PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ

Trong quá trình học tập, tôi cảm thấy lượng giác là một phương pháp rất hay trong việc giải quyết nhiều bài toán số học, sau đây là một trong những ví dụ như vậy.

I-Một số cách chuyển bài toán qua lượng giác:

1/ Nếu biến x tham gia trong bài toán có điều kiện $|x| \le k \quad (k>0)$, ta đặt $x = k\cos\alpha$, $\alpha \in [0,\pi]$ hoặc $x = k\sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2/ Nếu $x \in \mathbb{R}$, đặt $x = \tan\alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

3/ Nếu hai biến tham gia bài toán có ràng buộc: $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2 \quad (a,b,c>0)$.

ta đặt : $x = \frac{c}{a}\sin\alpha$, $y = \frac{c}{b}\cos\alpha$, $\alpha \in [0,2\pi]$

4/ Nếu ba biến x, y, z tham gia bài toán có ràng buộc $x+y+z = xyz$ hoặc $xy+yz+zx = 1$ thì có thể đặt $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$, $z = \tan\gamma$ với $\alpha,\beta,\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

5/ Một số biểu thức thường gặp khác:

Biểu thức	Cách đặt x	Miền giá trị của biến
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a\tan\alpha$	$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = a\cos\alpha \\ x = a\sin\alpha \end{array}\right.$	$a \in [0,\pi]$ $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = \frac{a}{\cos\alpha}$	$\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$
$\frac{x+y}{1-xy}$ hoặc $\frac{x-y}{1+xy}$	$\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan\beta \end{cases}$	$\alpha,\beta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

II-Ứng dụng của phương pháp:

1. Chứng minh các hệ thức đại số:

✪Bài toán 1: ***(Đại học Dược Hà Nội 1995)***

Cho x, y, z > 0 và thoả mãn $xy+yz+zx = 1$, tính giá trị của biểut thức:

$$M = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Giải: Đặt $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$, $z = \tan\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Theo giả thiết ta có

$$\tan\alpha.\tan\beta + \tan\beta.\tan\gamma + \tan\gamma.\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Ta có $x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = \tan\alpha.\sqrt{\frac{(1+\tan^2\beta)(1+\tan^2\gamma)}{1+\tan^2\alpha}} = \tan\alpha.\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta.\cos^2\gamma}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta.\cos\gamma}$

$$=\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos\beta.\cos\gamma}=\frac{\cos\beta.\cos\gamma-\sin\beta.\sin\gamma}{\cos\beta.\cos\gamma}=1-\tan\beta.\tan\gamma=1-yz\cdot$$

Tương tự cho hai biểu thức còn lại, ta được:

$$M=(1-yz)+(1-zx)+(1-xy)=3-(xy+yz+zx)=2$$

✪Bài toán 2: Cho *a, b, c > 0* thoả mãn *ab+bc+ca=1.* Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{bc(1+a^2)}+\frac{1}{ca(1+b^2)}+\frac{1}{ab(1+c^2)}=\frac{2}{abc\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+b^2}.\sqrt{1+c^2}}.$$

Giải: Đ ặt $a=\tan\alpha,\ b=\tan\beta,\ c=\tan\gamma\quad \alpha,\beta,\gamma\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Từ giả thiết ta có :

$$\tan\alpha.\tan\beta+\tan\beta.\tan\gamma+\tan\gamma.\tan\alpha=1\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

Ta có: $\dfrac{1}{bc(1+a^2)}=\dfrac{1}{\tan\beta.\tan\gamma(1+\tan^2\alpha)}=\cot\beta.\cot\gamma.\cos^2\alpha$

Tương tự cho các biểu thức còn lại, ta được vế trái

$$=\cot\alpha.\cot\beta.\cot\gamma\left(\tan\alpha.\cos^2\alpha+\tan\beta.\cos^2\beta+\tan\gamma.\cos^2\gamma\right)=\frac{1}{2}\cot\alpha.\cot\beta.\cot\gamma\left(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cot\alpha.\cot\beta.\cot\gamma.4\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma\quad (\text{Vì } 2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi)$$

$$=2\cot\alpha.\cot\beta.\cot\gamma.\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma=\frac{2}{abc.\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+b^2}.\sqrt{1+c^2}}\qquad (\text{đpcm})$$

Một số bài tập tự luyện:

☆Bài 1: Cho xy + yz + zx = 1. Chứng minh rằng :

a) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)+\left(y-\frac{1}{y}\right)\left(z-\frac{1}{z}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=4$

b) $x+y+z-3xyz=x\left(y^2+z^2\right)+y\left(z^2+x^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)$

☆Bài 2: Cho $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$1+xyz=x\sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-z^2)}+z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

☆Bài 3: Cho $x+y+z+xy+yz+zx=1+xyz$, $xyz\neq0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1-x^2}{x}+\frac{1-y^2}{y}+\frac{1-z^2}{z}=\frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{4xyz}$$

☆Bài 4: Cho $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+x}{1-x}.\frac{1+y}{1-y}.\frac{1+z}{1-z}\quad (x,y,z\neq1)$. Chứng minh :

1/ $\dfrac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\quad (1)$

2/ $\dfrac{(1-xy)^2-(x+y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\dfrac{2z}{1+z^2}\quad (2)$

☆Bài 5: Cho x, y, z > 0 và thoả mãn $x+y+z+xy+yz+zx=1+xyz$. Chứng minh rằng

$$\sum_{sym}\frac{\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)}-\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+z^2}}{yz}=0$$

2. Bất đẳng thức, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

✪Bài toán 1: ***(Đại học kiến trúc TP.HCM 1993).*** Chứng minh nếu $|x|<1$ và n là một số tự nhiên lớn hơn 1 thì ta có:

$(1+x)^n+(1-x)^n<2^n$ (1) .

Giải: Vì $|x|<1$ nên ta đặt $x=\cos t$, $t\in(0;\pi)$, khi đó (1) $\Leftrightarrow(1+\cos t)^n+(1-\cos t)^n<2^n$

Ta có : $(1+\cos t)^n+(1-\cos t)^n=2^n\left(\cos^{2n}\frac{t}{2}+\sin^{2n}\frac{t}{2}\right)$

Vì ta có $0<\frac{t}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}<1$ nên $\cos^{2n}\frac{t}{2}<\cos^2\frac{t}{2}$; $\sin^{2n}\frac{t}{2}<\sin^2\frac{t}{2}$

$\Rightarrow 2^n\left(\cos^{2n}\frac{t}{2}+\sin^{2n}\frac{t}{2}\right)<2^n\left(\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}\right)<2^n$ $\Rightarrow$ đpcm

✪**Bài toán 2:** Cho $x^2+y^2-2x-4y+4=0$. Chứng minh rằng :

$$\left|x^2-y^2+2\sqrt{3}xy-2\left(1+2\sqrt{3}\right)x+\left(4-2\sqrt{3}\right)y-3+4\sqrt{3}\right|\le 2$$

Giải: Ta có: $x^2+y^2-2x-4y+4=0\Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=1$

Đặt $x-1=\sin\alpha$, $y-2=\cos\alpha$,$\alpha\in(0;2\pi)\Rightarrow x=1+\sin\alpha, y=2+\cos\alpha$

$A=x^2-y^2+2\sqrt{3}xy-2\left(1+2\sqrt{3}\right)x+\left(4-2\sqrt{3}\right)y-3+4\sqrt{3}=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

Suy ra $|A|\le 2$ (đpcm)

✪**Bài toán 3:** Cho $0\le a_i\le 1,\ i=1,2,.....,n\quad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+a_1^2\right)\left(1+a_2^2\right)........\left(1+a_n^2\right)+\left(1-a_1^2\right)\left(1-a_2^2\right)........\left(1-a_n^2\right)\le 2^n$$

Giải: Đặt $a_i=\tan\frac{\alpha_i}{2}\quad\left(0\le\alpha_i\le\frac{\pi}{2}\right)$, vì $\cos\alpha_i\ge 0\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ nên hiển nhiên ta có:

$(1+\cos\alpha_1)(1+\cos\alpha_2).....(1+\cos\alpha_n)\ge 1+\cos\alpha_1.\cos\alpha_2........\cos\alpha_n$ (1)

Thay $\cos\alpha_i=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha_i}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha_i}{2}}$ thay vào (1) ta có $\prod_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{1-a_i^2}{1+a_i^2}\right)\ge 1+\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1-a_i^2}{1+a_i^2}$

Hay $\prod_{i=1}^{n}\left(1+a_i^2\right)+\prod_{i=1}^{n}\left(1-a_i^2\right)\le 2^n$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=.......=a_n=1$.

Bài tập tự luyện:

✫**Bài 1:** Chứng minh với $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, ta có:

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}\le\frac{|x-z|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+z^2}}+\frac{|z-y|}{\sqrt{1+z^2}.\sqrt{1+y^2}}$$

✫**Bài 2:** Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$ và thoả mãn $\begin{cases}0<a,b,c<1\\ab+bc+ca=1\end{cases}$, Tìm Min của biểu thức : $S=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}$

✫**Bài 3:**

a) Cho x,y,z thoả $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm Max của $A=xy+yz+2zx$.

b) Cho a, b, c thoả mãn $a^2+9b^2+9c^2+6=k^2$ (k là hằng số dương). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B=1+9ab+9ac+6bc$.

✫**Bài 4:** ***(Vietnam MO 1998).*** Xét các số thực dương a,b,c thoả mãn điều kiện $abc+a+c=b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$.

✫**Bài 5:** Cho 13 số thực $a_1,a_2,........,a_{13}$ khác nhau đôi một. Chứng minh rằng tồn tại hai số $a_j,\ a_k\ (1\le j,k\le 13)$ sao cho : $0<\frac{a_j-a_k}{1+a_ja_k}<\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

☆**Bài 6:** Cho bốn số thực dương. CMR: luôn tồn tại hai số x, y sao cho: $0 \le \dfrac{x-y}{1+x+y+2xy} < 2-\sqrt{3}$.

3. Phương trình, hệ phương trình , bất phương trình:

✪**Bài toán 1:** Giải phương trình sau: $32x\left(x^2-1\right)\left(2x^2-1\right)^2 = 1-\dfrac{1}{x}$ ở trong khoảng (0;1).

Giải: Với $x \in (0;1)$, đặt $x = \cos t$, $t \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó ta có phương trình:

$$32\cos t\left(\cos^2 t-1\right)\left(2\cos^2 t-1\right)^2 = 1-\frac{1}{\cos t} \Leftrightarrow 32\cos^2 t.\sin^2 t.\cos^2 2t = 1-\cos t$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 2t.\cos^2 2t = 1-\cos t \Leftrightarrow 2\sin^2 4t = 1-\cos t \Leftrightarrow 1\text{-}\cos 8t = 1\text{-}\cos t$$

$$\Leftrightarrow \cos 8t = \cos t \Leftrightarrow 8t = \pm t + k.2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\dfrac{2\pi}{7} \\ t = k\dfrac{2\pi}{9} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, ta được $t = \dfrac{2\pi}{7}; t = \dfrac{2\pi}{9}; t = \dfrac{4\pi}{9}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là : $x = \cos\dfrac{2\pi}{7}$, $x = \cos\dfrac{2\pi}{9}$, $x = \cos\dfrac{4\pi}{9}$.

✪**Bài toán 2:** ***(Vô định quốc gia 1984).*** Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right) = 2+\sqrt{1-x^2} \quad (1)$.

Giải: ĐK: $\begin{cases} 1+x \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Đặt $x = \cos t$, $0 \le t \le \pi$, khi đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt{1+\sin t}\left(\sqrt{(1+\cos t)^3}-\sqrt{(1-\cos t)^3}\right) = 2+\sin t$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)^2}\left(\cos^3\frac{t}{2}-\sin^3\frac{t}{2}\right).2\sqrt{2} = 2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\left(1+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\right).2\sqrt{2} = 2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin t\right).2\sqrt{2} = 2+\sin t \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos t\,(2+\sin t) = 2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos t = 1 \Leftrightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

✪**Bài toán 3:** Giải phương trình $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{2}-1\right)^x + 3$ (*)

Giải: Nhận xét rằng $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1$, $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}$; $\left(\sqrt{2}-1\right)^x = \left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}$

Đặt $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 2t\ (t > 0)$. Khi đó ta có phương trình: $4t^2 = \dfrac{1}{2t}+3 \Leftrightarrow 4t^3-3t = \dfrac{1}{2}$ (1).

Dễ dàng chứng minh pt trên chỉ nghiệm $t \in [-1;1]$, nên ta đặt $t = \cos\alpha, \left(\alpha \in [0;\pi]\right)$.

$$\Rightarrow 4t^3-3t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $\alpha \in [0;\pi] \Rightarrow \alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{9};\dfrac{5\pi}{9};\dfrac{7\pi}{9}\right\}$ $\Rightarrow$ pt (1) có 3 nghiệm $t \in \left\{\cos\dfrac{\pi}{9};\cos\dfrac{5\pi}{9};\cos\dfrac{7\pi}{9}\right\}$.

Khi đó nghiệm của pt (*) là $x \in \left\{ \log_{\sqrt{2}+1}\left(2\cos\frac{\pi}{9}\right); \log_{\sqrt{2}+1}\left(2\cos\frac{5\pi}{9}\right); \log_{\sqrt{2}+1}\left(2\cos\frac{7\pi}{9}\right) \right\}$.

Một số bài tập tự luyện:

☆**Bài 1**: ***(Đề thi Olympic 30-4-1994).*** Giải phương trình : $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1$

☆**Bài 2:** ***(Đề thi Olympic 30-4-2000).*** Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$(4m-3)\sqrt{x+3} + (3m-4)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0$$

☆**Bài 3:** ***(Thi HSG trường PTNK-ĐHQGTPHCM 2000)***. Giải phương trình:

$$2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$$

☆**Bài 4:** ***(IMO 1976)***. Cho $f(x) = x^2 - 2$. Đặt $f_2(x) = f(f(x))$; $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$.

Chứng minh rằng pt : $f_n(x) = 0$ có đúng 2^n nghiệm phân biệt.

☆**Bài 5:** ***(Đề nghị Olympic 30-4-2000, tinh Tiền Giang).*** Giải phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x = y(3x^2 - 1) \\ y^3 - 3y = z(3y^2 - 1) \\ z^3 - 3z = x(3z^2 - 1) \end{cases}$.

☆**Bài 6:** ***(Đề dự tuyển IMO 1995, Hoa Kì)***. Cho các số thực dương a, b, c, hãy tìm các số x, y, z sao cho :

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc \end{cases}$$

☆**Bài 7:** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$.

4. Tính giới hạn của dãy số

✪**Bài toán 1:** ***(Đề nghị Olympic 30-4-2000, tỉnh Đồng Tháp)***. Cho dãy số được xác định như sau:

$$x_0 = \sqrt{2}\ ,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\ ,\forall n \in \mathbb{N}.\ \text{Tìm } \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Giải: Ta có $x_0 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$; $x_1 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$, bằng quy nạp ta chứng minh được rằng

$x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$. Khi đó $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = 2\cos 0 = 2$.

✪**Bài toán 2:** Cho dãy số {u$_n$} : $u_1 = \sqrt{2}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} - 1}{(1-\sqrt{2})u_n + 1}$ $,n = 1,2,...$. Tính u_{2010}.

Giải: Đặt $u_1 = \sqrt{2} = \tan\varphi$, $\varphi \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, và chú ý rằng $\sqrt{2} - 1 = \tan\frac{\pi}{8}$. Khi đó

$$u_2 = \frac{\tan\varphi + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\varphi.\tan\frac{\pi}{8}} = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{8}\right),\ u_3 = \frac{\tan\left(\varphi + \frac{\pi}{8}\right) + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{8}\right).\tan\frac{\pi}{8}} = \tan\left(\varphi + 2.\frac{\pi}{8}\right).$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n = \tan\left(\varphi + (n-1)\frac{\pi}{8}\right)$, $\forall n \ge 1$.

Vậy nên $u_{2010} = \tan\left(\varphi + 2009\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\tan\varphi + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\varphi.\tan\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1}{1 - \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)} = 3 + \sqrt{2}$.

Bài tập tự luyện:

☆**Bài 1:** Cho hai dãy số {u$_n$} và {v$_n$} xác định như sau:

$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}} \\ v_0 = 1, v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+v_n^2}-1}{v_v} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. CMR: $2^{n+2}u_n < \pi < 2^{n+2}v_n$.

☆**Bài 2:** ***(Vietnam MO 1989).*** Cho dãy $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}, |x| \le 1$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(-x_n + \sqrt{3-3x_n}\right)$.

a) Cần có thêm điều kiện gì đối với x_1 để dãy $\{x_n\}$ gồm toàn số dương.
b) Dãy số này có tuần hoàn hay không? Vì sao?

☆**Bài 3:** Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}} \end{cases}$, $n = 1, 2, ...$

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số A sao cho dãy số $\{v_n\}$: $v_n = \dfrac{u_n}{A}$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Ứng dụng trong các bài toán tích phân:

Dạng tích phân	Đổi biến số	Điều kiện biến số
$\int f\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x = a\sin t$	$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\int f\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	$x = \dfrac{a}{\cos t}$	$t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$
$\int f\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$	$x = a\tan t$	$t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$
$\int f\left(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)dx$	$x = a\cos 2t$	$t = \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\int f\left(x, \sqrt{(x-a)(x-b)}\right)dx$	$x = a + (b-a)\sin^2 t$	$t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

✪**Bài thí dụ:** Tính $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}dx$.

Giải: Đặt $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$, đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}}.(-\sin t dt) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}}.\left(2\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}\right)dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\frac{t}{2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos t$$

$$= (t + \sin t)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$