CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phạm Hùng Vương Học sinh lớp 12C1 trường THPT Phan Đăng Lưu, Nghệ An

I. Lời nói đầu.

Chuyên đề là kết quả thu được qua một thời gian học tập và nghiên cứu của bản thân về hệ phương trình. Tuy nhiên có thể nói rằng, đó là sự kết tinh qua nhiều thế hệ, là sự giúp đỡ, là sự học hỏi từ những người bạn của mình cũng như rất nhiều yếu tố khác.

Để đạt hiệu quả cao khi tham khảo chuyên đề này, xin được trích dẫn mấy lời của nhà giáo G.Polya: " [...] Một số bài toán có nêu lời giải đầy đủ (tuy vắn tắt), đối với một số bài khác, chỉ vạch ra mấy bước giải đầu tiên, và đôi khi chỉ đưa ra kết quả cuối cùng.

Một số bài toán có kèm thêm chỉ dẫn để giúp người đọc giải được dễ dàng hơn. Chỉ dẫn cũng có thể nằm trong những bài toán khác ở gần bài toán đang xét. Nên đặc biệt lưu ý đến những nhận xét mở đầu trước từng bài tập hay cả một nhóm bài tập gặp thấy trong chương.

Nếu chịu khó, gắng sức giải một bài toán nào đó thì dù không giải nổi đi chăng nữa, bạn đọc cũng thu hoạch được nhiều điều bổ ích. Chẳng hạn, bạn đọc có thể giở ra xem (ở cuốn sách) phần đầu mỗi lời giải, đem đối chiếu với những suy nghĩ của bản thân mình, rồi gấp sách lại và thử gắng tự lực tìm ra phần còn lại của lời giải.

Có lẽ thời gian tốt nhất để suy nghĩ, nghiền ngẫm về phương pháp giải bài toán là lúc bạn vừa tự lực giải xong bài toán hay vừa đọc xong lời giải bài toán trong sách, hay đọc xong phần trình bày phương pháp giải trong sách. Khi vừa hoàn thành xong nhiệm vụ, và các ấn tượng hãy còn "nóng hổi", nhìn lại những nổ lực vừa qua của mình, bạn đọc có thể phân tích sâu sắc tính chất của những khó khăn đã vượt qua. Bạn đọc đọc có thể tự đặt cho mình nhiều câu hỏi bổ ích: "Khâu nào trong quá trình giải là quan trọng nhất? Khó khăn chủ yếu là ở chỗ nào? Ta có thể làm gì cho tốt hơn? Chi tiết ấy mình cũng đã liếc qua mà không chú ý đến - muốn "nhìn thấy" chi tiết này thì đầu óc phải có tư chất ra sao? Liệu ở đây có một cách gì đó đáng lưu ý để sau này gặp một tình huống tương tự, ta có thể áp dụng được không?" Tất cả những câu hỏi đó đều hay cả, và cũng còn nhiều câu hỏi bổ ích khác nữa, nhưng câu hỏi hay nhất chính là câu hỏi tự nhiên nảy ra trong óc, không cần ai gợi ý cả!"

(trích "Mấy lời khuyên và chỉ dẫn" -G.Polya trong "Sáng tạo toán học")

Do thời gian cũng như 1 số vấn đề khác như kiến thức, trình bày,.. mà chuyên đề này còn khá nhiều khiếm khuyết. Rất mong được các bạn quan tâm và chia sẻ đề hoàn thiện chuyên đề hơn. Hi vọng nó sẽ là tài liệu bổ ích giúp chúng ta vượt qua 1 chẳng nhỏ trong chặng đường chinh phục toán học.

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CŨ.

1. Hệ phương trình đối xứng kiểu I.

Nhận dạng:

Hệ đối xứng kiểu I: gồm 2 phương trình ẩn x,y mà vai trò x,y trong mỗi phương trình là như nhau. Ví dụ: $\begin{cases} a(x+y)+bxy=c \\ x^2+y^2=c \end{cases}$. Và phương pháp giải là đặt ẩn phụ: $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$. Giải tìm S, P sau đó sử dụng định lí Vi-et, dễ thấy x, y là nghiệm của phương trình: $X^2-S.X+P=0$

Cùng xem xét 1 vài ví dụ (cách giải và một số hướng giải quyết mới)

Ví dụ 1— (Đề thi HSG lớp 9 Tỉnh Bến Tre năm 2009-2010)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y=6 \\ x+y-xy=5 \end{cases}$

Lời giải: Đặt $S=x+y, P=xy$, ta thu được hệ mới tương đương:

$$\begin{cases} S^2-2P-2S=6 \\ S-P=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2-4S+4=0 \\ P=S-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=-3 \end{cases}$$

Như vậy, theo định lí Vi-ét, x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2-2X-3=0 \Leftrightarrow (X-3)(X+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=-1 \\ x=-1, y=3 \end{array} \right.$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn là: $(-1;3)$ và $(3;-1)$. □

Những bài như thế này và bài giải như vậy đã trở nên quen thuộc, không còn mới lạ. Tuy nhiện, cũng có 1 số bài hệ, dù biết là đối xứng kiểu I, nhưng lại phải làm gì để sử dụng được? Hãy xem ví dụ:

Ví dụ 2— (ĐH-CĐ Khối A năm 2006)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

Lời giải:

$\boxed{\text{Ý tưởng 1:}}$ Bình phương hai vế của pt dưới hệ thành

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2+\sqrt{xy+x+y+1}=16 \end{cases}$$

Thử đặt như cũ: $S=x+y, P=xy$, hệ khi đó trở thành:

$$\begin{cases} S-\sqrt{P}=3 \\ S+2\sqrt{P+S+1}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=\sqrt{P}+3 \\ 2\sqrt{P+\sqrt{P}+4}=11-\sqrt{P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=\sqrt{P}+3 \\ 3P-26\sqrt{P}-105=0 \\ 0\le P\le 121 \end{cases}$$

Đến đây, giải tìm P, sau đó quay lại giải tìm ra nghiệm x, y. (chú ý điều kiện)
Hơn nữa, luôn nhớ: $S^2 \ge 4P$ để loại bớt nghiệm.

$\boxed{\text{Ý tưởng 2:}}$ Đặt ẩn $a=\sqrt{x+1}, b=\sqrt{y+1}$ nhằm làm đơn giản 1 phương trình của hệ. (kĩ thuật đặt ẩn làm gọn này rất có ý nghĩa, đặc biệt trong bất đẳng thức (BĐT) có giả thiết rườm rà, với phương trình hay hệ cũng vậy). Khi đó:

$$\begin{aligned} HPT &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a^2+b^2-2-\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}=3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} S=4 \\ S^2-2P-2-\sqrt{P^2-S^2+2P+1}=3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} S=4 \\ \sqrt{P^2+2P-15}=11-2P \end{cases} \end{aligned}$$

Trong đó $S=a+b, P=ab$. Đến đây, ta cũng có thể giải tương tự. □

Ví dụ 3— (Thi thử ĐH-CĐ, THPT chuyên Nguyễn Huệ 2011)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=4 \\ \sqrt{x+6}+\sqrt{y+4}=6 \end{cases}$

Ví dụ 4— (Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An năm 2009-2010)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 \end{cases}$

Ví dụ 5— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)(1+xy)=4xy \\ (x^2+y^2)(1+x^2y^2)=4x^2y^2 \end{cases}$

Thực ra, dạng hệ đối xứng kiểu I có hướng giải khá đơn giản, rõ ràng với việc đặt ẩn và sử dụng định lí Vi-ét. Chính vì vậy mà hệ đối xứng kiểu I thường gắn với việc giải và biện luận, một sở trường của phương pháp này! Chúng ta cùng xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 6— (Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Hà Nội năm 2009-2010)

Tìm a để hệ phương trình $\begin{cases} ay+x+y=a+1 \\ x^2y+xy^2=a \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải: Đặt : $S=x+y, P=xy$, ta có hệ mới: $\begin{cases} S+P=a+1 \\ SP=a \end{cases}$

Theo Vi-ét, S và P là nghiệm của phương trình: $X^2-(a+1)X+a=0 \qquad (1)$

Hơn nữa, cũng theo Vi-ét x,y lại là nghiệm của phương trình: $X^2-S.X+P=0 \qquad (2)$.

Do đó, để hệ có 1 nghiệm duy nhất thì (2) có nghiệm duy nhất, tức $\Delta_{(2)}=0 \Leftrightarrow S^2=4P \Leftrightarrow x=y$

Hoặc có thể dùng nhận xét: do vai trò x,y trong mỗi phương trình của hệ là như nhau nên nếu hệ có nghiệm $(m;n)$ thì nó cũng có nghiệm $(n;m)$. Như vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì cần có $x=y$. Thế vào được:

$$\begin{cases} x^2+2x=a+1 \\ 2x^3=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-(a+1)=0 \quad (*) \\ x=\sqrt[3]{\frac{a}{2}} \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $(*)$ có duy nhất 1 nghiệm $x=\dfrac{-2}{2.1}=-1 \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{a}{2}}=-1 \Leftrightarrow a=-2$.

Thử lại thấy thỏa mãn. Kết luận giá trị cần tìm là $a=-2$. □

Ví dụ 7— (Đề thi HSG lớp 9 Tỉnh Hưng Yên năm 2009-2010)

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=m \\ x+y-\sqrt{xy}=m \end{cases}$

Ví dụ 8— (Thi thử ĐH-CĐ THPT Lương Ngọc Quyến, Thái Nguyên 2011)

Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=a \\ x+y=2a+1 \end{cases}$

Nếu đơn thuần chỉ là hệ đối xứng kiểu I thì chắc chắn nó sẽ nhanh chóng được chúng ta giải quyết. Chính vì vậy, mà sau đây sẽ các ví dụ cần dùng các kĩ thuật nhỏ chuyển về hệ đối xứng kiểu I. (Phần kĩ năng sẽ trình bày rõ hơn ở mục sau).

Ví dụ 9— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)^2+6(x-1)y+4y^2=20 \\ x^2+(2y+1)^2=2 \end{cases}$

Nhận xét: Quan sát thì thấy ngay không thể là hệ đối xứng kiểu I. Nhưng! Hãy xem

Lời giải: Đặt $a=x-1, b=2y$ thì hệ trở thành: $\begin{cases} a^2+3ab+b^2=20 \\ (a+1)^2+(b+1)^2=2 \end{cases}$.
Đúng là hệ đối xứng kiểu I! Bây giờ, thì có thể đi tiếp theo phương pháp được rồi.
Có thể nói rằng, vấn đề đặt gọn luôn ẩn hiện 1 điều gì đó rất thú vị nếu ta tinh ý trong các biểu thức nhìn có vẻ có vấn đề. Như ví dụ trên chẳng hạn, phải biết nghi ngờ $(x-1)$, khi nó được đặt trong ngoặc. □

Hãy tiếp tục với hệ sau:

Ví dụ 10— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+6xy+4y^2=19+2y+6y & (1) \\ x^2+4y^2=1-4y & (2) \end{cases}$

Có thể thấy, cả 2 ví dụ 10 và ví dụ 11 đều chỉ là một. Nhưng nếu nghiệm theo cách đặt ẩn gọn thì đặt cái nào.

Nếu đặt $a=x-1$, $b=2y$ như trên thì tại sao lại biết mà đặt như vậy. Đây chính là vấn đề cần bàn. Nếu đi theo phân tích phương trình (1) thì sẽ có khá nhiều phương án: chẳng hạn nghĩ đến hằng đẳng thức: $(1) \Leftrightarrow (x+3y)^2-5y2=19+2(x+3y),..v.v$. Có khá nhiều đẳng thức có thể nghĩ tới để đặt.

Nhưng với phương trình (2) thì lại khác: nó chỉ có một đẳng thức cần chú ý: $(2) \Leftrightarrow x^2+(2y+1)^2=2$. Như vậy, ý tưởng đặt làm gọn (2) mở ra: $a=2y+1$, hơn nữa có thể thấy ở phương trình (1) hệ số của y luôn chẵn, khi thế có thể thế $2y=a-1$ (đây không phải là một trùng hợp ngẫu nhiên. Hãy nghĩ vậy).

Việc làm còn lại thì khá rõ rồi, ta cũng thu được một hệ đối xứng kiểu I và tiếp tục giải.

Hãy thử với các ví dụ:

Ví dụ 11— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-4x^2+(y-3)^2=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

Ví dụ 12— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)^2=1-x^2y^2 \\ x(xy+y+1)=y(xy+1)+1 \end{cases}$

Thậm chí còn có những bài có những cách đặt đưa về hệ đối xứng rất thú vị, khó mà thấy được nếu không qua chút biến đổi. Vì vậy, hãy cố gắng quan sát và đặt gọn phù hợp.

Ví dụ 13— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=5+4x-4y \\ 3x+xy-y=15 \end{cases}$

Ví dụ 14— (THTT số 379 năm 2009)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-3x-2y=16 \\ x^2+y^2-2x-4y=33 \end{cases}$

Ví dụ 15— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2x^2+3xy-2y^2+3x+y=7 \end{cases}$

Lời giải: (xem giải ở mục II. phương pháp 02) □

Hơn nữa, dạng hệ đối xứng kiểu I này rất hay vận dụng một hằng đẳng thức (đang có xu hương lớn trong các đề thi thử): $\frac{1}{x^2}+y^2=(\frac{1}{x}+y)^2-2\frac{y}{x}$.. Tiếp tục với các ví dụ sau, bạn sẽ thấy rõ.

Ví dụ 16— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}=6 \\ \frac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases}$

Ví dụ 17— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+y^2+x-7y=0 \\ xy+x^2-12y=0 \end{cases}$

Ví dụ 18— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2=9 \\ (x^3+y^3)(1+\frac{1}{xy})^3=4 \end{cases}$

Ví dụ 19— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(2x+y-6)+2x+y=0 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2=8 \end{cases}$

Và cả một dạng (ở phần cuối chuyên đề)

2. Hệ phương trình đối xứng kiểu II.

Nhận dạng: Cũng như loại I, loại II cũng "đối xứng" nhưng là đối xứng giữa 2 phương trình chứ không không phải là đối xứng trong từng phương trình như kiểu I.

Một cách nhận dạng khác nữa là cho $x=y$ thì 2 phương trình của hệ như nhau. Hay nói cách khác $x=y$ chính là nghiệm của hệ. Đây chính là đặc điểm khai thác của hệ này.

Phương pháp: Thông thường, ta trừ theo vế ta thu được nghiệm $x=y$, và 1 số nghiệm khác. Sau đó thay lại tìm ra nghiệm $(x;y)$.

Cùng xem xét một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 20— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y=5x+3 \\ y^2+x=5y+3 \end{cases}$

Lời giải: Trừ theo của hệ thu đươc: $x^2-y^2=6(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y-6)=0$. Do đó, hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=6 \\ x^2+x-5(6-x)=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=3, y=3 \\ x=-9, y=15 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=3 \\ x=-9, y=15 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\{(-9;15),(1;1),(3;3)\}$ □

Ví dụ 21— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3=2y+1 \\ y^3=2x+1 \end{cases}$

Lời giải: Trừ theo vế của hệ ta thu được: $x^3-y^3=2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0 \Leftrightarrow x=y$
Vì $x^2+xy+y^2+2=(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2+2>0$. Như vậy thế $x=y$ vào hệ, ta chỉ cần giải phương trình:

$$x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x=\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};1\right\}$ □

• Chú ý: Khi trừ theo vế, ta thu được: $x^3+2x=y^3+2y$. Nếu không dùng phân tích trên, ta có thể tính đạo hàm: $f(t)=t^3+2t$ có $f'(t)=3t^2+2>0$ nên suy ra: $x=y$.
• Nhận xét: Đơn giản chỉ là trừ vế theo vế, nhưng với những bài khác nhau lại cần thêm những kĩ thuật khai thác khác nhau để là xuất hiện $(x-y)$. Hãy xem:

Ví dụ 22— (Thử sức trước kì thi, THTT số 407, 2011)
Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+10}+\sqrt{y-1}=11 \\ \sqrt{y+10}+\sqrt{x-1}=11 \end{cases}$

Lời giải: Điều kiện các phân thức có nghĩa: $x,y\geq 1$. Chú ý $x=y=1$ không là nghiệm của hệ nên trừ theo vế 2 phương trình của hệ và nhân lượng liên hợp ta có:

$$\sqrt{x+10}-\sqrt{y+10}+\sqrt{y-1}-\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+10}+\sqrt{y+10}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}\right)=0 \Leftrightarrow x=y$$

(Vì do $\sqrt{x+10}+\sqrt{y+10}>\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}$ nên biểu thức còn lại vô nghiệm).
Thế $x=y$ vào ta dễ dàng giải phương trình của hệ. □

• Mở rộng cách nhìn về hệ đối xứng kiểu II.
Trước hết, hãy xem xét cách giải hệ phương trình sau:

Ví dụ 23— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^2=1 \\ y^3+x^2=1 \end{cases}$

Lời giải: Trừ theo vế 2 phương trình của hệ ta thu được:

$$x^3-y^3+y^2-x^2=0 \Leftrightarrow (x-y)\left[x^2+xy+y^2-(x+y)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+xy+y^2=x+y \end{array}\right.$$

Trường hợp: $x=y$ thì thế và giải phương trình:

$$x^3+x^2-1=0 \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{25}{2}-\frac{3\sqrt{69}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{25}{2}+\frac{3\sqrt{69}}{2}}-1\right]$$

Cộng theo vế 2 phương trình và kết hợp với $x^2+xy+y^2=x+y$ ta được hệ đối xứng loại I:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=x+y \\ x^3+y^3+x^2+y^2=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-xy=(x+y) \\ (x+y)^3-3xy(x+y)+(x+y)^2-2xy=2 \end{cases}$$

Đặt $S=x+y$, $P=xy$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} S^2-P=S \\ S^3-3SP+S^2-2P=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3+S^2-2-(3S+2)(S^2-S)=0 \\ P=S^2-S \end{cases}$$

$$\begin{cases} (S-1)(S^2+1)=0 \\ P=S^2-S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=0 \\ x=0, y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm như trên. □

• Qua bài giải trên, hẳn chúng ta nhận rõ vai trò của việc kết hợp "cộng" và "trừ" để đưa đến hpt đối xứng kiểu I (đây là một hướng nhìn mới). Việc làm này hoàn toàn có cơ sở. Hãy xem lại câu nói: "Cũng như loại I, loại II cũng có "đối xứng" nhưng là đối xứng giữa 2 phương trình chứ không phải là đối xứng trong từng phương trình như kiểu I". Như vậy, khi cộng theo vế sẽ luôn cho một trong hai phương trình đối xứng kiểu I. Và việc lấy đi nghiệm $(x-y)$ sau khi trừ cũng để lại cho ta 1 phương trình đối xứng nữa.

Ví dụ 24— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y=2 \\ y^3+x=2 \end{cases}$

• Và đôi lúc việc cộng trừ cũng không đem lại cho ta kết quả khả quan:

Ví dụ 25— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$

Nhận xét: Quả đúng, khi cộng hay trừ ta không thể làm gì với cái căn khủng khiếp kia. Tuy nhiên, một số điểm ta lại thấy rõ và đáng phải nghĩ là trong cái căn bậc 3 kia, có một đẳng thức: $(x-1)^2+8=x^2-2x+9$. Nhẩm nghiệm $x=y=1$ và $\sqrt[3]{8}=2$ (căn đẹp!). Phải liên kết và sử dụng chúng như thế nào?

Lời giải: Cộng theo vế 2 hệ của phương trình: $\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=x^2+y^2$.

Sử dụng đánh giá:

$$\sqrt[3]{x^2-2x+9}=\sqrt[3]{(x-1)^2+8}\ge 2\Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}\le\frac{2xy}{2}=xy$$

Tương tự ta có:

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\le xy\Rightarrow\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\le 2xy=x^2+y^2-(x-y)^2\le x^2+y^2$$

Vậy hệ có nghiệm khi $x=y=1$, thử lại thấy đúng, kết luận nghiệm. □

• 2 kiểu hệ đối xứng I và II là những dạng rất cơ bản. Tuy nhiên, qua "chế biến" của người ra đề thì không thể nói trước được điều gì. Vì vậy, cần có cái nhìn tổng quan, nhìn nhiều khía cạnh, không nên chỉ biết nhìn hình thức rồi rập khuôn lời giải của dạng. Một số ví dụ thêm:

Ví dụ 26— (Thi thử ĐH CĐ THPT Lê Văn Hưu, Thanh Hóa năm 2011)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+x-\dfrac{1}{y}=2\\ y-y^2x-2y^2=-2\end{cases}$

Ví dụ 27— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3(2+3y)=1\\ (y^3-2)x=3\end{cases}$

Ví dụ 28— (Tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu 2009-2010)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3(2+3y)=8\\ (y^3-2)x=6\end{cases}$

Ví dụ 29— (Thi ĐH - CĐ khối B 2003)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3y=\dfrac{y^2+2}{x^2}\\ 3x=\dfrac{x^2+2}{y^2}\end{cases}$

Ví dụ 30— (Olympic 30-4-2010)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+22}-\sqrt{y}=y^2+2y+1\\ \sqrt{y^2+2y+22}-\sqrt{x}=x^2+2x+1\end{cases}$

Ví dụ 31— (Thi thử ĐH năm 2011, THTT số 379, 2009)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$

Ví dụ 32— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$

III. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP MỚI

1. Phương pháp 01: Hằng số $= t =$ ẩn số:

Xem xét cách giải một số ví dụ sau:

Ví dụ 33— (Hệ phương trình TST Nghệ An 2009-2010)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{5} \\ 4x^2+3x-\dfrac{57}{25}=-y(3x+1) \end{cases}$

Lời giải: Nhân phương trình sau của hệ với 2 rồi cộng theo vế với phương trình đầu ta được:

$$9x^2+y^2+6xy+6x+2y=\frac{119}{25} \Leftrightarrow (3x+y+1)^2=\frac{144}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+y+1=\dfrac{12}{5} \\ 3x+y+1=-\dfrac{12}{5} \end{array}\right.$$

Đến đây thì thế vào phương trình ban đầu ta giải phương trình bậc 2 nữa là xong. □

Ví dụ 34— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)^2+y=3 \\ x^2+2xy-5y^2-5x+13y=6 \end{cases}$

Lời giải: Nhân 3 vào phương trình đầu rồi trừ theo vế với phương trình sau ta được:

$$2x^2+8y^2-8xy+5x-10y=3 \Leftrightarrow 2(x-2y)^2+5(x-2y)-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y+3)(2x-4y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y=-3 \\ 2x-4y=1 \end{array}\right.$$

Đến đây, thế từng trường hợp rồi thay vào phương trình ban đầu là xong. □

• Nhận xét: Hai bài giải trên thật hay, đơn giản với công việc nhân thêm rồi cộng lại, sau đó phân tích thành nhân tử.

Nhưng! Điều chúng ta băn khoăn và thắc mắc ở đây chính là việc biết phải nhân với con số nào. Đây chính là cơ sở để chúng ta đi đến phương pháp ẩn số $= t =$ hằng số.

• Như chúng ta đã biết, cái chưa biết chính là ẩn số. Đây cũng vậy, để biết cần nhân với bao nhiêu, ta đưa thêm ẩn t vào. Do đó, hpt của chúng ta đã có đến tận 3 ẩn với chỉ 2 giả thuyết. Như vậy, phải có thêm một cái gì đó ràng buộc. Nó là gì? Quan sát lại 2 ví dụ trên một lần nữa.

• Phương pháp: Hằng số = t = ẩn số:

- Phạm vi ứng dụng: hệ phương trình 2 ẩn x, y có bậc không quá 2.
- Cơ sở phương pháp: giải phương trình bậc 2.

Xét phương trình: $ax^2+bx+c=0$. Có: $\Delta=b^2-4ac$.
Nếu: $\Delta<0$ phương trình vô nghiệm thực.
Nếu $\Delta>0$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
Đặc biệt: $\Delta=0$ phương trình có 1 nghiệm duy nhất, tức là khi đó phương trình tương đương với:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

. Đây chính là cơ sở cơ bản của phương pháp.
(Bài viết sẽ không trình bày giải hệ phương trình tổng quát mà sẽ thực hiện giải chi tiết những ví dụ cụ thể nhằm tạo cho bạn những tu duy, suy nghĩ mới và tự hình thành cho mình những phương pháp và kĩ năng. Hơn nữa việc trình bày tổng quát khá phức tạp)

Hãy xem xét lại 2 ví dụ trên:
Thay vì nhân vào những con số 2 như Ví dụ 1, con số 3 như Ví dụ 2 mà có vẻ dường như ta đã biết, ta sẽ nhân vào đó con số t.

Ví dụ 35— (Hệ phương trình TST Nghệ An 2009-2010)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{5} \\ 4x^2+3x-\dfrac{57}{25}=-y(3x+1) \end{cases}$

Lời giải: Nhân t vào phương trình đầu rồi cộng theo vế với phương trình sau ta có:

$$ty^2+y(3x+1)+(t+4)x^2+3x-\frac{5t+57}{25}=0$$

Xem đây là phương trình bậc 2 ẩn y, xét:

$$\Delta_y=(3x+1)^2-4t\left[(t+4)x^2+3x-\frac{5t+57}{25}\right]$$
$$=(9-4t^2-16t)x^2+6x(1-2t)+1+\frac{4t(5t+57)}{25}$$

Để xuất hiện nhân tử như trên thì $\Delta_y=f^2(x)$ và như vậy thì:

$$(9-4t^2-16t)x^2+6x(1-2t)+1+\frac{4t(5t+57)}{25}=f^2(x)$$
$$\Leftrightarrow \Delta'_x=0\Leftrightarrow 9(1-2t)^2-4(9-16t-4t^2)\left[1+\frac{4t(5t+57)}{25}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (1-2t)\left[1-2t-4(9+2t)\left[1+\frac{4t(5t+57)}{25}\right]\right]=0$$

Dễ thấy $t=\dfrac{1}{2}$ là giá trị thỏa mãn. □

• Để có lời giải gọn và đẹp thì khi trình bày bài giải, chúng ta nhân thêm 2 vào phương trình sau thay vì nhân $\dfrac{1}{2}$ vào phương trình đầu. Từ đó ta có lời giải gọn và đẹp như trên.

Ví dụ 36— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)^2 + y = 3 \\ x^2 + 2xy - 5y^2 - 5x + 13y = 6 \end{cases}$

Lời giải: Chúng ta cũng thực hiện công việc nhân t như trên: Nhân t vào phương trình đầu rồi cộng theo vế 2 phương trình ta được:

$$(t-5)y^2 + y[2x(t-1)+t+13] + (t+1)x^2 - 5x - 3(t+2)$$

$$\Delta_y = [2x(t-1)+t+13]^2 - 4(t-5)\left[(t+1)x^2 - 5x - 3(t+2)\right]$$
$$= 8(3+t)x^2 - 4x(t^2+7t+12) + 9t^2 + 2t + 249 = f^2(x)$$

Khi xem xét phương trình này thì nhận thấy ngay $t = -3$ sẽ cho ta $f^2(x) = 18^2$ vì để ý $t^2 + 7t + 12 = (t+3)(t+4)$. Từ đó ta có lời giải. □

Một số ví dụ thêm:

Ví dụ 37— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x + y \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

Ví dụ 38— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3x - 2 \\ 2(x+y-1) = 2xy \end{cases}$

Ví dụ 39— (THTT số 379, tháng 1 năm 2011)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16xy - 8y + 16 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 40— (ĐH CĐ khối A, năm 2008)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Ví dụ 41— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = xy + x + y \end{cases}$

• Một số lưu ý khi sử dụng phương pháp (Xem ở phần tản mạn)

Cần linh hoạt trong việc chọn lựa nhân t ở phương trình nào để thuận lợi trong việc phân tích. ......

• Mở rộng phương pháp:

• Cở sở suy luận: bạn có nghĩ, liệu có bắt buộc bậc của x và y trong hệ phải là bậc 2 cả. Đúng, để luôn giải được thì nhất thiết phải yêu cầu là cả 2 đều bậc 2. Tuy nhiên, cái hay của Toán chính là đa dạng, muôn màu muôn vẻ, bắt buộc chúng ta phải luôn tinh tế, sáng tạo hơn nữa trong phương pháp và suy nghĩ. Biết 1 chưa chắc đã giải được 10. Trước hết, hãy xem cái hệ sau.

Ví dụ 42— (Thi thử ĐH CĐ năm 2011)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases}$

Bậc cao nhất của x là 4, nhưng bậc của y lại là 2. Hơn thế nữa, nếu quan sát tinh ý hơn:

$$\begin{cases} x^4+2x^2(xy)+(xy)^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases}$$

(thì nên gom và xem xy là ẩn)
Nhân thêm hằng số t vào phương trình sau rồi cộng theo vế với phương trình đầu, ta được:

$$x^2y^2+2xy(t+x^2)+x^4+tx^2-2x(1+3t)-9-6t=0$$

$$\Delta'_{xy}=(t+x^2)^2-x^4-tx^2+2x(1+3t)+9+6t=tx^2+2x(1+3t)+(t+3)^2=f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_x=(1+3t)^2-4t(t+3)^2=0$$

Dễ thấy ngay $t=1$ là một nghiệm của phương trình nên hệ số cần nhân chính là 1.
Việc trình bày lời giải còn lại xin dành cho bạn đọc.
• Hệ này khá đặc biệt nhưng vì rút gọn ta thu được Δ_{xy} là một tam thức bậc 2.
Qua đó cơ sở phương pháp của chúng ta vẫn áp dụng được. Nhưng. Ví dụ sau thì sao?

Ví dụ 43— Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 1+x^2y^2=19x^2 \\ xy^2+y=-6x^2 \end{cases}$

• Nhận xét: chú ý bậc cao nhất của y như trên vẫn là bậc 2.
Nhưng có vấn đề gì cần bàn ở đây?
Nháp: Nhân t vào phương trình sau rồi cộng lại.