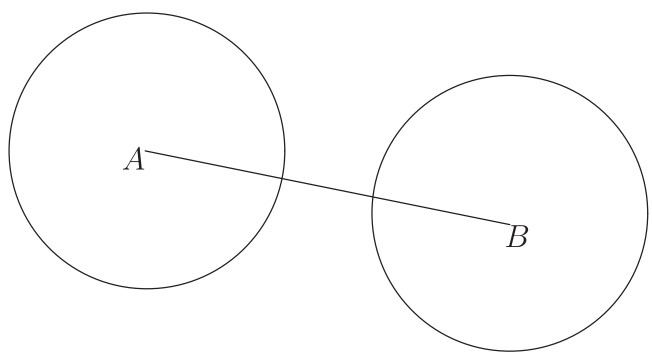
Do $\dfrac{\sqrt{2}}{10} < \dfrac{1}{7}$ nên dĩ nhiên đường tròn đồng tâm với đường tròn ngoại tiếp trên và có bán kính $\dfrac{1}{7}$ chứa ít nhất năm điểm nói trên. □



Hình 2.4

Ví dụ 2.4 Trên mặt phẳng cho 25 điểm. Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.

Lời giải:



Hình 2.5

Lấy A là một trong số 25 điểm đã cho. Xét hình tròn $\Omega_1(A;1)$ tâm A, bán kính 1. Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu tất cả các điểm đã cho nằm trong Ω_1 thì kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.

2. Tồn tại điểm $A \neq B$ (B thuộc trong số 25 điểm đã cho), sao cho$B \notin \Omega_1$. Vì $B \notin \Omega_1$, nên $AB > 1$. Xét hình tròn $\Omega_2(B,1)$ tâm B, bán kính 1. Lấy C là điểm bất kì trong số 25 điểm đã cho sao cho $C \neq A, C \neq B$. Theo giả thiết (và dựa vào $AB > 1$), nên $\min\{CA, CB\} < 1$. Vì thế $C \in \Omega_1$ hoặc $C \in \Omega_2$. Điều khẳng định này chứng tỏ rằng các hình tròn Ω_1 và Ω_2 chứa tất cả 25

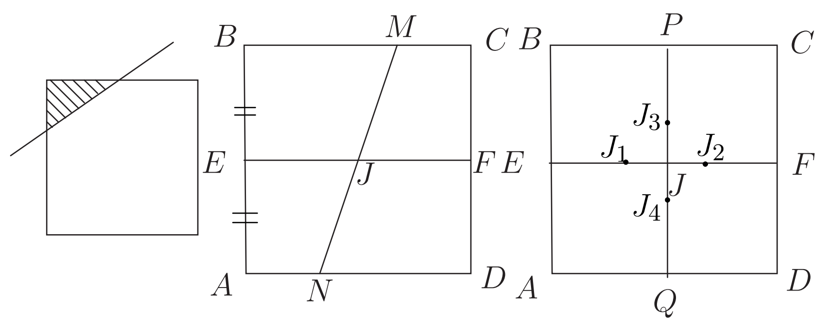
điểm đã cho. Vì thế theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất một trong hai hình tròn nói trên chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.□.

Chú ý: Bài toán có dạng tổng quát như sau (cách giải hoàn toàn tương tự).

Cho $2n+1$ điểm trên mặt phẳng(với $n \geq 3$). Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Khi đó tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn $n+1$ điểm đã cho.

Ví dụ 2.5 Cho chín đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\dfrac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Lời giải:



Hình 2.6

Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và một ngũ giác (chứ không phải chia hình vuông thành hai hình tứ giác). Vì lẽ đó, mọi đường thẳng (trong chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và dĩ nhiên không đi qua đỉnh nào của hình vuông cả. Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N. Ta có:

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{MCDN}} = \frac{2}{3} \Longleftrightarrow \frac{\frac{1}{2}.AB(BM+AN)}{\frac{1}{2}.CD(MC+ND)} = \frac{2}{3} \Longleftrightarrow \frac{EJ}{JF} = \frac{2}{3}$$

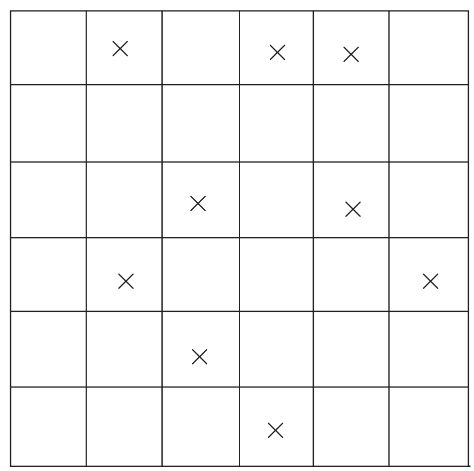
(Ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng), gọi E, F, P, Q tương ứng là các trung điểm của AB, BC, CD, DA.Gọi J_1, J_2, J_3, J_4 là các điểm sao cho J_1, J_2 nằm trên EF, J_3, J_4 nằm trên PQ và thoả mãn:

$$\frac{EJ_1}{J_1F} = \frac{FJ_2}{J_2E} = \frac{PJ_3}{J_3Q} = \frac{QJ_4}{J_4P} = \frac{2}{3}.$$

Khi đó từ lập luận trên suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thoả mãn yêu cầu đề bài phải đi qua một trong bốn điểm J_1, J_2, J_3, J_4 nói trên. Vì có chín đường thẳng, nên theo nguyên lí Dirichlet, phải tồn tại ít nhất một trong bốn điểm J_1, J_2, J_3, J_4 sao cho qua nó có ít nhất ba trong chín đường thẳng đã cho. Vậy có ít nhất ba đường thẳng trong số chín đường đã cho đi qua một điểm.$\square$

Ví dụ 2.6 Cho một bảng kích thước $2n \times 2n$ ô vuông. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô vuông bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

Lời giải:



Hình 2.7

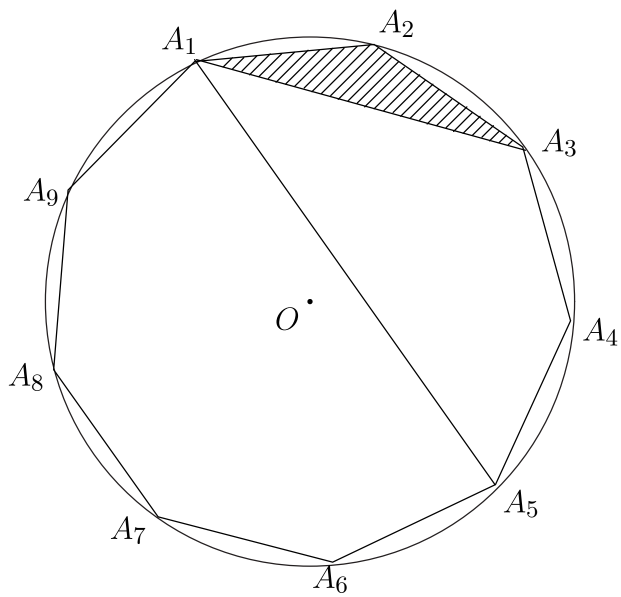
Chọn ra n hàng có chứa ô được đánh dấu nhiều trên hàng đó nhất. Ta chứng minh rằng số ô được đánh dấu còn lại nhỏ hơn hoặc bằng n. Giả sử trái lại không phải như vậy, tức là số ô được đánh dấu còn lại lớn hơn hoặc bằng $n+1$. Số các hàng còn lại chưa chọn là n. Vậy theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (trong số n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đánh dấu.

Chú ý rằng theo cách chọn thì n hàng đã chọn chứa số ô được đánh dấu nhiều trên hàng đó nhất. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất hai ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong số n hàng đã chọn đều có ít nhất hai ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn không có ít hơn $2n$ ô đã được đánh dấu. Nếu vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $2n + (n+1) > 3n$. Đó là điều vô lí (vì chỉ có $3n$ ô được đánh dấu). Vậy nhận xét được chứng minh.

Như vậy, sau khi đã chọn ra n hàng (với cách chọn như trên), theo nhận xét còn lại không quá n ô được đánh dấu. Vì thế có cùng lắm là có n cột chứa chúng. Vì lẽ đó sẽ không thấy ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột đã chọn.$\square$

Ví dụ 2.7 Cho hình đa giác đều chín cạnh. Mỗi đỉnh của nó được tô bằng một trong hai màu trắng hoặc đen. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác phân biệt có diện tích bằng nhau, mà các đỉnh của mỗi tam giác được tô cùng màu.

Lời giải:



Hình 2.8

Chín đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_9$ của đa giác đều được tô bằng hai màu trắng hoặc đen, nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất năm đỉnh trong số đó được tô cùng màu, năm đỉnh này tạo ra $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$ tam giác màu trắng (tam giác màu trắng là tam giác có ba đỉnh màu trắng). Gọi Ω là tập hợp các đỉnh của đa giác đã cho. Tức là

$$\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_9\}.$$

Gọi O là tâm của đa giác đều đã cho. Xét phép quay các góc:

$$0^0, 40^0, 80^0, 120^0, 160^0, 200^0, 240^0, 280^0, 320^0$$

xung quanh tâm O. Rõ ràng ứng với mỗi phép quay này thì tập Ω biến thành chính Ω (tức là tập các đỉnh của đa giác không thay đổi qua phép quay, mặc dù khi quay đỉnh này biến thành đỉnh kia).

Sau chín phép quay trên thì 10 tam giác trắng biến thành 90 tam giác trắng, mà mỗi tam giác này có các đỉnh thuộc tập hợp Ω. Chú ý rằng số tam giác khác nhau có đỉnh trong Ω là $C_9^3 = \dfrac{9!}{6!.3!} = 84$.

Vì $84 < 90$, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai tam giác trắng Δ_1, Δ_2 sao cho các phép quay tương ứng trùng với một tam giác. Vì phép quay bảo toàn hình dáng và độ lớn của hình (nói riêng bảo toàn diện tích), tức là $S_{\Delta_1} = S_{\Delta_2}$.□

Ví dụ 2.8 Chứng minh rằng trong mọi khối đa diện lồi tồn tại ít nhất hai mặt có cùng số cạnh.

Lời giải:

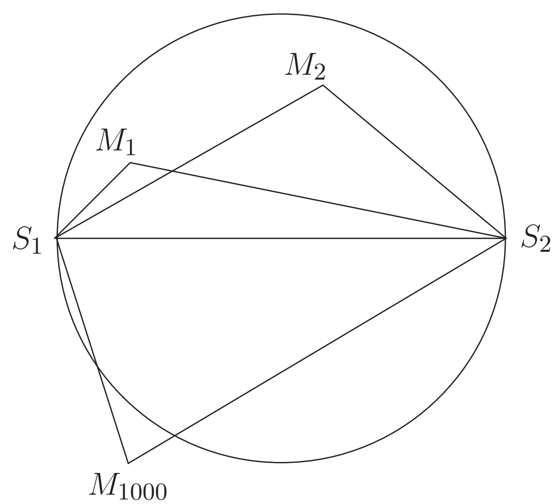
Kí hiệu M là số mặt có số cạnh lớn nhất của khối đa diện. Giả sử mặt M có k cạnh. Khi đó vì có k mặt có cạnh chung với M, nên đa diện có ít nhất $k+1$ mặt. Vì là mặt có số cạnh nhiều nhất bằng k, nên mọi mặt của đa diện có số cạnh nhận một trong các giá trị$\{3, 4, \ldots, k\}$.

Đa diện có ít nhất $k+1$ mặt,mà mỗi mặt số cạnh của nó nhận 1 trong $k-2$ giá trị. Vì thế theo nguyên lí Dirichlet suy ra có ít nhất hai mặt của đa diện có cùng số cạnh.□

Ví dụ 2.9 Cho 1000 điểm $M_1, M_2, \ldots, M_{1000}$ trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính 1 tuỳ ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho:

$$SM_1 + SM_2 + \cdots + SM_{1000} \geq 1000.$$

Lời giải:



Hình 2.9

Xét đường kính S_1S_2 tuỳ ý của đường tròn, ở đây S_1, S_2 là hai đầu của đường kính.Vì $S_1S_2 = 2$ nên ta có:

$$\begin{cases} S_1M_1 + S_2M_1 & \geq S_1S_2 = 2 \\ S_1M_2 + S_2M_2 & \geq S_1S_2 = 2 \\ \vdots & \\ S_1M_{1000} + S_2M_{1000} & \geq S_1S_2 = 2 \end{cases}$$

Cộng từng vế của 1000 bất đẳng thức trên ta có:

$$(S_1M_1 + S_1M_2 + \cdots + S_1M_{1000}) + (S_2M_1 + S_2M_2 + \cdots + S_2M_{1000}) \geqslant 2000. \quad (2.1)$$

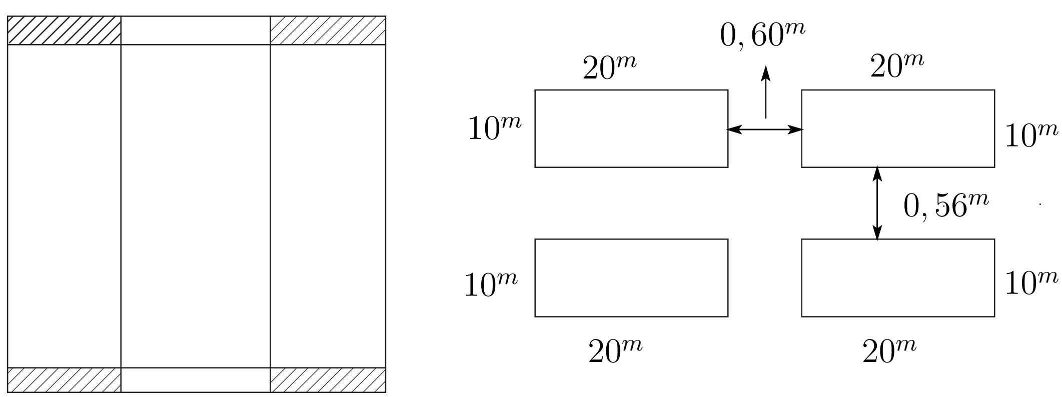
Từ (2.1) và theo nguyên lí Dirichlet suy ra trong hai tổng của vế trái của (2.1), có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000.Giả sử:

$$S_1M_1 + S_1M_2 + \cdots + S_1M_{1000} \geqslant 1000.$$

Khi đó lấy S = S_1.□

Ví dụ 2.10 Một khu rừng thông có dạng hình vuông, mỗi chiều dài $1000m$. Trong khu rừng có 4500 cây thông, cây to nhất đường kính $0,5m$. Chứng minh rằng trong khu rừng có ít nhất 60 mảnh đất, diện tích mỗi mảnh $200m^2$ không có một cây thông nào.

Lời giải:



Hình 2.10

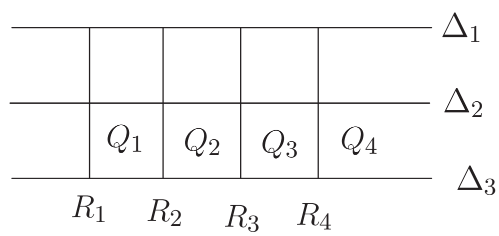
Để ý rằng: $1000m = 48.20m + 47.0,6m + 2.5,9m$ và $1000m = 95.10m + 94.0,52m + 2.0,56m$

Ta chia một cạnh của hình vuông thành 48 đoạn, mỗi đoạn $20m$, khoảng cách giữa hai đoạn là $0,6m$, ở hai đầu là hai đoạn $5,9m$. Cạnh còn lại của hình vuông chia thành 95 đoạn, mỗi đoạn dài $10m$, khoảng cách gữa hai đoạn là $0,56m$, ở hai đầu là hai đoạn $0,56m$.

Ta có tất cả $45 \times 95 = 4560$ mảnh có diện tích $200m^2$. Vì chỉ có 4500 cây thông, và do mỗi cây thông có đường kính $0,5m, (0,5 < 0,52 < 0,6)$, do đó mỗi cây thông bất kì không thể chiếm chỗ hai mảnh, vì lí do đó, theo nguyên lí Dirichlet còn ít nhất 60 mảnh (mỗi mảnh có diện tích $200m^2$), mà trong mỗi mảnh ấy không có một cây thông nào. □

Ví dụ 2.11 Mỗi điểm trong mặt phẳng được bôi bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng ta luôn tạo ra được một hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu.

Lời giải:



Hình 2.11

Vẽ ba đường thẳng song song $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$,$(\Delta_1 // \Delta_2 // \Delta_3)$. Lấy trên Δ_1 bất kì bẩy điểm. Vì mỗi điểm chỉ được bôi bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ, nên theo nguyên lí Dirichlet trên Δ_1 luôn tồn tại bốn điểm cùng màu. Không giảm tổng quát có thể cho đó là các điểm P_1, P_2, P_3, P_4 cùng màu đỏ. Gọi Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 là hình chiếu vuông góc của P_1, P_2, P_3, P_4 xuống Δ_2 và R_1, R_2, R_3, R_4 là hình chiếu vuông góc củaP_1, P_2, P_3, P_4 lên Δ_3.

Chỉ có các khả năng sau xảy ra:

1. Nếu tồn tại hai trong bốn điểm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 màu đỏ, (giả sử là Q_i, Q_j). Khi đó $P_jQ_jQ_iP_i$ là hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng đỏ.

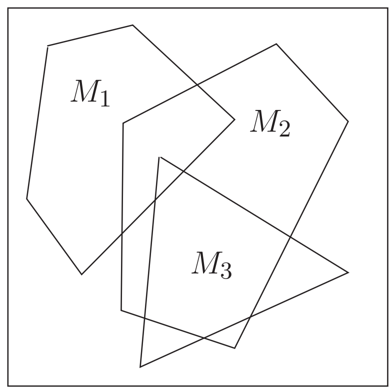
2. Nếu tồn tại hai trong bốn điểm R_1, R_2, R_3, R_4 màu đỏ (giả sử R_i, R_j). Khi đó $P_iP_jR_iR_j$ là hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng đỏ.

3. Bốn điểm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 và bốn điểm R_1, R_2, R_3, R_4 trong đó tối đa chỉ có một điểm đỏ. Khi đó rõ ràng theo nguyên lí Dirichlet tồn tại i, j mà Q_i, Q_j, R_i, R_j cùng xanh.

Vậy $Q_iQ_jR_iR_j$ là hình chữ nhật có bốn đỉnh màu xanh.□

Ví dụ 2.12 Trong hình vuông có diện tích bằng 6 đặt ba đa giác có diện tích bằng 3. Chứng minh rằng luôn tìm được hai đa giác mà mà diện tích phần chung của chúng không nhỏ hơn 1.

Lời giải:



Hình 2.12

Gọi ba đa giác là M_1, M_2, M_3. Kí hiệu $|A|$ là diện tích của hình phẳng A. Khi đó ta có:

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - (|M_1 \cap M_2| + |M_2 \cap M_3| + |M_3 \cap M_1|) + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| \quad (2.2)$$

Theo giả thiết ta có:

$$|M_1| = |M_2| = |M_3| = 3. \quad (2.3)$$

Để ý rằng $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ nằm trong hình vuông có diện tích bằng 6, nên từ (2.2) và (2.3) ta có bất đẳng thức sau:

$$6 \geqslant 9 - (|M_1 \cap M_2| + |M_2 \cap M_3| + |M_3 \cap M_1| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|)$$

hay

$$|M_1 \cap M_2| + |M_2 \cap M_3| + |M_3 \cap M_1| \geqslant 3 + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| \quad (2.4)$$

Do$|M_1 \cap M_2 \cap M_3| \geqslant 0$ nên từ (2.4)ta có:

$$|M_1 \cap M_2| + |M_2 \cap M_3| + |M_3 \cap M_1| \geqslant 3 \quad (2.5)$$

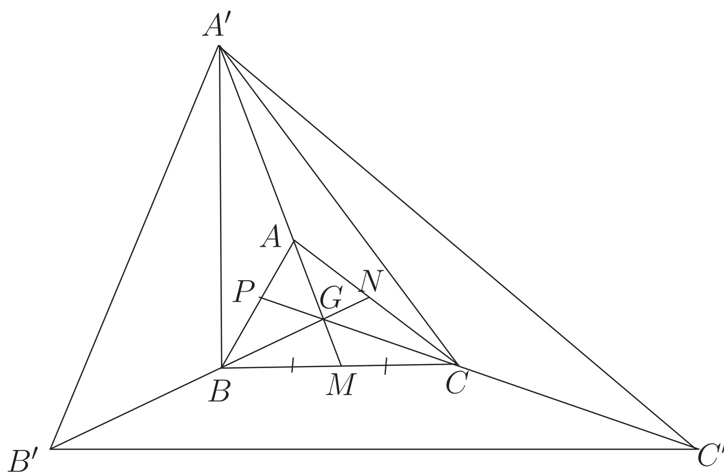
Từ (2.5) theo nguyên lí Dirichlet suy ra tồn tại ít nhất một trong ba số

$$|M_1 \cap M_2|\,, |M_2 \cap M_3|\,, |M_3 \cap M_1|$$

lớn hơn hoặc bằng 1. Giả sử $|M_1 \cap M_2| \geqslant 1$. Điều đó có nghĩa là hai đa giác M_1, M_2 có diện tích phần chung không nhỏ hơn 1.□

Ví dụ 2.13 Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Lời giải:



Hình 2.13

Lấy 5 điểm tuỳ ý sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng hai màu để tô các đỉnh, mà theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu. Giả sử đó là ba điểm A, B, C màu đỏ. Như vậy tam giác ABC với ba đỉnh màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu G màu đỏ, khi đó A, B, C, G cùng đỏ và bài toán được giải quyết xong.

2. Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn $AA^{'}, BB^{'}, CC^{'}$ sao cho $AA^{'} = 3GA, BB^{'} = 3GB, CC^{'} = 3GC$. Khi đó, nếu gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của BC, CA, AB thì $AA^{'} = 3GA = 6GM \Rightarrow AA^{'} = 2AM$. Tương tự $BB^{'} = 2BN, CC^{'} = 2CP$. Do đó tam giác $A^{'}BC, B^{'}CA, C^{'}AB$ tương ứng nhận A, B, C làm trọng tâm. Mặt khác, ta cũng có các tam giác ABC và $A^{'}B^{'}C^{'}$ có cùng trọng tâm G. Có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

(a) Nếu $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ có cùng màu xanh, khi đó tam giác $A^{'}B^{'}C^{'}$ và trọng tâm G cùng màu xanh.

(b) Nếu ít nhất một trong các điểm $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ màu đỏ. Không giảm tổng quát, giả sử $A^{'}$ đỏ. Khi đó tam giác $A^{'}BC$ và trọng tâm A màu đỏ.

Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.□

Ví dụ 2.14 Một hình lập phương có cạnh bằng 15 chứa 11000 điểm. Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính 1 chứa ít nhất 6 điểm trong số 11000 điểm đã cho.

Lời giải:

Chia mỗi cạnh của hình lập phương thành 13 phần bằng nhau. Như thế hình lập phương đã cho được chia thành $13^3 = 2197$ hình lập phương nhỏ. Do $11000 > 5.2197 = 10985$, nên tồn tại ít nhất một hình lập phương nhỏ, mà hình lập phương này chứa ít nhất 6 điểm. Như đã biết, nếu gọi cạnh của hình lập phương này là a, thì hình cầu ngoại tiếp có bán kính là R,với $R = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}$. Vì thế hình cầu ngoại tiếp hình lập phương nhỏ (cạnh của có là $\frac{15}{13}$), là:

$$R = \frac{1}{2}.\frac{15}{13}.\sqrt{3} = \frac{1}{2}.\sqrt{3.\frac{225}{169}} = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{675}{169}} < \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{676}{169}} = \frac{1}{2}.\sqrt{4} = 1.$$

Hình cầu này dĩ nhiên chứa ít nhất 6 điểm trong số 11000 điểm đã cho.□

Ví dụ 2.15 Trong hình vuông cạnh 1 đơn vị có một đường gấp khúc L không tự cắt với độ dài lớn hơn 1000. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng m song song với cạnh hình vuông và đường L tại hơn 500 điểm.

Lời giải:

Giả sử l_i là độ dài mắt thứ i của đường gấp khúc, a_i, b_i là độ dài hình chiếu của nó lên các cạnh hình vuông. Khi đó $l_i \leq a_i + b_i$. Suy ra:

$$1000 = l_1 + l_2 + \cdots + l_n \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$

tức là $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant 500$ hoặc $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqslant 500$. Nếu tổng độ dài hình chiếu của các mắt lên 1 cạnh độ dài 1 không nhỏ hơn 500, thì theo nguyên lí Dirichlet cho độ dài đoạn thẳng phải có điểm chung cho hơn 500 hình chiếu của các mắt gấp khúc, tức là đường vuông góc kẻ từ điểm chung đó sẽ cắt đường gấp khúc tại ít nhất 500 điểm.□

Ví dụ 2.16 Bên trong đường tròn bán kính n đặt $4n$ đoạn thẳng có độ dài 1. Chứng minh rằng có thể kẻ một đường thẳng song song hoặc vuông góc với đường thẳng l cho trước và cắt ít nhất 2 đoạn thẳng đã cho.

Lời giải:

Giả sử l_i là đường thẳng bất kì vuông góc với l. Kí hiệu độ dài các hình chiếu của đoạn thẳng thứ i lên các đường thẳng l và l_i là $a_i$và b_i tương ứng. Bởi độ dài mỗi đoạn thẳng bằng 1 nên $a_i + b_i \geqslant 1$. Do đó:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{4n}) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{4n}) \geqslant 4n.$$

Không mất tính tổng quát giả sử:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{4n}) \geqslant (b_1 + b_2 + \cdots + b_{4n}).$$

Khi đó $a_1 + a_2 + \cdots + a_{4n} \geqslant 2n$. Tất cả các đoạn thẳng đã cho đều được chiếu xuống đoạn thẳng có độ dài $2n$, bởi vì chúng đều nằm trong đường tròn bán kính n. Nếu như các hình chiếu của các đoạn thẳng đã cho lên đường thẳng l không có điểm chung, thì sẽ có bất đẳng thức $a_1 + a_2 + \cdots + a_{4n} < 2n$. Do đó trên l phải có một điểm bị các điểm của ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đã cho chiếu lên nó. Đường vuông góc với l tại điểm đó sẽ cắt ít nhất hai đoạn thẳng đã cho.□

Ví dụ 2.17 Trên đoạn thẳng có độ dài 1 ta tô một số đoạn thẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm được tô bất kì không bằng $0,1$. Chứng minh rằng tổng độ dài các đoạn thẳng được tô không lớn hơn $0,5$.

Lời giải:

Chia đoạn thẳng ra làm 10 đoạn thẳng có độ dài $0,1$, đặt chúng theo một cột và chiếu xuống một đoạn thẳng như vậy. Bởi vì khoảng cách giữa hai điểm được tô bất kì không bằng $0,1$, nên các điểm được tô của các đoạn thẳng cạnh nhau không thể cùng chiếu xuống 1 điểm. Do đó không có điểm nào có thể là hình chiếu của các điểm được tô nhiều hơn 5 đoạn thẳng. Suy ra tổng độ dài các hình chiếu của các đoạn thẳng được tô không lớn hơn $5 \times 0,1 = 0,5$.□

Ví dụ 2.18 Chứng minh rằng nếu một đường thẳng l nằm trong mặt phẳng của tam giác ABC và không đi qua đỉnh nào của tam giác đó, thì nó cắt không quá hai cạnh của tam giác đã cho.

Lời giải:

Kí hiệu α và $\overline{\alpha}$ là hai nửa mặt phẳng do l chia mặt phẳng của tam giác ABC. Mỗi đỉnh A, B và C nằm trong một nửa mặt phẳng trên. Theo nguyên lí Dirichlet ít nhất một trong hai nửa mặt phẳng trên, chẳng hạn như α, chứa hai đỉnh của tam giác ABC, chẳng hạn như A và B. Khi đó đường thẳng l không cắt đoạn thẳng AB, nghĩa là nó không cắt một trong ba cạnh của tam giác ABC.□

Ví dụ 2.19 Những điểm trong mặt phẳng được sơn bằng một trong ba màu. Chứng minh rằng luôn tìm được hai điểm cùng màu cách nhau đúng bằng 1.

Lời giải:

Giả sử hai điểm bất kì cách nhau 1 được sơn bằng các màu khác nhau. Xét tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Tất cả các đỉnh của tam giác được tô bằng các màu khác nhau. Giả sử điểm A_1 đối xứng với A qua đường thẳng BC. Bởi vì $A_1B = A_1C = 1$, nên điểm A_1 có màu khác với màu của B và C, tức là nó được tô cùng màu với điểm A. Các lập luận đó thực chất chỉ ra rằng nếu $AA_1 = \sqrt{3}$, thì các điểm A và A_1 được tô cùng màu. Do đó tất cả các điểm nằm trên đường tròn tâm A bán kính $\sqrt{3}$ có cùng một màu. Rõ ràng trên đường tròn đó luôn tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng bằng 1.

Ta được mâu thuẫn, vậy luôn tìm được hai điểm cùng màu có khoảng cách giữa chúng bằng 1.□

Ví dụ 2.20 Cho 11 điểm khác nhau trong hình cầu thể tích V.Chứng minh rằng qua tâm của hình cầu có thể dựng hai mặt phẳng sao cho chúng cắt hình cầu thành một "miếng" với thể tích $\dfrac{V}{6}$, mà phần trong của nó không chứa trong phần trong bất cứ một điểm nào đã cho.

Lời giải:

Chia hình cầu thành hai bán cầu bằng một mặt phẳng đi qua tâm và hai điểm từ các điểm đã cho. Một bán cầu chứa trong phần trong nhiều nhất là 4 điểm từ các điểm còn lại. Chia nửa hình cầu bằng hai mặt phẳng, mà mỗi mặt phẳng đi qua tâm hình cầu và hai điểm trong 4 điểm còn lại. Như vậy nửa hình cầu chia làm ba "miếng"không chứa điểm nào bên trong, ít nhất thể tích của một miếng lớn hơn $\dfrac{1}{3}$ thể tích của bán hình cầu.□

Ví dụ 2.21 Trong không gian cho 37 "điểm nguyên" và không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng chọn được từ đó ba điểm để trọng tâm của tam giác lập thành từ ba điểm này cũng là điểm nguyên.

Lời giải:

Mỗi "điểm nguyên" $(x; y; z)$ trong không gian cho tương ứng với bộ ba:

$$(g(x); g(y); g(z)),\ \text{ở đây } g(x); g(y); g(z)$$

tương ứng là các số dư trong phép chia cho 3 của x, y, z.

Vì $g(x) \in \{0,1,2\}$, nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất 13 điểm (trong số 37 điểm) có cùng giá trị $g(x)$.Lấy 13 điểm trong số các điểm này. Giả sử chúng là $(x_1; y_1; z_1), \ldots, (x_{13}; y_{13}; z_{13})$ và ta có $g(x_1) = g(x_2) = \cdots = g(x_{13})$.

Để ý rằng $g(y_i) \in \{0,1,2\}, \forall i = \overline{1,13}$, nên lại theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất 5 điểm (trong số 13 điểm đã nêu trên) có cùng giá trị $g(y)$. Lấy 5 điểm trong số các điểm này.

Giả sử chúng là:

$$(\overline{x_1}; \overline{y_1}; \overline{z_1}), \ldots, (\overline{x_5}; \overline{y_5}; \overline{z_5}),$$

ở đây:

$$\begin{cases} g(\overline{x_1}) = g(\overline{x_2}) = \cdots = g(\overline{x_5}) \\ g(\overline{y_1}) = g(\overline{y_2}) = \cdots = g(\overline{y_5}) \end{cases}$$

Lại có $g(\overline{z_1}) \in \{0,1,2\}, \forall i = \overline{1,5}$, chỉ xảy ra hai trường hợp sau :

1. Tồn tại ba điểm trong chúng, giả sử $g(\overline{z_1}) = 0; g(\overline{z_2}) = 1; g(\overline{z_3}) = 2$ thế thì ba điểm $(\overline{x_1}; \overline{y_1}; \overline{z_1}); (\overline{x_2}; \overline{y_2}; \overline{z_2}); (\overline{x_3}; \overline{y_3}; \overline{z_3})$ đều có:

$$\begin{cases} g(\overline{x_1}) + g(\overline{x_2}) + g(\overline{x_3}) \vdots 3 \\ g(\overline{y_1}) + g(\overline{y_2}) + g(\overline{y_3}) \vdots 3 \\ g(\overline{z_1}) + g(\overline{z_2}) + g(\overline{z_3}) \vdots 3 \end{cases}$$

   Vì thế tam giác với ba đỉnh này rõ ràng có trọng tâm là "điểm nguyên".

2. Nếu năm giá trị $g(\overline{z_i}), \forall i = \overline{1,5}$ chỉ nhận không qua hai trong ba giá trị $\{0,1,2\}$. Khi đó theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất ba điểm có cùng giá trị $g(z)$.

   Bây giờ ta thu được ba điểm $(\widetilde{x_1}; \widetilde{y_1}; \widetilde{z_1}), (\widetilde{2}; \widetilde{y_2}; \widetilde{z_2}), (\widetilde{x_3}; \widetilde{y_3}; \widetilde{z_3})$ mà:

$$\begin{cases} g(\widetilde{x_1}) = g(\widetilde{x_2}) = g(\widetilde{x_3}) \\ g(\widetilde{y_1}) = g(\widetilde{y_2}) = g(\widetilde{y_3}) \\ g(\widetilde{z_1}) = g(\widetilde{z_2}) = g(\widetilde{z_3}) \end{cases}$$

Tam giác thu được có trọng tâm là "điểm nguyên".□

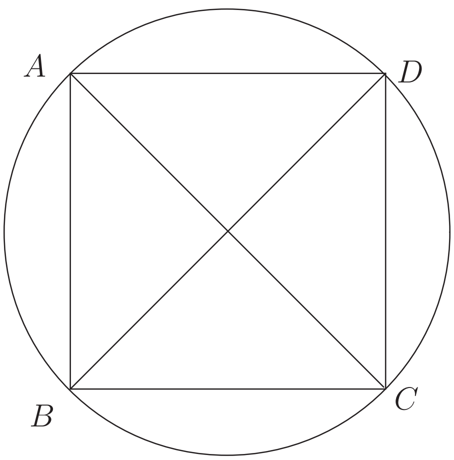
Ví dụ 2.22 Cho đa giác đều 100 cạnh nội tiếp trong đường tròn $(\mathfrak{C})$. Mỗi đỉnh được gán một trong các số $1, 2, 3, \ldots, 49$. Chứng minh rằng trên $(\mathfrak{C})$ tồn tại hai cung AB và CD với các tính chất sau:

1. Các điểm A, B, C, D là các đỉnh của đa giác đều đã cho.

2. Các dây cung AB và CD song song với nhau.

3. Nếu A, B, C, D được gắn tương ứng với các số a, b, c, d thì $a + b = c + d$.

Lời giải:



Hình 2.14

Vì đa giác đều 100 cạnh nội tiếp trong $(\mathfrak{C})$, nên có đúng 50 đường kính khác nhau mà các đầu mút của các đường kính này đều là các đỉnh của đa giác đều 100 cạnh cho trước. Giả sử AB là một trong các đường kính ấy và giả sử A tương ứng với số a, B tương ứng với số b. Bây giờ ta gán cho đường kính AB số $|a - b|$. Do $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 49\}$ nên dễ thấy: $0 \leq |a - b| \leq 48$.

Như vậy mỗi một trong 50 đường kính vừa xét tương ứng với một trong các số $1, 2, \dots, 48$. Theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai đường kính (trong số 50 đường kính) được đặt tương ứng với cùng một số. Không giảm tổng quát có thể cho đó là đường kính AC và BD. Cũng không giảm tổng quát có thể cho là các đỉnh A, B, C, D tương ứng với các số a, b, c, d, trong đó $c \leq a$ và $b \leq d$ (Nếu không phải như thế thì chỉ việc đổi tên các đầu mút của đường kính).

Theo giả thiết thì đường kính AC ứng với số $a - c$, còn đường kính BD ứng với số $d - b$.
Từ: $a - c = d - b \Rightarrow a + b = c + d$.

Rõ ràng $ABCD$ là hình chữ nhật, do đó $AB//CD$.□

Ví dụ 2.23 Cho dãy vô hạn các số tự nhiên $u_1, u_2, \ldots$ được xác định theo công thức truy hồi sau:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n - n + 1, n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Giả sử n là số tự nhiên bất kì và tập M gồm u_n điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối hai điểm khác nhau trong M được tô bằng một trong n màu cho trước. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong M là đỉnh của một tam giác cùng màu.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

- Với $n = 1$, ta có $u_1 = 3$ và kết luận của bài toán hiển nhiên đúng (vì ở đây chỉ có 1 màu do $n = 1$).

  Với $n = 2$, ta có $u_2 = 2u_1 - 1 + 1 = 6$. Ta có bài toán với 6 điểm và dùng 2 màu. Bài toán này đã được giải (xem ví dụ 2.1). Vậy kết luận cũng đúng khi $n = 2$.

- Giả sử kết luận của bài toán đúng với n, tức là nếu tập M gồm u_n điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và dùng n màu để tô các đoạn thẳng. Khi đó tồn tại tam giác cùng màu.

- Xét với $n + 1$, tức là tập M gồm u_{n+1} điểm bất kì (không có ba điểm nào thẳng hàng), và dùng $n + 1$ màu để tô các đoạn thẳng.

  Lấy A là một trong các điểm của tập M. Điểm này có thể nối với $u_{n+1} - 1$ điểm còn lại của tập M bằng $u_{n+1} - 1$ đoạn thẳng bôi màu. Theo công thức xác định dãy ta có:

  $$u_{n+1} - 1 = (n+1)u_n - n + 1 - 1 = (n+1)(u_n - 1) + 1. \qquad (2.6)$$

  Từ (2.6) theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất u_n đoạn thẳng có chung đỉnh A được bôi màu.Giả sử $AB_1, AB_2, \ldots, ABu_n$ được bôi cùng màu và giả sử đó là màu α, thì tam giác AB_iB_j cùng màu α, (α thuộc vào một trong $n + 1$ màu đã cho).

  Có các khả năng sau xảy ra:

1. Nếu một trong các đoạn thẳng $B_iB_j (i \neq j, 1 \leq i < j \leq u_n)$ được bôi màu α, thì tam giác AB_iB_j cùng màu α. Bài toán đã được giải xong trong trường hợp $n + 1$.

2. Các đoạn thẳng $B_iB_j, 1 \leq i < j \leq u_n$ có màu khác với α. Xét u_n điểm $B_1, B_2, \ldots, B_{u_n}$. Rõ ràng không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng. Chúng dùng tối đa $(n + 1) - 1 = n$ màu để tô (do không dùng màu α). Theo giả thiết quy nạp tồn tại tam giác cùng màu.

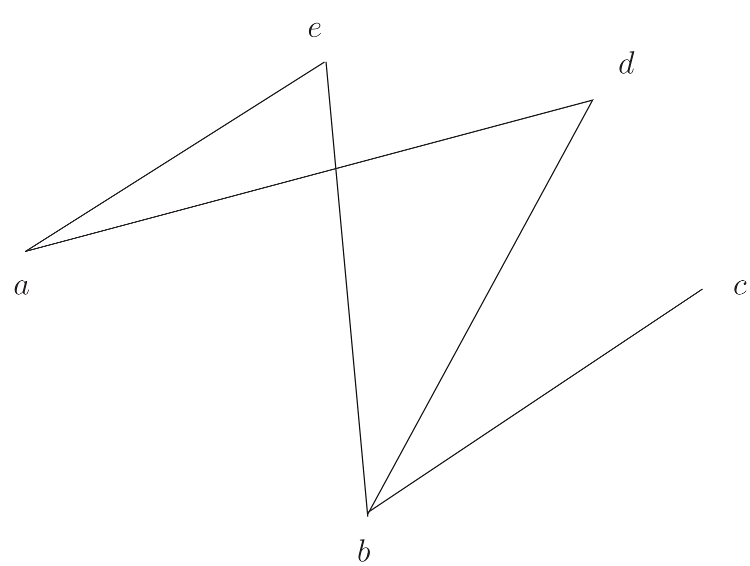
Vậy kết luận của bài toán cũng đúng với $n + 1$.$\square$

Ví dụ 2.24 Trong mặt phẳng, cho tập A gồm n điểm $(n \geq 2)$. Một số cặp điểm được nối với nhau bằng đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong tập A đã cho, có ít nhất hai điểm được nối với cùng số lượng các điểm khác thuộc A.

Lời giải:

Giả sử $a \in A$. Ta kí hiệu $S(a)$ là số lượng các điểm của A nối với a thành đoạn thẳng. Thí dụ trong hình vẽ bên thì:

$$S(a = 2), S(b) = 3, S(c) = 1, S(d) = 2, S(e) = 2$$



Hình 2.15

Bài toán trở thành: Chứng minh rằng tồn tại $a_1, a_2 \in A (a_1 \neq a_2)$, mà $S(a_1) = S(a_2)$. Rõ ràng với mọi $a \in A$ ta có:

$$0 \leq S(a) \leq n - 1. \tag{2.7}$$

Mặt khác dễ thấy không tồn tại hai điểm $\overline{a} \in A, \overline{b} \in A$ mà:

$$S(\overline{a}) = n - 1 \text{ và } S(\overline{b}) = 0. \tag{2.8}$$

Thật vậy, nếu có (2.8), thì từ $S(\overline{a}) = n - 1$, suy ra $\overline{a}$ nối với tất cả $n - 1$ điểm còn lại, nói riêng $\overline{a}$ phải nối với $\overline{b}$. Điều đó có nghĩa là $S(\overline{b}) \geq 1$ và dẫn đến mâu thuẫn với (2.8) (vì $S(\overline{b}) = 0$.)

Gọi S là tập hợp các giá trị mà các đại lượng $S(a)$ nhận, $a \in A$ tức là:

$$S = \left\{ m | m = S(a), a \in A \right\}.$$

Như vậy từ (2.7) suy ra tập S có tối đa n giá trị. Tuy nhiên từ (2.8) suy ra $n-1$ và 0 không đồng thời thuộc S, vì thế tập S tối đa nhận $n - 1$ giá trị. Theo nguyên lí Dirichlet suy ra tồn tại ít nhất $a_1 \in A, a_2 \in A (a_1 \neq a_2)$, mà $S(a_1) = S(a_2)$.□

Chương 3

Ứng dụng nguyên lí Dirichlet vào số học

Các bài toán số học thường rất khó khăn trong việc tìm lời giải. Tuy nhiên có một số lượng bài tập không nhỏ ta có thể sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải quyết rất hiệu quả, mà trình bày tương đối đơn giản và dễ hiểu. Sau đây là các ví dụ điển hình.

Ví dụ 3.1 Biết rằng 3 số $a, a = k, a + 2k$ đều là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng khi đó k chia hết cho 6.

Lời giải:

Do $a, a + k, a + 2k$ đều là các số nguyên tố lớn hơn 3, nên chúng đều là các số lẻ và không chia hết cho 3.

$$\text{Do } a \text{ và } a + k \text{ cùng lẻ nên } k = (a + k) - a \text{ sẽ chia hết cho 2.} \tag{3.1}$$

Do $a, a = k, a + 2k$ đều không chia hết cho 3, nên khi chia cho 3 ít nhất hai số có cùng số dư (theo nguyên Dirichlet). Chỉ có các khả năng sau xảy ra:

1. Nếu $a + k \equiv a(mod3)$ thì $(a + k) - a \equiv 0(mod3)$, suy ra $k \vdots 3$.

2. Nếu $a + 2k \equiv a = k(mod3)$ thì $(a + 2k) - (a + k) \equiv 0(mod3)$, suy ra $k \vdots 3$.

3. Nếu $a + 2k \equiv a(mod3)$ thì $(a + 2k) - a \equiv 0(mod3)$, suy ra $2k \vdots 3$. Do $(2, 3) = 1$ suy ra:
$$k \equiv 3. \tag{3.2}$$

Tóm lại trong mọi trường hợp ta đều thấy $k \equiv 3$. Lại do $(2,3) = 1$ nên từ (3.1) và (3.2) ta có $k \equiv 6$.□

Ví dụ 3.2 Cho 10 số nguyên dương $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$. Chứng minh rằng tồn tại các số $c_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = \overline{1, 10}$, không đồng thời bằng không sao cho số $\sum\limits_{i=1}^{10} c_i u_i$ chia hết cho 1023.

Lời giải:Xét tất cả các số có dạng

$$A_j = \sum_{i=1}^{10} b_i u_i,$$

trong đó $b_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, 10}$, $j = \overline{1, 1024}$.

Rõ ràng có tất cả $2^{10} = 1024$ số A_j, $j = \overline{1, 1024}$, như vậy. Khi chia 1024 số A_j này cho 1023 thì theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai số A_k, A_h, $k \neq h$ sao cho $A_k \equiv A_h (mod 1023)$.

Giả sử A_k và $A_h$có dạng sau: $A_k = \sum\limits_{i=1}^{10} b_{ki} u_i$ ở đây $b_{ki} \in \{0, 1\}$, $A_h = \sum\limits_{i=1}^{10} b_{hi} u_i$ ở đây $b_{hi} \in \{0, 1\}$

Ta có

$$A_k - A_h \vdots 1023 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} (b_{ki} - b_{hi}) u_i \vdots 1023.$$

Đặt $c_i = b_{ki} - b_{hi}$,$i = \overline{1, 10}$. Vì $b_{ki} \in \{0, 1\}$, $b_{hi} \in \{0, 1\}$ nên $c_i \in \{-1, 0, 1\}$, mặt khác do $A_k \neq A_h$ nên c_i không thể đồng thời bằng không, $\forall i = \overline{1, 10}$. Như thế ta đã chứng minh được sự tồn tại của 10 số $c_i \in \{-1, 0, 1\}$ không đồng thời bằng không, sao cho:

$$\sum_{i=1}^{10} c_i u_i \vdots 1023.\square$$

Ví dụ 3.3 Cho 5 số nguyên phân biệt tuỳ ý a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Xét tích:

$$P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_4 - a_5)$$

Chứng minh rằng $P \vdots 288$

Lời giải:

Ta có phân tích sau : $288 = 2^5.3^2$ và do $(2,3) = 1$ nên để chứng minh $P\vdots 288$ ta chỉ cần chứng minh đồng thời $P\vdots 2^5$ và $P\vdots 3^2$.

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong $n+1$ số nguyên tuỳ ý, luôn tồn tại hai số có hiệu chia hết cho n. Trong 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 có hai số có hiệu chia hết cho 3, không giảm tổng quát, có thể cho là: $a_1 - a_2 \vdots 3$. Bây giờ xét bốn số a_2, a_3, a_4, a_5 ta lại được hai số có hiệu cũng chia hết cho 3. Như thế trong tích P có ít nhất hai hiệu khác nhau cùng chia hết cho 3.

Do đó
$$P\vdots 3^2. \tag{3.3}$$

Lại theo nguyên lí Dirichlet trong 5 số đã cho có ít nhất ba số có cùng tính chẵn, lẻ. Chỉ có hai trường hợp sau xảy ra:

1. Nếu ít nhất có 4 số có cùng tính chẵn lẻ, thì từ 4 số này có thể lập nên 6 hiệu khác nhau cùng chia hết cho 2, do đó tích của chúng chia hết cho 2^6, nói riêng $P\vdots 2^5$.

2. Nếu có đúng 3 số có cùng tính chẵn lẻ. Không giảm tổng quát, có thể cho đó là a_1, a_2, a_3. Khi đó hai số còn lại a_4, a_5 cũng có tính chẵn lẻ giống nhau nhưng khác với tính chẵn lẻ của a_1, a_2, a_3. Vậy bốn hiệu sau đây cũng chia hết cho 2:
$$a_1 - a_2, a_1 - a_3, a_1 - a_4, a_2 - a_3, a_4 - a_5.$$
Mặt khác, trong 5 số đã cho có ít nhất hai hiệu chia hết cho 4, vì thế trong bốn số $a_1 - a_2, a_1 - a_3, a_2 - a_3, a_4 - a_5$ có ít nhất một hiệu chia hết cho 4. Do đó :
$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_4 - a_5)\vdots 2^5$$
tức là $P\vdots 2^5$.

Tóm lại trong mọi trường hợp ta luôn có
$$P\vdots 2^5. \tag{3.4}$$

Từ (3.3) và (3.4) ta suy ra $P\vdots 288$.□

Ví dụ 3.4 Cho a và m là hai số nguyên dương tuỳ ý. Chứng minh rằng các số dư của phép chia $a, a^2, a^3, \dots$ cho m lặp lại một cách tuần hoàn (có thể không bắt đầu từ đầu).

Lời giải:

Xét $m+1$ luỹ thừa đầu tiên:

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^m, a^{m+1}.$$

Khi chia một số nguyên dương bất kì cho m, thì các số dư phải thuộc tập hợp

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, m-1\}.$$

Vì thế theo nguyên lí Dirichlet, phải tồn tại hai trong số $m+1$ số trên chia cho m có cùng số dư. Nói cách khác, giả sử hai số đó là: a^k và $a^{k+1}, (k > 0)$, ta có:

$$a^k \equiv a^{k+1} (mod m) \tag{3.5}$$

Xét một số tự nhiên bất kì $n \geq k$. Từ (3.5) ta có:

$$a^k.a^{k+1} \equiv a^{k+1}.a^{n-k} (mod m)$$

hay với mọi $n \geq k$,ta luôn có:

$$a^n \equiv a^{n+1} (mod m). \tag{3.6}$$

Đẳng thức (3.6) chứng tỏ rằng bắt đầu từ vị trí a^k các số dư lặp lại tuần hoàn. Số l thường được gọi là chu kì tuần hoàn của các số dư khi chia các luỹ thừa của a cho m. □

Ví dụ 3.5 Chứng minh rằng có vô số số chia hết cho $19^{11^{1987}}$ mà trong biểu diễn thập phân của các số đó không có các chữ số $0, 1, 2, 3$.

Lời giải:

Gọi a là số tự nhiên mà trong biểu diễn thập phân của nó không chứa các chữ số $0, 1, 2, 3$. Rõ ràng các chữ số a như vậy là vô hạn. Ta xét dãy số sau đây:

$$\overline{a}, \overline{aa}, \overline{aaa}, \ldots, \underbrace{\overline{aaaa\ldots a}}_{19^{11^{1987}}+1}.$$

Đem chia $19^{11^{1987}}+1$ số khác nhau này cho $19^{11^{1987}}$. Theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất hai số khi chia cho $19^{11^{1987}}$ cho cùng số dư. Giả sử hai số đó là:

$$\underbrace{\overline{aaa\ldots a}}_{n \text{ số}}, \underbrace{\overline{aaa\ldots a}}_{m \text{ số}}, \quad (n > m).$$

Như vậy:

$$\underbrace{\overline{aaa\ldots a}}_{n\text{ số}} - \underbrace{\overline{aaa\ldots a}}_{m\text{ số}} \vdots 19^{11^{1987}}$$

hay:

$$\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{(n-m)\text{ số}}\underbrace{000\ldots 0}_{m\text{ số}}} \vdots 19^{11^{1987}}. \quad (3.7)$$

Vì $(10, 19) = 1$ nên $(10^{mk}, 19^{11^{1987}}) = 1$, suy ra

$$\underbrace{aaa\ldots a}_{(n-m)\text{ số}} \vdots 19^{11^{1987}}. \quad (3.8)$$

Do a là vô số, nên từ (3.8) suy ra tồn tại vô số số chia hết cho $19^{11^{1987}}$ mà trong biểu diễn thập phân của chúng không có các số $0, 1, 2, 3.\square$

Ví dụ 3.6 Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn luôn chọn ra được 6 số, gọi là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ sao cho

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6) \vdots 1800.$$

Lời giải:

Vì ba số nguyên tố đầu tiên là $2, 3, 5$, do đó trong 12 số nguyên tố phân biệt đã cho luôn có ít nhất 9 số lớn hơn 5. Vì là số nguyên tố lớn hơn 5 nên:

1. Chín số trên khi chia cho 3 có dư 1 hoặc 2. Theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ít nhất 5 số đồng dư với nhau theo mod 3. Năm số này lại không chia hết cho 5. Vì thế trong năm số ấy lại có ít nhất hai số mà ta có thể giả sử là a_1, a_2 sao cho $a_1 \equiv a_2(\mod 5)$. Ngoài ra dĩ nhiên ta có $a_1 \equiv a_2(\mod 3)$. Từ đó ta có $a_1 - a_2 \vdots 15$.

   Mặt khác, a_1, a_2 cùng lẻ nên $a_1 - a_2 \vdots 2$. Do $(2, 15) = 1$ nên suy ra $a_1 - a_2 \vdots 30$.

2. Xét 7 số còn lại : Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại bốn số đồng dư với nhau theo mod 3. Đem 4 số này chia cho 5 có hai khả năng xảy ra:

   (a) Nếu có hai số chẳng hạn (gọi là a_3, a_4) mà $a_3 \equiv a_4 (mod 5)$. Từ đó suy ra $a_3 - a_4 \vdots 5$. Rõ ràng $a_3 - a_4 \vdots 3$ và $a_3 - a_4 \vdots 2$. Vì $(5, 3, 2) = 1$ nên ta có $a_3 - a_4 \vdots 30$. Lấy hai số a_5, a_6 bất kì (ngoài a_1, a_2, a_3, a_4 đã chọn) thì do a_5, a_6 lẻ (do nguyên tố), nên $a_5 + a_6 \vdots 2$. Từ đó suy ra:

   $$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6) \vdots 30.30.2 = 1800$$

(b) Nếu 4 số này khi chia cho 5 các số dư khác nhau là $\{1, 2, 3, 4\}$.
Giả sử $a_5 \equiv 1(mod5)$, $a_6 \equiv 4(mod5)$ thì ta có:

$$a_5 + a_6 \equiv 5(mod5), \text{ suy ra } a_5 + a_6 \vdots 5$$

Với hai số còn lại a_3, a_4 thì rõ ràng $a_3 - a_4 \vdots 3$ (theo cách chọn 4 số trên). Do a_3, a_4, a_5, a_6 lẻ nên $a_5 + a_6 \vdots 2$,$a_3 - a_4 \vdots 2$. Từ đó suy ra $a_5 + a_6 \vdots 10$ và $a_3 - a_4 \vdots 6$.Vậy:

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6) \vdots 30.10.6 = 1800.$$

Tóm lại, luôn tồn tại $a_1, a_2, \ldots, a_6$ phân biệt sao cho:

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6) \vdots 1800. \square$$

Ví dụ 3.7 Từ một số nguyên dương, ta tác động hai phép toán sau đây:

1. Nhân nó với một số nguyên dương tuỳ ý.

2. Xoá bỏ các chữ số không trong biểu diễn thập phân của nó.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có thể thực hiện một dãy những phép toán như trên để biến n thành một số có một chữ số.

Lời giải:

Ta có nhận xét sau:

"Với mọi số nguyên dương k, đều có ít nhất một bội số có dạng: $111\ldots100\ldots0$". Nhận xét được chứng minh như sau:

Xét $k + 1$ số sau:

$$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots11}_{k+1}$$

Theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai số trong chúng khi chia cho k có cùng phần dư. Hiệu hai số này sẽ chia hết cho k và rõ ràng hiệu đó có dạng:

$$111\ldots100\ldots0.$$

Nhận xét được chứng minh.Trở lại bài toán ta đang xét,ta có bổ đề sau:

Bổ đề 3.1 Với mọi số nguyên n cho trước,bằng một số hữu hạn lần thực hiện hai phép toán như trên ta có thể đưa n về số có dạng: $111\ldots1$.

Chứng minh:

Vì n là số nguyên dương, nên theo nhận xét trên tồn tại số $\alpha = 111\ldots10\ldots0$ mà $\alpha \vdots n$. Đặt $\alpha = k.n \Rightarrow k$ nguyên dương. Ta tiến hành các phép toán như sau:

1. Nhân số n với số k, khi đó n biến thành số $\alpha = 111\ldots10\ldots0$.
2. Xoá bỏ các số 0, khi đó n biến thành $111\ldots1$.

Bổ đề được chứng minh.

Như vậy cho trước số n,bằng phép toán trên ta đưa n về số có dạng $111\ldots1$.

1. Ta nhân số $111\ldots1$ với 82 và được số $911\ldots102$.
2. Thực hiện phép xoá số 0 ta được số: $911\ldots12$.
3. Thực hiện phép nhân số này với 9 ta được số:$820\ldots008$.
4. Thực hiện phép xoá số 0 ta được số: 828.
5. Thực hiện phép nhân số này với 25 ta được số: 20700.
6. Thực hiện phép xoá số 0 ta được số: 27.
7. Thực hiện phép nhân số này với 4 ta được số: 108.
8. Thực hiện phép xoá số 0 ta được số: 18.
9. Thực hiện phép nhân số này với ta được số: 90.
10. Thực hiện phép xoá số 0 ta được số: 9.

Vì số 9 là số có một chữ số và phép toán dừng lại ở đây.

Như vậy với một số nguyên dương tuỳ ý ta luôn có thể thực hiện một dãy hữu hạn những phép toán đã cho để biến n thành số có một chữ số.□

Ví dụ 3.8 Xét tập M gồm 2003 số nguyên dương phân biệt sao cho không có số nào trong chúng có ước nguyên tố lớn hơn 23. Chứng minh rằng M chứa một tập hợp con gồm 4 phần tử mà tích của 4 phần tử này là luỹ thừa bậc 4 của một số nguyên.

Lời giải:

Vì chỉ có 9 số nguyên tố không lớn hơn 23 là:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23.$$

Vì thế trong mỗi phần tử k của tập hợp M (từ giả thiết) đều có dạng:

$$k = p_1^{k1}.p_2^{k2}.\ldots.p_9^{k9}. \qquad (3.9)$$

Ở đây k_i là các số nguyên không âm với mọi $i = \overline{1,9}$.Với mỗi phần tử k của tập hợp M ta gán tương ứng với một dãy $(x_1, x_2, \ldots, x_9)$, trong đó $x_i = 0$ nếu số mũ k_i của p_i trong (3.9) là chẵn và $x_i = 1$ nếu k_i lẻ. Tập hợp các dãy $(x_1, x_2, \ldots, x_9)$ trong đó $x_i = 1$, $i = \overline{1,9}$ gồm 2^9 phần tử.

Theo nguyên lí Dirichlet mọi tập hợp con chứa không ít hơn $2^9 + 1$ phần tử của M chứa ít nhất hai số nguyên phân biệt (ta gọi chúng là a_1, b_1), trong đó a_1, b_1 cùng ứng với một dãy $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_9}$ nào đó, tức là:

$$a_1 = p_1^{k1}.p_2^{k2}\ldots p_9^{k9},$$

$$b_1 = p_1^{k1'}.p_2^{k2'}\ldots p_9^{k9'}.$$

Do a_1, b_1 cùng ứng với một dãy chung $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_9}$ nào đó nên k_i, k_i' có cùng tính chẵn lẻ $\forall i = \overline{1,9}$. Từ đó ta có:

$$a_1b_1 = p_1^{k1+k1'}p_2^{k2+k2'}\ldots p_9^{k9+k9'} = c^2.$$

Nói cách khác đi ta lấy đi một cặp như thế từ tập M, thì còn lại $2003-2 > 2^9+1$ số.

Áp dụng lần nữa nguyên lí Dirichlet và tiếp tục lấy đi những cặp như thế cho đến khi còn lại $2^9 + 1$ số trong M.

Để ý rằng $2003 > 3(2^9 + 1)$, vì $3(269 + 1) = 1539$, nên ta có thể lấy đi $269 + 1$ cặp (a, b), lúc đó số còn lại của M vẫn là :

$$2003 - 2(2^9 + 1) = 977 > 513 = 2^9 + 1.$$

Xét 2^9+1 cặp lấy đi (ứng với mỗi cặp a_i, b_i) ta có $a_ib_i = c_i^2$. Ta có: $c_i = \sqrt{a_ib_i}$. Số c_i không thể chứa các thừa số nguyên tố khác $p_1, p_2, \ldots, p_9$ (do các a_i, b_i cũng như vậy). Vì vậy lại theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ít nhất một cặp (c_i, c_j) sao cho $c_i.c_j = d^2$, với d là các số nguyên, suy ra:

$$d^4 = c_i^2.c_j^2 = a_i.b_i.a_j.b_j.\square$$

Ví dụ 3.9 Cho trước 20 số tự nhiên $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{20}$ không vượt quá 70. Chứng minh rằng giữa các hiệu $a_j - a_k (j > k)$ luôn tìm được ít nhất 4 hiệu bằng nhau.

Lời giải:

Giả sử kết luận của bài toán không đúng, khi đó nói riêng trong 19 hiệu sau:

$$a_{20} - a_{19}, a_{19} - a_{18}, \ldots, a_3 - a_2, a_2 - a_1$$

không có bốn số nào bằng nhau. Do đó lại nói riêng trong 19 dãy số đó, mỗi số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có mặt không quá 3 lần.

Từ đó trong 19 số ấy phải lớn hơn 6 (thật vậy, nếu mọi số đều nhỏ hơn hoặc bằng 6, thì theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất 4 số bằng nhau). Một cách hoàn toàn tương tự, ta thấy ngay có 3 trong 18 số còn lại phải lớn hơn 5, 3 trong số 15 số còn lại phải lớn hơn 4, ... Vì thế:

$$(a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \cdots + (a_2 - a_1) \geq 7 + 3(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 70$$

Suy ra: $a_{20} - a_1 > 70$. Mặt khác:

$$1 \leq a_i \leq 70 \forall i = \overline{1, 20}.$$

nên:

$$a_{20} - a_1 \geq 70 - 1 = 69.$$

Ta nhận được mâu thuẫn. Vậy giả thiết phản chứng là sai.□

Ví dụ 3.10 Tập hợp các số $1, 2, 3, , \ldots, 100$ được chia thành 7 tập hợp con. Chứng minh rằng ít nhất ở một trong các tập con ấy tìm được 4 số a, b, c, d sao cho $a + b = c + d$ hoặc ba số e, f, g sao cho $e + f = 2g$.

Lời giải:

Theo nguyên lí Dirichlet suy ra có ít nhất một tập hợp con chứa không ít hơn 15 phần tử (vì nếu trái lại tất cả các tập con chứa không nhiều hơn $7.14 = 98$ phần tử. Do $98 < 100$ nên sẽ dẫn đến mâu thuẫn). Xét một cặp số (a, b) trong đó $a > b$ của tập hợp này.

Ứng với mỗi cặp (a, b) này ta xét hiệu $a - b$ (rõ ràng $a - b > 0$). Vì tập này có không ít hơn 15 phần tử, nên ta nhận được không ít hơn C_{15}^2 hiệu, (tức là không ít hơn 105 hiệu).

Do các số của tập con đều thuộc tập hợp $\{1, 2, \ldots, 100\}$ nên các hiệu nói trên thuộc tập hợp $\{1, 2, \ldots, 99\}$. Vì thế lại theo nguyên lí Dirichlet suy ra các hiệu trên phải có ít nhất hai hiệu bằng nhau. Giả sử hai hiệu đó tương ứng với hai cặp $(a, b), (c, d)$, $(a \neq c, (b \neq d))$, sao cho $b - a = d - c$. Từ đó ta có: $a + d = b + c$. Nếu $a = d$ (hoặc $b = c$; chú ý những sự bằng nhau khác không thể xảy ra do $a \neq c, b \neq d$), thì $b + c = 2a$ hoặc $d + a = 2b$. □

Ví dụ 3.11 Chứng minh rằng từ 52 số nguyên bất kì luôn có thể chọn ra được hai số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Lời giải: Tất cả các số dư trong phép chia cho 100, được chia thành từng nhóm như sau:

$$\{0\}, \{1, 99\}, \{2, 98\}, \ldots, \{49, 51\}, \{50\}.$$

Vì có tất cả 51 nhóm, mà lại có 52 số, nên theo nguyên lí Dirichlet giữa chúng phải có hai số mà các số dư trong phép chia cho 100 rơi vào một nhóm. Hai số này là hai số cần tìm vì nếu số dư của chúng bằng nhau thì hiệu của chúng chia hết cho 100, còn nếu số dư của chúng khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 100. □

Ví dụ 3.12 Chứng minh rằng từ tập hợp tuỳ ý gồm n số tự nhiên luôn tách ra được một tập hợp con (khác rỗng) chứa các số mà tổng của chúng chia hết cho n.

Lời giải:

Giả sử với một tập hợp nào đó chứa các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mà không thoả mãn khẳng định của bài toán.Khi đó không có số nào trong các số :

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

chia hết cho n. Vì số các số dư khác không trong phép chia cho n là $n - 1$, nên theo nguyên lí Dirichlet ta tìm được hai số S_i và $S_j (1 \leq i \leq j \leq n)$ có cùng số dư. Suy ra hiệu $S_i - S_j = a_{i-1} + \cdots + a_j$ chia hết cho n. Điều này mâu thuẫn với giả sử nói trên và khẳng định của bài toán được chứng minh.□

Ví dụ 3.13 Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số nguyên khác nhau trong khoảng $[100, 200]$, mà chúng thoả mãn:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 11100$$

Chứng minh rằng giữa các số này có ít nhất một số, mà viết nó ở dạng thập phân có ít nhất hai chữ số giống nhau.

Lời giải:

Chúng ta lập danh sách các số trong khoảng $[100, 200]$,mà chúng viết ở hệ thập phân ít nhất có hai chữ số trùng nhau:

$$100, 101, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119,$$
$$121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 199, 200.$$

Tổng của tất cả các số nói trên là 4050. Mặt khác tổng của tất cả các số nguyên trong khoảng $[100, 200]$ là: 15150.Nếu trong những số đã cho là: $a_1, \ldots, a_n$ không có số nào trong danh sách trên, thì $a_1 + a_2 + \ldots a_n < 15150 - 4050 = 11100$, điều này vô lí. Nghĩa là trong các số $a_1, \ldots, a_n$ có ít nhất một số viết ở cơ số 10 có ít nhất hai chữ số trùng nhau.□

Ví dụ 3.14 Cho M là tập hợp bất kì gồm 10 số tự nhiên, mỗi số không lớn hơn 100. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp con của M mà tổng của các phần tử trong chúng bằng nhau.

Lời giải:
Có thể chứng minh nếu tồn tại thoả mãn kết luận của bài toán, thì ta có thể chọn được hai tập con cùng tính chất ấy nhưng không giao nhau. Thật vậy, cho X, Y là hai tập con của M có tổng các phần tử bằng nhau. Chúng ta kí hiệu X_1 gồm các phần tử của X mà không thuộc Y. Tương tự như vậy Y_1 gồm các phần tử của Y mà không thuộc X. Rõ ràng X_1 và Y_1 có tổng các phần tử bằng nhau mà không giao nhau. Gọi A là tập hợp mọi tập hợp con khác rỗng của M. Số lượng phần tử của A là: $2^{10} - 1 = 1023$. Chúng ta xét tổng S các phần tử của một tập hợp con như vậy, rõ ràng :

$$S \leq 91 + 92 + \cdots + 100 < 10.100 = 1000.$$

Như vậy tồn tại không quá 1000 tổng khác nhau. Kí hiệu B là tập hợp tất cá các tổng như vậy. Do đó số lượng phần tử của B nhỏ hơn 1000 và nhỏ hơn số lượng phần tử của A. Đặt tương ứng mỗi phần tử của A với tổng các phần tử của nó. Ta thấy rằng có thể áp dụng nguyên lí Dirichlet ở đây. Suy ra tồn tại ít nhất hai tập con khác nhau có cùng một tổng các phần tử.□

Ví dụ 3.15 Chứng minh rằng tồn tại những số nguyên a, b và c không đồng thời bằng không và giá trị tuyệt đối của mỗi số không vượt quá 1000000, thoả mãn $\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < 10^{-11}$.

Lời giải:

Đặt S là tập hợp của 10^{18} số thực $r + s\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\forall r, s, t \in \{0, 1, 2, \ldots, 10^6 - 1\}$ và đặt $d = (1 + \sqrt{2} + d\sqrt{3}).10^6$.

Khi đó mỗi $x \in S$ thì $0 \leq x < d$.Chia đoạn này thành $10^8 - 1$ phần bằng nhau, mỗi đoạn nhỏ có độ dài $e = \dfrac{d}{10^8 - 1}$. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số trong 10^8 số của S nằm trong cùng một đoạn nhỏ. Hiệu của hai số này là $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ đó chính là các số a, b và c vì $e < \dfrac{10^7}{10^{18}} = 10^{-11}$.□

Ví dụ 3.16 Chứng minh rằng với một số tự nhiên bất kì ,tồn tại một số có dạng $\underbrace{111\ldots000}_{n}$ mà chia hết cho n.

Lời giải:

Chúng ta xét những số

$$1, 11, 111\ldots, \underbrace{111\ldots111}_{n \text{ số}}$$

và những số dư khi chia dãy số trên cho n. Vì dãy số đã cho gồm n phần tử, nên số dư dương khác nhau khi chia chúng cho n có $n - 1$ phần tử. Có thể giả thiết không có một số nào trong dãy trên chia hết cho n vì nếu ngược lại thì bài toán đã được giải. Khi đó sẽ có hai số trong chúng, ví dụ:

$$\underbrace{111\ldots111}_{k \text{ số}} \text{ và } \underbrace{111\ldots111}_{l \text{ số}}, (l > k)$$

mà khi chia chúng cho n sẽ cho cùng một số dư. Do đó:

$$l - k = \underbrace{111\ldots1}_{l-k \text{ số}}\underbrace{000\ldots0}_{k \text{ số}}$$

sẽ chia hết cho n.□

Ví dụ 3.17 Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng tồn tại một số có dạng $111\ldots11$ mà chia hết cho p.

Lời giải:

Ta xét dãy số :

$$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{p \text{ số}}.$$

Nếu trong dãy trên không có số nào chia hết cho p, thì ta cho tương ứng mỗi số với số dư của phép chia. Tập hợp các số dư chỉ có $1, 2, 3, \dots, p-1$ gồm $p-1$ phần tử (vì 0 không thể có trong tập này).

Nhưng vì chúng ta có p số ở dạng trên, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư. Giả sử các số đó là:

$$\underbrace{111\dots1}_{m \text{ số}} \text{ và } \underbrace{111\dots1}_{n \text{ số}}, (m > n).$$

Khi đó: $1 \leq n < m \leq p$. Vậy:

$$\underbrace{111\dots1}_{m \text{ số}} - \underbrace{111\dots1}_{n \text{ số}} = \underbrace{111\dots1}_{m-n \text{ số}}\underbrace{000\dots0}_{n \text{ số}} = \underbrace{111\dots1}_{m-n \text{ số}}.10^n.$$

tích này chia hết cho p vì $(p, 10) = 1$, suy ra $\underbrace{111\dots1}_{m-n \text{ số}}$ chi hết cho p và nó cũng nằm trong dãy trên. Mà $1 \leq m-n \leq p$ mâu thuẫn với giả thiết không có số nào trong dãy chia hết cho p.□

Ví dụ 3.18 Từ tập M chọn một cách bất kì $2^n + 1$ số .Chứng minh rằng tồn tại hai số trong tập vừa chọn mà tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải:

Nhận xét rằng mọi số tự nhiên

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

là số chính phương khi và chỉ khi tất cả các số mũ đều chẵn.Chúng ta biểu diễn mọi số đã chọn với dạng ở trên và cho tương ứng với bộ n -số:

$$(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}).$$

Ở đây

$$\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}$$

là các số dư của các số mũ tương ứng $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ khi chia cho 2.

Rõ ràng $\overline{\alpha_i} = 0$ hoặc $\overline{\alpha_i} = 1, \forall 1 = 1, 2, \dots, n$..

Vậy

$$(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n})$$

là bộ sắp thứ tự gồm n số 0 và 1.

Theo lý thuyết tổ hợp ,tất cả n -bộ như vậy có số lượng là 2^n, còn các số ta đang xét có số lượng là: $2^n + 1$. Như vậy ít nhất có hai số trong chúng có cùng bộ sắp xếp gồm số 0 và 1 giống nhau. Giả sử các số đó là: $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ và $y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ với chúng có:

$$(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}) = (\overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}, \dots, \overline{\beta_n}).$$

Đẳng thức sau cùng có nghĩa là :

$$\overline{\alpha_i} = \overline{\beta_i}, i = \overline{1, n}.$$

Do đó các số mũ $\overline{\alpha_i}$ và $\overline{\beta_i}$ có cùng tính chẵn lẻ như nhau với bất kì $i = \overline{1, n}$. Khi đó:

$$\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n$$

là các số chẵn và theo nhận xét ban đầu tích:

$$x.y = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n})(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}) = p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_n^{\alpha_n+\beta_n}$$

đúng là số chính phương.□

Ví dụ 3.19 Chứng minh rằng giữa $n + 1$ số trong tập hợp M có thể chọn được một vài số mà tích của chúng là một số chính phương.

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số bất kì của M. Với mỗi tập con khác rỗng $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$ của tập hợp $\{1, 2, \dots, n + 1\}$, chúng ta xét các $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$, tất nhiên số này cũng thuộc M.

Biểu diễn các số này theo dạng chuẩn và mỗi tập con $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$ cho tương ứng với n -bộ

$$(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}).$$

Ở đây

$$\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}$$

là số dư của các số mũ tương ứng $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ khi chia cho 2.

Nhưng số lượng những tập con khác rỗng của $\{1, 2, \dots, n + 1\}$ là $2^{n+1} - 1$, còn số lượng các n -bộ sắp gồm những số $0, 1$ và 2^n .

Suy ra tồn tại những tập con khác rỗng khác nhau $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$ và $\{j_1, j_2, \dots j_k\}$ của $\{1, 2, \dots, n + 1\}$, mà chúng tương ứng với cùng một n -bộ sắp của những số dư.

Điều này có nghĩa là nếu :

$$x_{i1} x_{i2} \dots x_{ik} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

và
$$x_{j1}x_{j2}\dots x_{jk} = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n}$$
thì số mũ α_i và β_i có cùng tính chẵn lẻ với $i = \overline{1,k}$.

Điều này có nghĩa là tích của những số $x_{i1}x_{i2}\dots x_{ik}$ và$x_{j1}x_{j2}\dots x_{jk}$ là chính phương. Nếu $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$ và $\{j_1, j_2, \dots j_k\}$ không có phần tử chung, thì bài toán đã được giải.

Trường hợp ngược lại, trong $P = x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ và $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk}$ lặp lại đúng những số x_s mà s thuộc $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$ và $\{j_1, j_2, \dots j_k\}$. Chúng ta loại trừ trong P tất cả những x_s như vậy và nhận được tích của vài số trong số $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ mà nó đúng là số chính phương.□

Ví dụ 3.20 Cho $k \geq 1$ và $n \geq 1$ là những số tự nhiên và A là tập hợp gồm $(k-1)n+1$ số nguyên dương, mỗi số này đều nhỏ hơn hoặc bằng kn. Chứng minh rằng ít nhất có một phần tử của A có thể biểu diễn như tổng của k phần tử trong A.

Lời giải:

Với $k = 1$ bài toán hiển nhiên đúng, chúng ta giả thiết $k \geq 2$. Kí hiệu m là số nhỏ nhất thuộc A. Dễ thấy rằng $m \leq n$ và tồn tại đúng $n - m$ số thuộc A mà chúng lớn hơn m nhưng không vượt quá kn.

Để chứng minh bài toán chúng ta tìm hai số x và y thuộc A sao cho$x = y + (k-1)m$, nghĩa là biểu diễn một số nào đó thuộc A thành tổng k số hạng thuộc A trong đó $k-1$ số hạng bằng m. Chỉ cần tìm số x thuộc A mà $x > (k-1)m$ và $x-(k-1)m$ thuộc A.

Thật vậy, trong khoảng $\Delta = ((k-1)m, kn)$ có $kn-(k-1)m = k(n-m)+m$ số nguyên. Vì $k \geq 2$, nên$(k-1)m \geq m$, theo nhận xét ban đầu suy ra có nhiều nhất n-m số trong Δ không thuộc A. Điều này nghĩa là A chứa ít nhất $s = k(n-m) + m - (n-m) = (k-1)(n-m) + m$ số. Nhưng $s \geq n$,vì $(k-2)(n-m) \geq 0$. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_s$ thuộc A, với
$$(k-1)m < a_i \leq kn, i = \overline{1,s}.$$

Khi đó những hiệu
$$a_1 - (k-1)m, a_2 - (k-1)m, \dots, a_s - (k-1)m$$
là những số nguyên khác nhau trong khoảng $[1, kn]$. Nếu một số nào đó trong chúng không thuộc A, thì theo nguyên lí Dirichlet chúng ta nhận được $s \leq n-1$, vì ngoài A còn đúng $n-1$ số trong khoảng này. Như vậy trái với bất đẳng thức đã chứng minh $s \geq n$. Suy ra tồn tại một hiệu $a_i - (k-1)m$ thuộc A.□

Ví dụ 3.21 Cho $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ là những số thực và $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k, $k \geq 2$, tồn tại những số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng không sao cho $|a_i| \leq k - 1, i = \overline{1, n}$ và thoả mãn bất phương trình sau:

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Lời giải:

Chúng ta sử dụng bất đẳng thức Cosi-Buniakovski-Svars:

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}\sqrt{\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2}$$

đúng với mọi số thực $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tồn tại một số λ sao cho $\alpha_1 = \lambda\beta_1, \alpha_2 = \lambda\beta_2, \ldots, \alpha_n = \lambda\beta_n$.

Bây giờ chúng ta xét các số :

$$y_0 = -\frac{k-1}{2}, y_1 = -\frac{k-1}{2} + 1, \ldots, y_{k-1} = -\frac{k-1}{2} + (k-1) = \frac{k-1}{2}$$

Số lượng của chúng là k và hiệu từng cặp trong chúng là các số nguyên, mà giá trị tuyệt đối của nó không vượt quá $k - 1$. Mỗi bộ sắp xếp n -thành phần: $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ở đây b_i là một số nào đó trong $y_1, y_2, \ldots, y_n, (i = \overline{1, n})$, chúng ta đặt tương ứng với mỗi số $S_\beta = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$.

Từ bất đẳng thức Cosi:

$$\begin{aligned} S_\beta = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n &\leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \end{aligned}$$

Nhưng $\left| b_i \leq \frac{k-1}{2} \right|, i = \overline{1, n}$ sao cho:

$$|S_\beta| \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \leq \frac{k-1}{2}\sqrt{n}$$

hoặc là:

$$-\frac{k-1}{2}.\sqrt{n} \leq S_\beta \leq \frac{k-1}{2}.\sqrt{n}.$$

Theo phương pháp này n-bộ $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ở đây b_i là một trong các số

$$y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, i = \overline{1, n}$$

được đặt tương ứng với bộ số

$$S_\beta = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$$

trong đoạn

$$\Delta = \left[-\frac{k-1}{2}\sqrt{n}, \frac{k-1}{2}\sqrt{n}\right].$$

Số lượng n - bộ được sắp xếp là k^n. Chia Δ ra $k^n - 1$ đoạn nhỏ với độ dài

$$\frac{k-1}{k^n-1}\sqrt{n}$$

Từ nguyên lí Dirichlet suy ra tồn tại hai n - bộ

$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

và

$$\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

mà những số:

$$S_\beta = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$$

và

$$S_\gamma = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

tương ứng với chúng nằm trong cùng một đoạn nhỏ. Đặt $a_1 = b_1 - c_1, a_2 = b_2 - c_2, \ldots, a_n = b_n - c_n$. Dễ kiểm tra được $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn điều kiện đã cho. Thật vậy, với mọi $i = \overline{1,n}$ số $a_i = b_i - c_i$ là hiệu của hai số nào đó trong $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ như đã nói ở trên và là số nguyên không vượt quá $k-1$ .Vì hai n - bộ trên khác nhau hoàn toàn thì ít nhất một trong các số $a_i = b_i - c_i$ khác không .

Ngoài ra:

$$\begin{aligned} |b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n| &= \left|x_1(b_1 - c_1) + x_2(b_2 - c_2) + \cdots + x_n(b_n - c_n))\right| \\ &= \left|S_\beta - S_\gamma\right| \le \frac{k-1}{k^n-1}.\sqrt{n}.\square \end{aligned}$$

Chương 4

Ứng dụng nguyên lí Dirichlet vào các bài toán khác

Ở chương **II** và chương **III** chung ta đã thấy điều thú vị của việc áp dụng nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán hình học tổ hợp và số học. Chúng ta còn sẽ thấy điều thú vị đó qua một số bài toán khác sau đây, để thấy được ứng dụng to lớn của nguyên lí Dirichlet.

Ví dụ 4.1 Giả sử trong tập hợp hữu hạn X chọn ra 50 tập hợp con $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ sao cho mỗi tập con chứa hơn một nửa phần tử của tập X.Chứng minh rằng có thể tìm được tập con $B \subset X$ không chứa nhiều hơn 5 phần tử và có ít nhất một phần chung cho các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_{50}$.

Lời giải:

Giả sử số các phần trong tập X bằng n. Mỗi tập hợp con được chọn $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ chứa không ít hơn $\frac{n}{2}$ phần tử, có nghĩa là tổng số các phần tử của tất cả các tập này vượt quá $50.\frac{n}{2} = 25.n$. Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại một phần tử của X thuộc không ít hơn 26 tập con đã chọn.

Tương tự ta chứng minh với giá trị bất kì $k < 50$ giữa các tập $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}$ có thể chọn ra không ít hơn $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$ tập hợp chứa cùng một phần tử. Ta lấy phần tử của tập hợp X mà nó thuộc không ít hơn 26 tập (phần tử này sẽ là một trong 5 phần tử của tập hợp B). Ta loại ra 26 tập mà chứa phần tử đang xét. Khi đó tìm được một phần tử thuộc ít nhất 13 từ 24 tập còn lại. Ta loại 13 tập này ra, khi đó giữa 11 tập còn lại tìm được một phần tử thuộc không ít hơn 5 trong số các tập hợp. Đối với 5 tập còn lại tìm được một phần tử thuộc không ít hơn 3 trong số chúng . Và cuối cùng tồn tại một phần tử thuộc hai tập cuối cùng. Như vậy ta tìm được không nhiều hơn 5 phần tử của tập X (có thể ít hơn vì một vài phần tử sẽ trùng nhau), chúng sẽ tạo thành tập B. Ngoài ra một tập bất kì từ $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ chứa ít nhất 1 trong các phần tử đó.□

Ví dụ 4.2 Đối với mỗi giá trị $n \in \mathbb{N}$, hãy tìm số k lớn nhất $k \in \mathbb{N}$ thoả mãn tính chất sau: Trong tập hợp gồm n phần tử có thể chọn ra k tập hợp con khác nhau, sao cho hai tập con bất kì đều có giao khác $\varnothing$.

Lời giải:

Cố định phần tử a_i của tập $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ và chỉ xét các tập con chứa phần tử a_1. Số các tập hợp như vậy bằng số các tập con của tập $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, nghĩa là bằng 2^{n-1}.

Suy ra $k \geq 2^{n-1}$. Mặt khác giả sử đã chọn được hơn 2^{n-1} tập con của X Ta chia tất cả các tập con của X thành 2^{n-1} cặp được tạo bởi từ một tập con của X và phần bù của nó. Theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 2 tập con đã chọn tạo thành 1 cặp, suy ra chúng không giao nhau. Vậy $k = 2^{n-1}$.□

Ví dụ 4.3 Các hàm số

$$f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

thoả mãn ba điều kiện sau:

1. Hàm $h(n)$ không nhận giá trị nào tại nhiều hơn một điểm $n \in \mathbb{N}$.

2. Tập hợp giá trị hàm số $g(n)$ là $\mathbb{N}$.

3. $f(n) \equiv g(n) - h(n) + 1, n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng đồng nhất thức $f(n) \equiv 1, n \in \mathbb{N}$ là đúng.

Lời giải:

Ta chứng minh đồng nhất thức $g(n) \equiv h(n), n \in \mathbb{N}$.Từ đó và điều kiện (2) sẽ dẫn đến:

$$f(n) \equiv g(n) - h(n) + 1 \equiv 1, n \in \mathbb{N}.$$

Với bất kì $n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$h(n) = g(n) + 1 - f(n) \leq g(n); \text{vì} f(n) \geq 1$$

Giả sử rằng, với giá trị nào đó $n \in \mathbb{N}$ đẳng thức $g(n) = h(n)$ không đúng, khi đó $h(n) < g(n) = k$.

Theo điều kiện (2) ta tìm các số $n_1, n_2, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$, để sao cho $g(n_i) = i, i = \overline{1, k-1}$. Bởi vậy mỗi số trong k số $h(n_1), h(n_2), \dots, h(n_{k-1}), h(n)$ thuộc vào tập hợp $\{1, 2, \dots, k-1\}$, do đó theo nguyên lí Dirichlet hàm số $h(n)$ nhận giá trị nào đó nhiều hơn một lần, điều này trái với điều kiện (1). Khẳng định được chứng minh.$\square$

Ví dụ 4.4 Cho dãy số nguyên $u_1, u_2, \dots, u_n$,với $n \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại dãy con $u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{km}$ trong đó

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$$

sao cho:

$$u_{k1}^2 + u_{k2}^2 + \dots + u_{km}^2.$$

Lời giải:

Xét n+1 số:

$$0, u_1^2, u_1^2 + u_2^2, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \dots, u_1^2 + \dots + u_n^2$$

chia các số này cho n, thì chúng có nhiều nhất n số dư. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư, giả sử đó là :

$$u_1^2 + \dots + u_j^2 \text{ và } u_1^2 + \dots + u_k^2, 0 \leq j < k \leq n$$

có nghĩa là số:

$$(u_1^2 + \dots + u_j^2) - (u_1^2 + \dots + u_k^2)$$

chia hết cho n hoặc:

$$u_{j+1} + u_{j+2} + \dots + u_k$$

chia hết cho n.

Dãy con phải tìm là $u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_k$.$\square$

Ví dụ 4.5 Cho $x_1, x_2, x_3, \dots$ là dãy vô hạn các số nguyên và k là một số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng tồn tại dãy số gồm những phần tử liên tiếp của dãy, mà tổng của chúng chia hết cho k.

Lời giải:

Chúng ta có thể giới hạn lại, giữa mọi bộ k phần tử liên tiếp của dãy có thể chọn được một số phần tử có tính chất mong muốn. Để đơn giản ta xem xét k phần tử đầu tiên: $x_1, x_2, \dots, x_k$. Chúng ta xét tổng:

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, S_3 = x_1 + x_2 + x_3, \dots, S_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Nếu một tổng nào đó trong số trên chia hết cho k, thì bài toán được giải. Ngược lại, các số $S_1, S_2, \ldots, S_k$, (có số lượng k) khi chia cho k được các số dư: $1, 2, 3, \ldots, k-1$.

Từ nguyên lí Dirichlet suy ra có một cặp chỉ số i và j, $1 \leq i < j \leq k$, mà các tổng S_i và S_j cho cùng một số dư khi chia cho k. Khi đó tổng các phần tử liên tiếp: $x_{i+1}, x_{n+2}, \ldots, x_j$ của dãy đã chia hết cho k, vì $x_{i+1} + x_{n+2} + \cdots + x_j = S_j - S_i$.□

Ví dụ 4.6 Cho dãy vô hạn các chữ số. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, nguyên tố cùng nhau với 10, trong dãy vô hạn trên tồn tại một nhóm chữ số liên tiếp, mà số tạo bởi các chữ số trong nhóm (viết theo thứ tự chỉ số lớn đứng trước) chia hết cho n.

Lời giải:

Cho dãy các chữ số $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Chúng ta xét các số

$$A_1 = \overline{a_1}, A_2 = \overline{a_2a_1}, \ldots, A_n = \overline{a_na_{n-1}\ldots a_1}, A_{n+1} = \overline{a_{n+1}\ldots a_1}$$

Vì số lượng những số này là $n+1$, còn số lượng khả năng của số dư khi chia chúng cho n là n, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai số cho cùng số dư ta kí hiệu chúng là A_i và A_j, $(i < j)$.

Khi đó hiệu $Aj - A_i$ chia hết cho n. Hay nói cách khác:

$$A_j - A_i = \overline{a_j\ldots a_1} - \overline{a_i\ldots a_1} = \overline{a_j\ldots a_{i-1}}.10^{j-i+1}.$$

Vì $(n, 10) = 1$ nên $\overline{a_j\ldots a_{i-1}}$ chia hết cho n.□

Ví dụ 4.7 Một hội toán học bao gồm các thành viên ở 6 nước. Danh sách các hội viên gồm 1978 người được đánh số báo danh từ 1 đến 1978. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một hội viên có số báo danh gấp đôi số báo danh của một hội viên khác cùng nước, hoặc bằng tổng hai số báo danh của hai hội viên cùng một nước với mình.

Lời giải:

Từ $329.6 < 1978$ suy ra một trong các nước (kí hiệu là A) có không ít hơn 330 đại biểu trong hội và chúng ta có thể viết số báo danh $a_1 < a_2 < \cdots < a_{330} < \ldots$. Chúng ta xét những hiệu:

$$x_i - a_{330} - a_i, i = \overline{1, 329}.$$

Nếu có một số x_i nào đó trùng với a_j (số báo danh của một đại biểu của A) thì chúng ta có $a_{330} = a_i + a_j$. Bài toán đã chứng minh xong.

Nếu $x_i \neq a_j$ thì với mọi i, j, thì số x_i là số báo danh của một đại biểu thuộc 5 nước còn lại. Bây giờ, vì $65.5 < 329$, thì ít nhất có một trong 5 nước này (kí hiệu là B) sẽ có không ít hơn 66 thành viên, mà số báo danh của họ là một trong các số:$x_1, x_2, \dots, x_{329}$.

Cho các số đó là $b_1 < b_2 < \dots < b_{66} < \dots$ với $b_i = x_n, i = \overline{1, 66}$. Chúng ta lại xét hiệu

$$y_i = b_{66} - b_i, i = \overline{1, 65}.$$

Nếu trong một hiệu nào đó trùng với số báo danh b_i của một đại biểu nước B thì $b_{66} = b_i + b_j$. Nếu với hai số i và k nào đó chúng ta có $y_i = a_k$, thì

$$a_k = b_{66} - b_i = x_{n_{66}} - x_{n_i} = a_{330} - a_{n_{66}} - (a_{330} - a_{n_i}) = a_{n_i} - a_{n_{66}}$$

hoặc là $a_{n_i} = a_{66} + a_k$.

Nếu hai trường hợp trên không xảy ra, thì những số báo danh này sẽ là số báo danh của đại biểu 4 nước còn lại và suy ra ít nhất một trong các nước này có số hội viên ít nhất là 17 với số báo danh y_i . Tiếp tục quá trình như vậy và lặp lại lí luận trên chúng ta có kết luận của bài toán.□

Ví dụ 4.8 Giả sử a và x là hai số tự nhiên thực sự lớn hơn 1 và $(x, a-1) = 1$. Dãy số vô hạn u_n được xác định như sau:

$$u_n = ax^n - a + 1, n = 1, 2, \dots.$$

Chứng minh rằng trong dãy số nói trên chứa vô hạn số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Giả thiết phản chứng trong dãy số chỉ có hữu hạn số $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$ nguyên tố cùng nhau.

Đặt $q = u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$. Xét $q+1$ số sau: $a, ax, ax^2, \dots, ax^q$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số nguyên r và s sao cho $0 \le r < s \le q$ và

$$ax^r \equiv ax^s (modq) \Rightarrow ax^r - ax^s \equiv 0 (modq)$$

hay:

$$ax^r(1 - x^{s-r}) \equiv 0(modq). \tag{4.1}$$

Theo giả thiết ta có $(x, a-1) = 1$ nên suy ra

$$(ax^r, u_{i_j}) = 1, \forall j = \overline{1, k}. \tag{4.2}$$

Từ (4.2) suy ra:

$$(ax^r, q) = 1. \tag{4.3}$$

Từ (4.1) và (4.3) ta có:

$$x^{s-r} \equiv 1(modq) \Rightarrow x^{s-r} = lq + 1, l \in \mathbb{N}.$$

Xét số:

$$u_{i_{k+j}} = ax^{s-r} - a + 1.$$

Vậy:

$$u_{i_{k+j}} = a(lq + 1 - a + 1). \tag{4.4}$$

Từ (4) ta có:

$$(u_{i_{k+j}}, u_{i_j}) = 1, \forall j = \overline{1, k}. \tag{4.5}$$

Hệ thức (4.5) chứng tỏ rằng luôn có thể bổ sung thêm vào bộ số:

$$q = u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k}$$

các số mới, mà bộ này vẫn thoả mãn điều kiện: Bất kì hai số nào cũng nguyên tố cùng nhau. Điều này có nghĩa là trong dãy u_n đã cho có vô hạn số đôi một nguyên tố cùng nhau.□

Ví dụ 4.9 Cho $\{u_n\}$ là dãy các số tự nhiên tăng dần:

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots$$

và thoả mãn điều kiện:

$$u_1 = 1, u_{n+1} \leq 2n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n tồn tại các số hạng u_p và u_q của dãy sao cho $u_p - u_q = n$.

Lời giải:

Giả sử $n \in \mathbb{N}$ là số tự nhiên cho trước. Từ giả thiết suy ra mỗi số hạng: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}$ không vượt quá $2n$.

Xét tập hợp $2n$ số tự nhiên sau $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Chúng chia tập hợp này thành n cặp:

$$(1, n+1), (2, n+2), \ldots, (n, 2n).$$

Do tập hợp trên chứa không ít hơn $n + 1$ phần tử của dãy u_n đã cho (vì nói riêng $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ đã thuộc tập hợp ấy), vậy theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số hạng khác nhau u_p và u_q của dãy thuộc vào một cặp (giả sử $u_p > u_q$).

Nhưng hiệu số của mỗi cặp đều bằng n nên chúng ta có :

$$u_p - u_q = n.\square$$

Ví dụ 4.10 Cho $u_k, k = \overline{1,n}$ là dãy số tự nhiên sao cho:

$$1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n$$

và

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2n.$$

Chứng minh rằng nếu n chẵn và $u_n \neq n+1$, thì từ dãy trên luôn chọn ra được một dãy con mà tổng các số hạng của dãy con đó bằng n.

Lời giải:

Đặt

$$S_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, k = \overline{1,n}.$$

Xét $n+2$ số $\{0, u_1 - u_n, S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. Theo nguyên lí Dirichlet thì ít nhất hai số khi chia chia cho n cùng phần dư.Vậy chỉ có 4 khả năng sau đây:

1. $(u_1 - u_n)$ chia hết cho n.

   Do:

   $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \geq nu_1 \Rightarrow 2n \geq nu_1 \Rightarrow u_1 \leq 2.$$

   (a) Nếu $u_1 = 2$ thì từ

   $$1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n$$

   và

   $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2n$$

   suy ra:

   $$u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 2.$$

   Do n chẵn nên $n = 2m$ .Vậy:

   $$u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 2m = n$$

   (b) Nếu $u_1 < 2$ thì từ $u_1 - u_n$ chia hết cho n, suy ra $u_n = 1$ hoặc là $u_n = 1 + n$(do u_1 nguyên nên $u_1 = 1$ và $1 \leq u_n \leq 2n$ suy ra được kết luận trên).

   Nhưng $u_n \neq n+1$ suy ra $u_1 = 1$. Mặt khác:

   $$1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n$$

   Vậy thì

   $$u_2 = u_3 = \cdots = u_{n-1} = 1.$$

Suy ra :$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n$, vô lí.

Như vậy trong trường hợp này ta chỉ ra tồn tại dãy con $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sao cho $u_1 + u_2 + \cdots + u_m$ với $m = \dfrac{n}{2}$.

2. $S_j - S_i, j > i$ chia hết cho n

   Ta có
   $$S_j - S_i = u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_j$$

   Rõ ràng vế phải của đẳng thức trên có ít nhất một số hạng mà $u_k \geq 1, \forall k = \overline{1, n}$, suy ra
   $$S_j - S_i \geq 1.$$

   Mặt khác cũng hiệu trên nếu không đủ các phần tử của dãy thì bao giờ ta cũng có:
   $$S_j - S_i < u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq 2n - 1.$$

   Do đó cuối cùng ta có:
   $$1 \leq S_j - S_i < u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq 2n - 1$$

   mà $S_j - S_i$ chia hết cho n. Điều này chỉ xảy ra khi
   $$S_j - S_i = n$$

   hoặc
   $$u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_j = n.$$

3. S_i chia hết cho n.

   Ta có
   $$1 \leq S_i \leq S_{n-1} = 2n - u_n < S_i$$

   mà S_i chia hết cho n,suy ra $S_i = n$ hoặc là $u_1 + u_2 + \cdots + u_i$ chia hết cho n.

4. S_k và $u_1 - u_n$ cho cùng phần dư khi chia cho n, với k nào đó, $1 \leq k \leq n - 1$. Suy ra
   $$S_k(u_1 - u_n)|n \Rightarrow (u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_n)|n.$$

   Mà
   $$u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_n \leq 2n - u_1 < 2n.$$

   Suy ra:
   $$u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_n = n.$$

Tóm lại luôn luôn chọn được dãy con mà tổng của chúng bằng n.□

Ví dụ 4.11 Cho tập hợp gồm 10 số có 2 chữ số. Chứng minh rằng tập hợp đó có ít nhất hai tập con không giao nhau, mà tổng những phần tử trong chúng bằng nhau.

Lời giải:
Nếu có hai tập con giao nhau mà mà tổng trong chúng bằng nhau thì chúng ta có thể bỏ những phần tử chung đi. Khi đó còn lại hai tập không giao nhau và tổng các phần tử trong chúng vẫn bằng nhau.
Chúng ta tính có bao nhiêu tập con không rỗng của một tập hợp có 10 phần tử.
Số lượng những tập con chỉ chứa một phần tử có C_{10}^1.
Số lượng những tập con chứa 2 phần tử có C_{10}^2.
Số lượng những tập con chứa 3 phần tử có $C_{10}^3,\ldots$
Số lượng những tập con chứa 10 phần tử có C_{10}^{10}.
Suy ra tổng số lượng các tập hợp con là:

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + \cdots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024.$$

Điều kiện bài ra là 10 số gồm hai chữ số suy ra các số nhỏ hơn hoặc bằng 99. Vậy tổng của các số trong mỗi tập hợp con không vượt quá 99.10 = 990. Như vậy số lượng những tổng khác nhau nhiều nhất là 990. Theo nguyên lí Dirichlet trong số 1024 tập con của tập hợp gồm 10 số sẽ có ít nhất hai tập mà tổng các phần tử trong chúng phải bằng nhau.□

Ví dụ 4.12 Tổng độ dài một số véc tơ trong mặt phẳng là 4. Chứng minh rằng từ những véc tơ này có thể chọn ra một số véc tơ mà độ dài của chúng lớn hơn 1.

Lời giải:
Ta đưa vào hệ trục toạ độ và xét véc tơ đại diện những véc tơ đã cho tại điểm gốc, ta chiếu những véc tơ này xuống trục toạ độ Ox và Oy. Vì mỗi véc tơ có độ dài nhỏ hơn tổng của các độ dài hình chiếu của nó xuống hai trục nên tổng độ dài của tất cả các hình chiếu của các véc tơ lớn hơn 4. Khi đó trên ít nhất một trong 4 nửa trục của hệ toạ độ tổng độ dài của hình chiếu sẽ lớn hơn 1, điều đó có nghĩa là tổng độ dài của những véc tơ tương ứng sẽ lớn hơn 1 (độ dài hình chiếu lớn hơn thì tất nhiên độ dài véc tơ cũng lớn hơn).□

Ví dụ 4.13 Cho 7 số thực bất kì. Chứng minh rằng giữa chúng có thể chọn được hai số, chẳng hạn x và y , sao cho:

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Lời giải:

Các số đã cho kí hiệu là $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Mục đích của chúng ta là biểu diễn mọi số dưới dạng $x_i = \tan\alpha_i$, ở đây α_i là một số trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), i = \overline{1,7}$. Chúng ta chia đoạn này thành ra 6 đoạn con có độ dài bằng nhau, nghĩa là bằng $\frac{\pi}{6}$. Theo nguyên lí Dirichlet ta có ít nhất hai số trong $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ cùng nằm trong một đoạn con đó. Nếu chúng ta kí hiệu các số đó là α_i và α_j; $\alpha_i \geq \alpha_j$, thì từ đó suy ra:

$$0 \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{6}.$$

Vì hàm số tan tăng trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.Suy ra:

$$0 \leq \tan(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{\tan\alpha_i - \tan\alpha_j}{1 + \tan\alpha_i \tan\alpha_j} = \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\square$$

Chú ý: Bằng cách giải của bài toán trên ta có bài toán sau với lời giải tương tự, cách giải khác khó mà thực hiện được.

Ví dụ 4.14 Cho 4 số dương bất kì. Chứng minh rằng có hai trong bốn số đó, chẳng hạn x và y, thoả mãn bất phương trình sau:

$$0 < \frac{x - y}{1 + x + y + 2xy} \leq \sqrt{3}.$$

Lời giải:

Gọi các số đã cho là x_1, x_2, x_3, x_4. Đặt $y_i = 1 + \frac{1}{x_i}, i = 1, 2, 3, 4$. Đặt $y_i = \tan\alpha_i, \alpha_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ra làm ba đoạn, mỗi đoạn bằng $\frac{\pi}{3}$.

Suy ra tồn tại hai số α_i, α_j thuộc cùng một đoạn (theo nguyên lí Dirichlet).

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 < \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{3} \\
&\Rightarrow 0 < \tan(\alpha_i - \alpha_j) \leq \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\
&\Rightarrow 0 < \frac{\tan\alpha_i - \tan\alpha_j}{1 + \tan\alpha_i \tan\alpha_j} \leq \sqrt{3} \\
&\Rightarrow 0 < \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \leq \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1+\dfrac{1}{x_i}-1-\dfrac{1}{x_j}}{1+(1+\dfrac{1}{x_i})(1+\dfrac{1}{x_j})} \leq \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{x_j - x_i}{x_ix_j+(1+x_i)(1+x_j)} \leq \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{x_j - x_i}{1+x_i+x_j+2x_ix_j} \leq \sqrt{3}.\square$$

Ví dụ 4.15 Chứng minh rằng mỗi bộ số 11 số thực khác nhau trong khoảng $[1, 1000]$ có thể chọn được hai số x và y mà chúng thoả mãn bất đẳng thức sau:

$$0 < x - y < 1 + 3\sqrt[3]{xy}.$$

Lời giải:

Ta xét căn bậc ba của các số trong bộ số đã cho $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$. Từ điều kiện $x_i \in [1, 1000]$ đã cho suy ra $1 \leq \sqrt[3]{x_i} \leq 10, (i = 1, \ldots, 11)$.

Ta chia khoảng $[1, 1000]$ ra 10 phần bằng nhau. Có tất cả 11 số $\sqrt[3]{x_1}, \sqrt[3]{x_2}, \ldots, \sqrt[3]{x_{11}}$. Theo nguyên lí Dirichlet suy ra có ít nhất 2 trong số 11 số đó nằm trong cùng một đoạn nhỏ. Giả sử hai số đó là $\sqrt[3]{x_i}, \sqrt[3]{x_j}, (i \neq j)$ và $x_i > x_j$.

$$\Rightarrow 0 < \sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j} \leq \frac{9}{10} < 1$$
$$\Rightarrow 0 < (\sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j})^3 < 1^3$$
$$\Rightarrow 0 < x_i - x_j - 3.\sqrt[3]{x_i^2x_j} + 3\sqrt[3]{x_ix_j^2} < 1^3$$
$$\Rightarrow 0 < x_i - x_j < 1 + 3\sqrt[3]{x_i^2x_j} - 3\sqrt[3]{x_ix_j^2}$$
$$\Rightarrow 0 < x_i - x_j < 1 + 3\sqrt[3]{x_ix_j}(\sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j}),\ \text{vì } 0 < \sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j} < 1$$
$$\Rightarrow 0 < x_i - x_j < 1 + 3\sqrt[3]{x_ix_j}.\square$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp DIRICHLET và ứng dụng*, NXB Khoa học và kĩ thuật Hà nội, 1999.

[2] Phan Huy Khải, *Các bài toán hình học tổ hợp*, NXB Giáo dục, 2007.

[3] Phan Huy Khải, *Các bài toán cơ bản của số học*, NXB Giáo dục, 2009.

[4] Phan Huy Khải, *Số học và dãy số*, NXB Giáo dục, 2009.

[5] Nguyễn Vũ Thanh, *Số học*, NXB Giáo dục, 2006.

[6] Phạm Minh Phương, *Các chuyên đề số học*, NXB Giáo dục, 2006.

[7] Nguyễn Văn Vĩnh, *23 chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp*, NXB Giáo dục, 2005.

[8] *Tập san Toán học tuổi trẻ các năm.*