Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 19 − 21 мая 2006 года

Решения (Группа B)

1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+(tgx)^{\sqrt{3}}}$.

♢ **Ответ:** $\dfrac{\pi}{4}$. Имеем

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}} = [t=\pi/2-x] = -\int\limits_{\pi/2}^{0} \frac{dt}{1+(\mathrm{ctg}t)^{\sqrt{3}}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{(\mathrm{tg}t)^{\sqrt{3}}}{1+(\mathrm{tg}t)^{\sqrt{3}}}dt = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}}dx.$$

Откуда $I+I = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{1}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}}dx + \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{3}}}dx = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \dfrac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad I = \dfrac{\pi}{4}$. ■

2. Вычислите A^{200}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

♢ **Ответ:** $\begin{pmatrix} 1 & -200 & 200 \\ -200 & 19901 & -19900 \\ -200 & 19900 & -19899 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицу $B = A - E$, где E — единичная матрица. Имеем

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$A^{200}(E+B)^{200} = E + 200B + \frac{200\cdot 199}{2}B^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 200\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 19900\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 200 \\ -200 & 19901 & -19900 \\ -200 & 19900 & -19899 \end{pmatrix}. ■$$

3. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{d^{2006}}{dx^{2006}}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)$.

♢ Ответ: $-\dfrac{2^{1003}}{2007\cdot 2008}$.

Воспользуемся разложением функции $\sin^2 x$ в ряд Тейлора:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2x)^{2k}}{(2k)\,!}\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2x)^{2k}}{(2k)\,!}.$$

Поэтому $\dfrac{\sin^2 x}{x^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}2^{k-1}x^{2k-2}}{(2k)\,!} = P(x) + \dfrac{(-1)^{1005}2^{1003}x^{2006}}{2008\,!} + x^{2007}f(x)$, где $P(x)$ — полином степени 2005, $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Легко видеть, что $(P(x))^{(2006)} \equiv 0$ и $(x^{2007}f(x))^{(2006)}|_{x=0} = 0$ (последнее равенство следует из того, что $x=0$ — ноль 2007 порядка для функции $x^{2007}f(x)$). Поэтому $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{d^{2006}}{dx^{2006}}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right) = -\dfrac{2^{1003}2006\,!}{2008\,!} = -\dfrac{2^{1003}}{2007\cdot 2008}$. ■

4. Найдите такие функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что для всех действительных x выполнены равенства

$$\begin{cases} (f(x))^3 - 3f(x)(g(x))^2 = \cos 3x, \\ 3(f(x))^2 g(x) - (g(x))^3 = \sin 3x. \end{cases}$$

$\diamondsuit$ Ответ: $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$. Прибавим к первому уравнению системы второе уравнение, умноженное на i:

$$(f(x))^3 + 3i\,(f(x))^2\,g(x) - 3f(x)\,(g(x))^2 - i\,(g(x))^3 = \cos 3x + i\sin 3x \quad\Longleftrightarrow\quad (f(x)+ig(x))^3 = e^{3ix}.$$

Поэтому $f(x)+ig(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$, и так как обе функции действительнозначные, то $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$. Непосредственная проверка показывает, что обе найденные функции удовлетворяют исходной системе. ■

5. Найдите наименьший объем тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью, касательной к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

$\diamondsuit$ **Ответ:** $V_{min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$. Не нарушая общности, считаем $a>0$, $b>0$, $c>0$; кроме того, в силу симметрии, можно считать, что точка касания (x_0,y_0,z_0) находится в первом октанте. Вектор нормали к касательной плоскости в точке (x_0,y_0,z_0) имеет вид $N=\left(\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},\dfrac{2z_0}{c^2}\right)$. Поэтому уравнение касательной плоскости в этой точке

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1.$$

Следовательно, объем полученного тетраэдра равен

$$V(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0}\cdot\frac{c^2}{z_0} \quad\Longrightarrow$$

$$V^2(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{36}a^2b^2c^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}\cdot\frac{z_0^2}{c^2}\right)^{-1} \geq \left[\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\leq\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{36}a^2b^2c^2\frac{3^3}{\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)^3} = \frac{3}{4}a^2b^2c^2 \quad\Longrightarrow\quad V(x_0,y_0,z_0)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

Равенство достигается при $\dfrac{x_0}{a^2}=\dfrac{y_0}{b^2}=\dfrac{z_0}{c^2}=\dfrac{1}{3}$, т.е. при $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b$, $z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}c$. ■

6. Функция $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in R$, удовлетворяет условию $|f(x)|\leq 1$ при всех $x\in[-1,1]$. Докажите, что $|f'(x)|\leq 4$ при всех $x\in[-1,1]$.

$\diamondsuit$ Не нарушая общности, считаем $a\geq 0$, $b\geq 0$.

При $a>0$ имеем

$$\max_{|x|\leq 1}|f'(x)| = \max_{|x|\leq 1}|2ax+b| = \max\{2a+b,-2a+b\} = 2a+b. \tag{1}$$

Кроме того,

$$\max_{|x|\leq 1}|f(x)|\leq 1 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} f(1)\leq 1, \\ f(0)\geq -1, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} a+b+c\leq 1, \\ c\geq -1, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad a+b\leq 2 \quad\Longrightarrow\quad a\leq 2.$$

Тогда из (1) получаем $\max\limits_{|x|\leq 1}|f'(x)| = 2a+b = a+(a+b)\leq 4$.

Если же $a=0$, то

$$|f'(x)| = |b| = |\frac{f(1)-f(-1)}{2}| \leq \frac{1}{2}\left(|f(1)|+|f(-1)|\right)\leq 1.$$

Заметим, что требуемая оценка для производной f' достижима, например, при $f(x)=2x^2-1$. ■