Giải phương trình, hệ phương trình bằng phương pháp lượng giác hóa

Lời mở đầu:

Đứng trước những bài phương trình, hệ phương trình ta có rất nhiều hướng xử lí như *nâng lũy thừa,đặt ẩn phụ, dùng hằng đăng thức,bất đẳng thức,...* Tuy vậy không phải lúc nào ta cũng áp đặt một trong những phương pháp nêu trên để giải những bài phương trình,hệ phương trình đó.Có những hệ phương trình 3 ẩn mà hai phương trình,hoặc những hệ phương trình có số mũ rất lớn thì việc sử dụng các phương pháp thông thường sẽ đưa ta đến ngõ cụt.Nhưng thật may mắn thay một số bài phương trình,hệ phương trình lại có những điều kiện bó hẹp của biến giúp ta liên tưởng đến một số công thức lượng giác,từ đó mà ta tìm được phép đặt lượng giác phù hợp.Chính vì vậy tôi viết lên chuyên đề ***Giải phương trình, hệ phương trình bằng phương pháp lượng giác hóa*** để giúp các bạn yêu toán lại có thêm trong tay mình một phương pháp khá hay để giải quyết một số bài toán về phương trình, hệ phương trình. Khả năng hạn hẹp nên chuyên đề của tôi còn nhiều thiếu sót , rất mong ban đọc đóng góp và cho tôi ý kiến.Mọi thắc mắc xin liên hệ qua hòm thư *tranquan208@gmail.com*.Rất cảm ơn các bạn đã quan tâm đến chuyên đề này !!!

I.Một số phép đặt lượng giác cơ bản

1.Nếu$x \in [-a; a], a > 0$ thì đặt

$$\boxed{x = a\cos\alpha,\ \alpha \in [0;\pi]} \text{ hoặc } \boxed{x = a\sin\beta, \beta \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$$

2.Nếu $x \in \mathbb{R}$ thì đặt

$$\boxed{x = \tan t, t \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$$

3.Nếu $x^2 + y^2 = a (a > 0)$ thì đặt

$$\boxed{x = \sqrt{a}\sin t, y = \sqrt{a}\cos t, t \in [0; 2\pi]}$$

*Chú ý: Một số đẳng thức lượng giác :

$\boxed{1}$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{2}$ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\boxed{3}$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\boxed{4}$Với $\alpha; \beta; \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = m\pi (m \in \mathbb{Z})$$

$\boxed{5}$ Với $\alpha; \beta; \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\tan\alpha.\tan\beta + \tan\beta.\tan\gamma + \tan\gamma.\tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + n\pi (n \in \mathbb{Z})$$

II.Ví dụ

Ví dụ 1 : Giải phương trình:$4x^3 - \sqrt{1-x^2} - 3x = 0$

Giải:
Điều kiện: $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$
Với điều kiện đó ta đặt $x = \cos t, t \in [o;\pi](*)$,Phương trình đã cho trở thành:
$4\cos^3 t - \sqrt{1-\cos^2 t} - 3\cos t = 0$
$\Leftrightarrow \cos 3t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos 3t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)(**)$
Giải phương trình(**) kết hợp (*) $\Rightarrow t = \frac{\pi}{8}; t = \frac{5\pi}{8}$
Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = \cos\frac{\pi}{8}$ và $x = \cos\frac{5\pi}{8}$ $\square$

Ví dụ 2 :Giải phương trình : $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2+x}}}$

Giải: Điều kiện $0 < x \leqslant 2$
Với điều kiện đó ta đặt $x = 2\cos t, t \in (\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})(*)$
Ta được phương trình
$2\cos t = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \cos t}}}$
$\Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2 + \sqrt{2 - 2\cos\frac{t}{2}}}$
$\Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2 + 2\sin\frac{t}{4}}$
$\Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2}(\sin\frac{t}{8} + \cos\frac{t}{8}$
$\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(\frac{t}{8} + \frac{\pi}{4})$ (**)
Giải (**) kết hợp với điều kiện (*) ta được nghiệm phương trình là $x = \cos\frac{2\pi}{9}$ và x=cos $\frac{-2\pi}{7}$ $\square$

Nhận xét: Qua 2 ví dụ trên ta dễ dàng tìm được điều kiên của biến từ đó suy ra cách đặt lượng giác phù hợp.Lượng giác có một ưu điểm là khử căn bằng công thức hạ bậc, điều này là lợi thế lớn khi giải phương trình vô tỷ.
Bài tập tương tự:
Giải phương trình: $4x^3 + 2\sqrt{1-x^2} - 3x - 1 = 0$
Ví dụ sau ta xét đến lợi thế của nó về ưu điểm khử căn trong *Đề thi Vô địch Quốc gia 1984*

Ví dụ 3 Giải phương trình(*Vô địch Quốc gia 1984*)

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x^3)}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=2+\sqrt{1-x^2}$$

Giải: Điều kiện $x\in[-1;1]$ .Với điều kiện đó ta đặt $x=\cos\alpha,\alpha\in[0;\pi]$
Ta được phương trình:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\left(\sqrt{(1+\cos\alpha)^3}-\sqrt{(1-\cos\alpha)^3}\right)=2+\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+\sin\alpha}\left(\sqrt{8\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^3}-\sqrt{8\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^3}\right)=2+\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=2+\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=2+\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\alpha(2+\sin\alpha)=2+\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\square$

Ví dụ 4 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1\\(1-x)(1+y)=2\end{cases}$$

Giải: Điều kiện $x,y\in[-1;1]$
Với điều kiện đó đặt $x=\cos\alpha;y=\cos\beta;\alpha,\beta\in[0;\pi]$
Ta có hệ tương đương:

$$\begin{cases}\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha=1\\(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2} & (1)\\\cos\beta-\cos\alpha-\cos\alpha\cos\beta-1=0(2)\end{cases}$$

Giải (2): Đặt $\cos\beta-\cos\alpha=t(t\leqslant\sqrt{2})$

$\Rightarrow t^2=\cos^2\beta+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta$

$\Leftrightarrow t^2=\cos^2(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)+\cos\alpha-2\cos\beta\cos\alpha$

$\Leftrightarrow t^2=1-2\cos\beta\cos\alpha$

$\rightarrow -\cos\beta\cos\alpha=\dfrac{t^2-1}{2}$ thay vào (2)

Được phương trình: $t^2+\dfrac{t^2-1}{2}-1=0\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Rightarrow t=1$ (vì $t\leq\sqrt{2}$)

Với t=1 ta có : $\cos\beta-\cos\alpha=1$

$\Leftrightarrow\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}\rightarrow\beta=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ là nghiệm duy nhất của hệ $\square$

Ví dụ 5 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

Giải:

Nhận thấy hệ không có các nghiệm $(\pm1, y, z); (x, \pm1, z); (x, y, \pm1)$

Với $x, y, z \neq \pm1$, viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} \end{cases}$$

Với điều kiện đó đặt $x = \tan\alpha\ (1), \alpha \in (\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, với $\tan\alpha, \tan 2\alpha, \tan 4\alpha \neq \pm1$

Với $x = \tan\alpha \Rightarrow y = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \tan 2\alpha$

Với $y = \tan 2\alpha \Rightarrow z = \dfrac{2\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \tan 4\alpha$

Với $z = \tan 4\alpha \Rightarrow x = \dfrac{2\tan 4\alpha}{1 - \tan^2 4\alpha} = \tan 8\alpha\ \ (2)$

Từ (1) và (2) $\rightarrow \tan\alpha = \tan 8\alpha \Leftrightarrow \alpha = k\frac{\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$

Vì $\alpha \in (\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{-\pi}{2} < k\frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$

mà $k \in \mathbb{Z} \rightarrow k = \{0; \pm1; \pm2; \pm3\}$

Nên: $x = \tan k\frac{\pi}{7}; y = \tan k\frac{2\pi}{7}; z = \tan k\frac{4\pi}{7}$ với $k = \{0; \pm1; \pm2; \pm3\}$ $\square$

Nhận xét: Việc biến đổi hợp lí sẽ đưa ta liên tưởng những công thức lược giác thường gặp.Ví dụ trên đã sử dụng công thức nhân 2 của hàm $\tan\alpha$ để đưa các biến y, z, x lên các hàm $\tan 2\alpha, \tan 4\alpha, \tan 8\alpha$

Ghi nhớ:

$$\boxed{\tan 2t = \frac{2\tan t}{1 - \tan^2 t}}$$

Ví dụ tiếp theo ta lại sử dụng *công thức nhân 3* của hàm tan

Ví dụ 6 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3x = y(3x^2 - 1) \\ y^3 - 3y = z(3y^2 - 1) \\ z^3 - 3z = x(3z^2 - 1) \end{cases}$$

Giải:Nhận thấy hệ không có các nghiệm $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Với $x, y, z \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ta có hệ tương đương: $\begin{cases} y = \dfrac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1} \\ z = \dfrac{y^3 - 3y}{3y^2 - 1} \\ x = \dfrac{z^3 - 3z}{3z^2 - 1} \end{cases}$

Đặt $x = \tan t, t \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (1) với $\tan t, \tan 3t, \tan 9t \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Khi đó:

$y = \dfrac{\tan^3 t - 3\tan t}{3\tan^2 t - 1} = \tan 3t$

$z = \dfrac{\tan^3 3t - 3\tan 3t}{3\tan^2 3t - 1} = \tan 9t$

$x = \dfrac{\tan^3 9t - 3\tan 9t}{3\tan^2 9t - 1} = \tan 27t$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\tan t = \tan 27t \Leftrightarrow t = k\dfrac{\pi}{26}, k \in \mathbb{Z}$

Do $t \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \rightarrow \dfrac{-26}{2} < k < \dfrac{26}{2}$ mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0; \pm1; \pm2; ...; \pm12$ (*)

Vậy hệ có 25 nghiệm $(x; y; z) = \left(\tan k\dfrac{\pi}{26}; \tan k\dfrac{3\pi}{26}; \tan k\dfrac{9\pi}{26}\right)$ với k thỏa mãn (*) $\square$

Nhận xét:

• Với bài tập này phải sử dụng *công thức nhân 3* của hàm *tan* Ghi nhớ:

$$\boxed{\tan 3\alpha = \dfrac{\tan^3 \alpha - 3\tan \alpha}{3\tan^2 \alpha - 1}}$$

• Khi khai triển hệ trên ta được hệ khó "nhận" dạng hơn:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2y - 3x + y = 0 \\ y^3 - 3y^2z - 3y + z = 0 \\ z^3 - 3z^2x - 3z + x = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Chúng ta đưa về dạng : $\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$ rồi thử xem các hàm f, g có liên quan đến công thức lượng giác nào không rồi tìm phép đặt lượng giác phù hợp.Thường thì ta thường đặt $x = \tan\alpha, \alpha \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ vì không có điều kiện ràng buộc của biến.Một số trường hợp phải tìm điều kiện của biến để sử dụng phương pháp,ta sẽ xét chúng ở các ví dụ sau

Bài tập tương tự:Giải hệ phương trình:

$\boxed{1}$ $\begin{cases} zy^2 + 2y - z = 0 \\ x^3 - 3x^2y - 3x + y = 0 \\ z^3 - 3z^2x - 3z + x = 0 \end{cases}$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = 2y \\ y - \dfrac{1}{y} = 2z \\ z - \dfrac{1}{z} = 2x \end{cases}$

Công thức nhân 3 đã có bây giờ ta sẽ xét một ví dụ về *công thức nhân 5*

Ví dụ 7 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ 16x^5 - 20x^3 + 5x + 512y^5 - 160y^3 + 10y + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Giải:

Rõ ràng từ phương trình tứ nhất của hệ ta thấy xuất hiện $A^2 + B^2 = 1$ nên ta nghĩ ngay đến viện đặt $A = \sin t, B = \cos t$ khi đó chắc chắn sẽ tồn tại $t \in (0; 2\pi)$

Với $A = x, B = 2y$ nên ta đặt $x = \sin t, y = \cos t, t \in (0; 2\pi)$, ta được hệ phương trình:

$\begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ 16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t + 16 \cos^5 t - 20 \cos^3 t + 5 \cos t = -\sqrt{2} (*) \end{cases}$

Ta đi giải phương trình (*): Nhận thấy hệ số và bậc của hàm sin, cos bằng nhau.Điều đó giúp ta liên tưởng đến công thức lượng giác

$(*) \Leftrightarrow \sin 5t + \cos 5t = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 5t + \dfrac{\pi}{4} = -1 \Leftrightarrow t = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vì $t \in (0; 2\pi)$ mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1; 2; 3; 4; 5 \Rightarrow t$ nhận các giá trị

$$t = \frac{\pi}{4}; \frac{13\pi}{20}; \frac{21\pi}{20}; \frac{29\pi}{20}; \frac{27\pi}{20}$$

Kết luận:Nghiệm hệ phương trình

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right); \left(\sin \frac{13\pi}{20}; \frac{1}{2} \cos \frac{13\pi}{20}\right); \left(\sin \frac{21\pi}{20}; \frac{1}{2} \cos \frac{21\pi}{20}\right); \left(\sin \frac{29\pi}{20}; \frac{1}{2} \cos \frac{29\pi}{20}\right); \left(\sin \frac{37\pi}{20}; \frac{1}{2} \cos \frac{37\pi}{20}\right)$$

Nhận xét:

• Thoạt tiên, khi giải quyết hệ này ta thấy bậc ở phương trình thứ 2 rất lớn, lên tận bậc 5 $\rightarrow$ nghĩ đến việc sử dụng phương pháp *hằng đẳng thức, phương pháp đánh giá , phương pháp hàm*

• x, y đứng độc lập và các hệ số các hạng tử cùng bậc bằng nhau nên ta nghĩ đến việc sử dụng phương pháp hàm để giải nhưng sự xuất hiện của $\sqrt{2}$ làm công việc trở nên khó khăn

• Để ý kĩ một chút sự xuất hiện của phương trình thứ nhất $A^2 + B^2 = 1$ và $\sqrt{2}$ đã làm cho ta liên tưởng đến phép đặt lượng giác quen thuộc được nêu ở trên.

Đã liên tưởng đến phép đặt lượng giác nhưng công việc còn lại là khá rắc rối. Phương trình thứ 2 xuất hiện 3 loại bậc là 5,3,1 mà công thức nhân 5 ẩn chứa chúng

Ghi nhớ:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 5\alpha &= 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha \\ \sin 5\alpha &= 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha \end{aligned}}$$

Bài tập tương tự:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x+3y)^2 = 1 + 12xy \\ 512x^5 - 160x^3 + 12x + 3888y^5 - 540y^3 + 18y = 0 \end{cases}$

Ví dụ 8 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 4\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = 5\left(z + \dfrac{1}{z}\right) & (1) \\ xy + yz + zx = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $xyz \neq 0$ từ $xy + yz + zx = 1$ suy ra x, y, z phải cùng dấu

Nhận thấy nếu $(x; y; z)$ là một nghiệm của hệ thì $(-x; -y; -z)$ cũng là nghiệm của hệ . Do vậy ta chỉ cần tìm nghiệm dương của hệ $\rightarrow$ nghiệm còn lại

Xét trường hợp $x, y, z > 0$

Vì có sự xuất hiện $xy + yz + zx = 1$ nên ta đặt $x = \tan\alpha; y = \tan\beta; z = \tan\gamma$ $\left(0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2}\right)$

Từ phương trình (2): $\tan\alpha.\tan\beta + \tan\beta.\tan\gamma + \tan\gamma.\tan\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \tan\beta(\tan\alpha + \tan\gamma) = 1 - \tan\gamma\tan\alpha$

$\Leftrightarrow \tan\beta = \dfrac{1 - \tan\gamma\tan\alpha}{\tan\alpha + \tan\gamma} = \cot(\alpha + \gamma) \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$

Từ phương trình (1): $3\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan\alpha} = 4\dfrac{\tan^2\beta + 1}{\tan\beta} = 5\dfrac{\tan^2\gamma + 1}{\tan\gamma}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sin 2\alpha} = \dfrac{4}{\sin 2\beta} = \dfrac{5}{\sin 2\gamma}$

Ta có hệ tương đương: $\begin{cases} \dfrac{3}{\sin 2\alpha} = \dfrac{4}{\sin 2\beta} = \dfrac{5}{\sin 2\gamma} \\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2}; \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Từ hệ trên suy ra $2\alpha; 2\beta; 2\gamma$ là các góc của tam giác có cạnh tương ứng là 3;4;5 mà 3;4;5 là bộ 3 PY-TA-GO

Theo định lý sin trong tam giác $\rightarrow 2\gamma = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 45^\circ \Rightarrow z = \tan 45^\circ = 1$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{3} = x$

$\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1 - tan^2\beta} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \tan\beta = \dfrac{1}{2} = y$

Vậy hệ có 2 nghiệm là $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}; 1\right); \left(\dfrac{-1}{3}; \dfrac{-1}{2}; -1\right)$ $\square$

Ví dụ 9 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ \dfrac{x}{x + yz} + \dfrac{y}{y + zx} + \dfrac{z}{z + xy} = \dfrac{9}{4} & (2) \end{cases}$$

Giải:

Nhận thấy $x, y, z = 0$ không phải là nghiệm hệ

Viết lại phương trình (1) dưới dạng $\sqrt{\frac{xy}{z}}\sqrt{\frac{xz}{y}} + \sqrt{\frac{yz}{x}}\sqrt{\frac{yx}{z}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}\sqrt{\frac{zy}{x}} = 1$

Đặt $\sqrt{\frac{xy}{z}} = \tan\frac{A}{2}, \sqrt{\frac{xz}{y}} = \tan\frac{B}{2}, \sqrt{\frac{yz}{x}} = \tan\frac{C}{2}; A, B, C \in (0, \pi)$

ta được $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

Tương tự như ví dụ trên dễ dàng suy ra $A + B + C = \pi$

Phương trình (2):$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} = \frac{1}{1+tan^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+tan^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{1+tan^2\frac{C}{2}} = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{2} = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{3}{2}$ (*)

$\triangle' = 4(\cos^2\frac{B-C}{2} - 1) \geqslant 0$ .Mặt khác $\cos^2\frac{B-C}{2} - 1 \leqslant 0$

Nên (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2} \\ \sin\frac{B-C}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Từ đó suy ra $x = y = z = \frac{1}{3}$ $\square$

$\boxed{\text{Ví dụ 10}}$:Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn:

$$x^6 + y^6 + z^6 - 6(x^4 + y^4 + z^4) + 10(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^3y + y^3z + z^3x) + 6(xy + yz + zx) = 0$$

Giải: Phương trình tương đương với

$(x^3 - 3x - y)^2 + (y^3 - 3y - z)^2 + (z^3 - 3z - x)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 - 3x \\ x = z^3 - 3z \ (I) \\ z = y^3 - 3y \end{cases}$

+) Nếu $x > 2$ thì $y = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) > 2 \Rightarrow z = y(y^2 - 3) > 2$.Ta cộng 3 vế hệ (I) ta được:

$0 = x^3 + y^3 + z^3 - 4x - 4y - 4z = x(x^2 - 4) + y(y^2 - 4) + z(z^2 - 4) > 0$ (Vô lý)

+) Tương tự với trường hợp $x < 2$ thì hệ (I) không có nghiệm.Vậy $|x| \leqslant 2$

Với điều kiện đó ta đặt $x = 2\cos t, t \in [0; \pi]$ ta đươc hệ: $\begin{cases} y = 2(4\cos^3 t - 3\cos t) = 2\cos 3t \\ x = 2(4\cos^3 3t - 3\cos 3t) = 2\cos 9t \\ z = 2(4\cos^3 9t - 3\cos 9t) = 2\cos 27t \end{cases}$

Từ hệ trên suy ra $\cos t = \cos 27t \Leftrightarrow t = k\frac{\pi}{13}, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $t = l\frac{\pi}{14}, l \in \mathbb{Z}$

mà $t \in [0; \pi]$ nên $k = 0; 1; 2; ...; 13$ hoặc $l = 0; 1; 2; ..; 14$

Vậy bộ 3 số (x, y, z) cần tìm là $(2\cos t; 2\cos 3t; 2\cos 9t)$ với $t = k\frac{\pi}{13}, k = 0; 1; 2; ...; 13$ hoặc $t = l\frac{\pi}{14}, l = 0; 1; 2; ..; 14$.Có 27 bộ 3 số thỏa mãn $\square$

Nhận xét:
Không giống như các ví dụ trước,điều kiện của biến thường được thấy rõ từ điều kiện xác định của phương trình.Ở ví dụ này,chúng ta phải tìm điều kiện chặt của biến để từ đó tìm ra phép đặt lượng giác. Bài tập tương tự:
Tìm tất cả các giá trị của tổng $S = x + y + z$;biết rằng x, y, z là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y(4-y) \\ y = z(4-z) \\ z = x(4-x) \end{cases}$$

III.Bài tập tự luyện

Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

$\boxed{1}$ $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{2}$ $2x + (4x^2-1)\sqrt{1-x^2} = 4x^3 + \sqrt{1-x^2}$

$\boxed{3}$ $2 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x^2$

$\boxed{4}$ $8x.(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) = 1, x \in (0;1)$

$\boxed{5}$ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ 2xy + yz + zx = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\boxed{6}$ $\begin{cases} x+y+z = xyz \\ x(y^2-1)(z^2-1) + y(x^2-1)(z^2-1) + z(x^2-1)(y^2-1) = 0 \end{cases}$

$\boxed{7}$ $\begin{cases} (1+x^2+x^2y+y)^2 = 8(x^2+x^2y) \\ (1+y^2+y^2z+z)^2 = 8(y^2+y^2z) \\ (1+z^2+z^2x+x)^2 = 8(z^2+z^2x) \end{cases}$

$\boxed{8}$ $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ \sqrt{\dfrac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\dfrac{yz}{x+yz}}\sqrt{\dfrac{zx}{y+zx}} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\boxed{9}$ $\begin{cases} 0 < x, y, z < 1 \\ xy + yz + zx = 1 \\ \dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\boxed{10}$ $\begin{cases} z^2 + 2xyz = 1 \\ 3x^2y^2 + 3xy^2 = 1 + x^3y^4 \\ z + zy^4 + 4y^3 = 4y + 6y^2z \end{cases}$

$\boxed{11}$ $\begin{cases} 2z(x+y) + 1 = x^2 - y^2 \\ y^2 + z^2 = 1 + 2xy + 2zx - 2yz \\ y(3x^2-1) = -2x(x^2+1) \end{cases}$

$\boxed{12}$ Tìm nghiệm dương của hệ:

$\begin{cases} x+y+z = a+b+c \\ 4xyz - a^2x - b^2y - c^2z = abc \end{cases}$ trong đó a, b, c là các số dương cho trước