

Câu 1. (4 điểm)

Giải bất phương trình: $\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1.$

Câu 2. (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R} .$$

Câu 3. (4 điểm)

1. Trong mặt phẳng có n đường thẳng sao cho không có hai đường thẳng nào song song, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Hỏi các đường thẳng chia mặt phẳng thành mấy phần ?
2. Người ta tô màu tất cả các số nguyên dương bằng hai màu trắng và đen. Biết rằng tổng của 2 chữ số khác màu là một số được tô màu đen và có vô hạn các số được tô màu trắng. Gọi số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đen là q . Chứng minh rằng q là số nguyên tố.

Câu 4. (4 điểm)

Cho n số a_1, a_2, \dots, a_n thuộc đoạn $[-1; 2]$ và có tổng bằng 0.

Đặt $U_k = \frac{a_k \sqrt{4k-1}}{(4k-3)(4k+1)}$ với $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Chứng minh rằng: $|U_1 + U_2 + \dots + U_n| < \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Câu 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ; D, E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB .

Chứng minh rằng điểm O là trọng tâm tam giác DEF