

DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC VMF

CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN PHỔ THÔNG

TẬP 2

Tháng 06/2015

Lời nói đầu

Tài liệu này không phải là tài liệu chính thức của Diễn đàn toán học (VMF) nhưng do cá nhân tôi là thành viên của trang diễn đàn thảo luận toán học này nên tôi xin mạo muội ghi xuất xứ là VMF mong quản trị của trang web bỏ qua yếu tố trên.

Hàng năm mỗi giáo viên trung học phổ thông đều làm một sáng kiến kinh nghiệm về lĩnh vực chuyên môn giảng dạy, tuy nhiên lượng kiến thức mà thầy (cô) dày công bỏ ra nghiên cứu đa phần bị bỏ quên. Hôm nay tôi cố gắng tổng hợp lại các sáng kiến kinh nghiệm để đưa vào chung thành một tài liệu "CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN PHỔ THÔNG". Để tiện cho việc tổng hợp và theo dõi, tôi chia ra thành nhiều tập với độ dày mỗi tập tầm khoảng 50 trang. Chỉ là việc tổng hợp nội dung các sáng kiến để cho các bạn tham khảo nên có điều gì sai sót mong các bạn bỏ qua.

Người tổng hợp
CD13

Tập 2 này gồm các nội dung:

- + Ứng dụng tỉ số thể tích trong giải toán hình học không gian.
- + Một số kĩ năng giải tích phân.
- + Một vài cách nhớ công thức lượng giác.
- + Một phương pháp chứng minh bất đẳng thức.
- + Phương trình mặt cầu và ứng dụng.
- + Ứng dụng đạo hàm vào chứng minh bất đẳng thức.

ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH TRONG GIẢI TOÁN HHKG

CƠ SỞ LÝ THUYẾT.

Bài toán 1: (Bài 4 sgk HH12CB trang 25)

Cho khối chóp $S.ABC$, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác điểm S . CMR: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ (1)

Giải:

Gọi H và H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và A' lên (SBC)

Ta có $AH \parallel A'H'$. Ba điểm S, H, H' cùng thuộc hai mp $(AA'H'H)$ và (SBC) nên chúng thẳng hàng. Xét $\triangle SAH$ ta có $\frac{SA'}{SA} = \frac{A'H'}{AH}$ (*)

Do đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3} A'H' \cdot S_{\triangle SB'C'}}{\frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle SBC}} = \frac{A'H'}{AH} \cdot \frac{SB' \cdot SC' \cdot \sin \widehat{B'SC'}}{SB \cdot SC \cdot \sin \widehat{BSC}} (**)$$

Từ (*) và (**) ta được đpcm $\square$

Trong công thức (1), đặc biệt hoá, cho $B' \equiv B$ và $C' \equiv C$ ta được

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \quad (1')$$

Ta lại có

$$V_{S.ABC} = V_{S.A'BC} + V_{A'.ABC}$$

$$(1') \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{SA'}{SA} \cdot V_{S.ABC} + V_{A'.ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{A'.ABC}}{V_{S.ABC}} = 1 - \frac{SA'}{SA} = \frac{A'A}{SA}$$

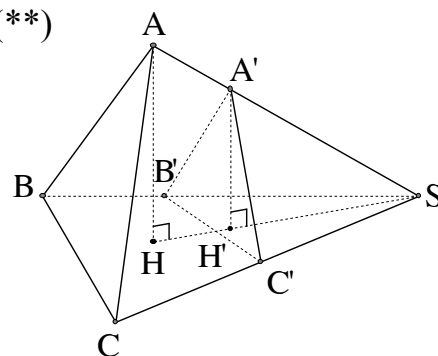
$$\text{Vậy: } \frac{V_{A'.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{A'A}{SA} \quad (2)$$

Tổng quát hoá công thức (2) ta có bài toán sau đây:

Bài toán 2: Cho khối chóp đỉnh S , đáy là 1 đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$), trên đoạn thẳng SA_1 lấy điểm A_1' không trùng với A_1 . Khi đó ta có

$$\frac{V_{A_1'.A_1A_2 \dots A_n}}{V_{S.A_1A_2 \dots A_n}} = \frac{A_1'A_1}{SA_1} \quad (2')$$

Chứng minh (2') bằng phương pháp quy nạp theo n ; ta chia khối chóp $S.A_1A_2 \dots A_n$ thành các khối chóp tam giác rồi áp dụng công thức (2)



DẠNG 1: TÍNH TỈ SỐ THỂ TÍCH CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Ví dụ 1:

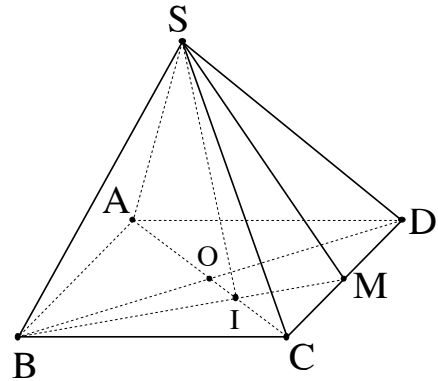
Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, gọi M là trung điểm của CD và I là giao điểm của AC và BM. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S.ICM và S.ABCD hoctoanapba. com

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có I là trọng tâm của tam giác BCD, do đó

$$V_{ISCM} = \frac{1}{3} V_{B.SCM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{D.SBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{ISCM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}$$



Ví dụ 2:

Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi B', D' lần lượt là trung điểm của SB và SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp được chia bởi mp(AB'D')

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD và I là giao điểm của SO và B'D'. Khi đó AI cắt SC tại C' Ta có

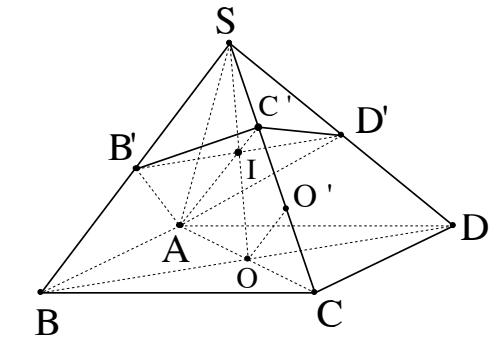
$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC};$$

$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

$$\text{Suy ra } V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC} (V_{S.ABC} + V_{S.ACD}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC} V_{S.ABCD}$$

Kẻ OO' // AC' (O' ∈ SC). Do tính chất các đường thẳng song song cách đều nên ta có SC' = C'O' = O'C

$$\text{Do đó } V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} V_{S.ABCD} \text{ Hay } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$$



* Bài tập tham khảo:

Bài 1: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, đáy ABC là tam giác đều có trục tâm H và cạnh bằng a. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA và M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn SI, SJ, SK. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp H.MNP và S.ABC. Từ đó tính thể tích khối chóp H.MNP

$$\text{ĐS: } \frac{V_{H.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{32}$$

Bài 2:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) qua AB cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Tính $\frac{SM}{SC}$ để mặt phẳng (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

ĐS: $\frac{SM}{SC} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

DẠNG 2: ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH

Ví dụ 1:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90^\circ$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Tính thể tích khối chóp S.BCNM theo a

Giải:

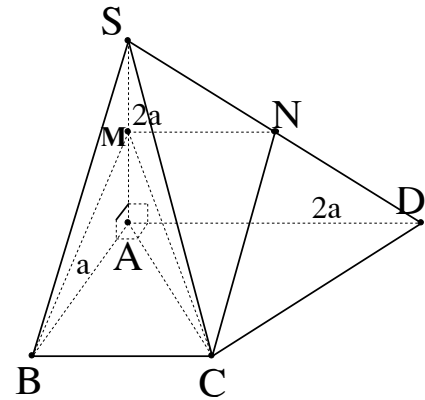
Áp dụng công thức (1) ta có

$$\frac{V_{S.BCM}}{V_{S.BCA}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_{S.CMN}}{V_{S.CAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} V_{S.BCNM} &= V_{S.BCM} + V_{S.CNM} = \frac{1}{2}V_{S.BCA} + \frac{1}{4}V_{S.CAD} \\ &= \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \frac{2a^3}{4 \cdot 3} = \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$



Ghi chú:

1/ Việc tính thể tích khối S.BCNM trực tiếp theo công thức $V = \frac{1}{3}B.h$ gặp nhiều

khó khăn, nhưng nếu dùng tỉ số thể tích, ta chuyển việc tính thể tích khối S.BCNM về tính V_{SBCA} và V_{SCAD} dễ dàng hơn rất nhiều

2/ Khi dạy học có thể yêu cầu học sinh tính thể tích khối đa diện ABCDMN

Ví dụ 2:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Tính thể tích khối tứ diện CMNP theo a

Giải:

Ta có

$$\frac{V_{CMNP}}{V_{CMBD}} = \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CP}{CD} = \frac{1}{4} \quad (a)$$

$$\frac{V_{CMBD}}{V_{CSBD}} = \frac{V_{M.BCD}}{V_{S.BCD}} = \frac{MB}{SB} = \frac{1}{2} \quad (b)$$

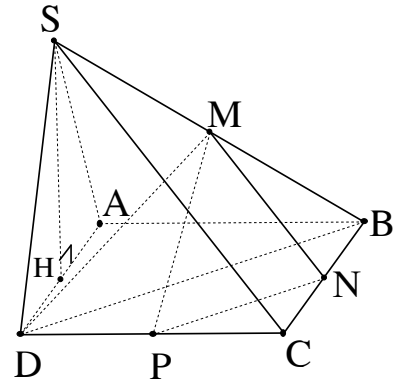
Lấy (a) x (b) về theo về ta được

$$\frac{V_{CMNP}}{V_{S.BCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{8} V_{S.BCD}$$

Gọi H là trung điểm của AD ta có $SH \perp AD$ mà $(SAD) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Do đó } V_{S.BCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vậy: } V_{CMNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96} \text{ (đvtt)}$$



Ví dụ 3:

Cho khối chóp D.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, DA = 2a và DA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng DB và DC. Tính thể tích khối chóp A.BCMN theo a

Giải:

$$\text{Ta có } \frac{V_{DAMN}}{V_{DABC}} = \frac{DM}{DB} \cdot \frac{DN}{DC}$$

AM và AN lần lượt là các đường cao trong các tam giác vuông DAB và DAC bằng nhau nên ta có

$$\frac{DM}{MB} = \frac{DA^2}{AB^2} = \frac{4a^2}{a^2} = 4 \Rightarrow \frac{DM}{DB} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Tương tự } \frac{DN}{DC} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Do đó } V_{D.AMN} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot V_{D.ABC} = \frac{16}{25} \cdot V_{D.ABC} \text{ Suy ra } V_{A.BCMN} = \frac{9}{25} \cdot V_{D.ABC}$$

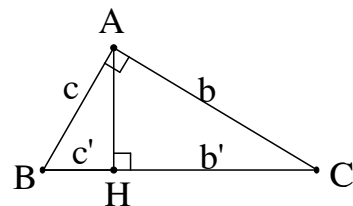
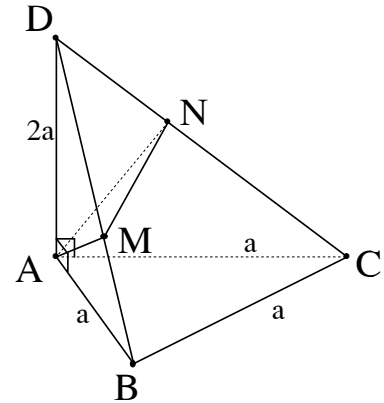
$$\text{Mà } V_{D.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \text{ Vậy } V_{A.BCMN} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50} \text{ (đvtt)}$$

Ghi chú:

Ta có hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC

$$\text{sau đây } \frac{b'}{c'} = \frac{b^2}{c^2}$$

(Chứng minh dựa vào tam giác đồng dạng)



Ví dụ 4:

Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = SA = a$, $AD = a\sqrt{2}$. SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, gọi I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích khối tứ diện ANIM theo a hoctoan capba.com

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có I là trọng tâm của tam giác ABD, do đó

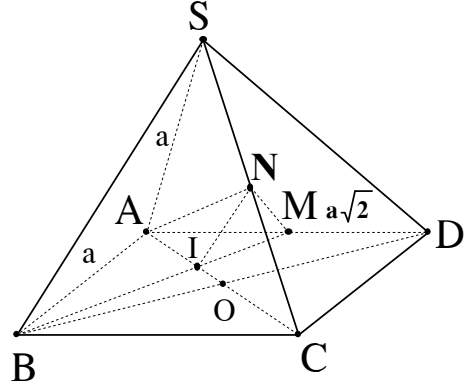
$$\frac{AI}{AO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{nên } \frac{V_{AIMN}}{V_{ACDN}} = \frac{AI}{AC} \cdot \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{ACDN}}{V_{ACDS}} = \frac{NC}{SC} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{V_{AIMN}}{V_{ACDS}} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Mà } V_{SACD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}. \text{ Vậy } V_{AIMN} = \frac{1}{12} \cdot V_{SACD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{72} \text{ (đvtt)}$$



Ví dụ 5:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh rằng M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Giải:

Từ giả thiết ta tính được

$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{4}, SH = \frac{a\sqrt{14}}{4}, CH = \frac{3a\sqrt{2}}{4}, SC = a\sqrt{2} \Rightarrow SC = AC$$

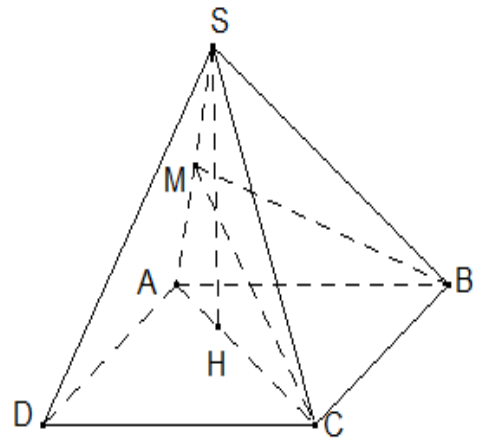
. Do đó tam giác SAC cân tại C nên M là trung điểm của SA.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{1}{2} V_{S.ABC}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48} \text{ (đvtt)}$$

* Bài tập tham khảo:

Bài 1: Cho khối tứ diện ABCD có $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ, \widehat{CAD} = 120^\circ$, $AB = a, AC = 2a, AD = 3a$. Tính thể tích tứ diện ABCD.



$$\text{ĐS: } V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

Bài 2: Cho khối chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. mp(AB'D') cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D' theo a

$$\text{ĐS: } V_{S.AB'C'D'} = \frac{16a^3}{45}$$

Bài 3: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA và SC, mp(DMP) cắt SB tại N. Tính theo a thể tích khối chóp S.DMNP

$$\text{ĐS: } V_{S.DMNP} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$$

Bài 4: (ĐH khối B – 2010)

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

$$\text{ĐS: } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} \text{ và } R = \frac{7a}{12}$$

DẠNG 3: ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH TÍNH KHOẢNG CÁCH

Việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng khó khăn nhất là xác định chân đường cao. Khó khăn này có thể được khắc phục nếu ta tính khoảng cách thông qua thể tích của khối đa diện, mà khoảng cách đó chính là độ dài đường cao của khối đa diện. Sau đây ta sẽ xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1:

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mặt phẳng (ABC), AD = AC = 4cm, AB = 3cm, BC = 5cm. Tính khoảng cách từ A đến mp(BCD).

Giải:

Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB \perp AC$

Do đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 8\text{cm}^3$

Mặt khác $CD = 4\sqrt{2}$, BD = BC = 5

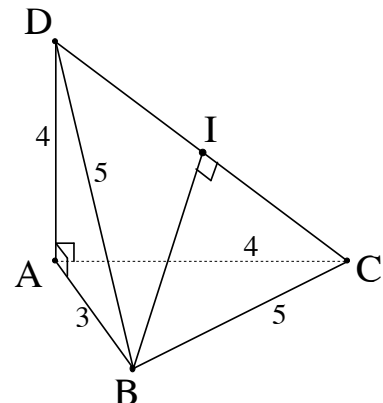
Nên $\triangle BCD$ cân tại B, gọi I là trung điểm của CD

$$\Rightarrow S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot BI = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{34}$$

$$\text{Vậy } d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{3 \cdot 8}{2\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$$

Ví dụ 2:

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, AD = 2a, BA = BC = a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu



vuông góc của A lên SB. CMR tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mp(SCD)

Giải:

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.HCD}}{V_{S.BCD}} = \frac{SH}{SB}$$

ΔSAB vuông tại A và AH là đường cao nên

$$\text{Ta có } \frac{SH}{HB} = \frac{SA^2}{AB^2} = \frac{2a^2}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.HCD} = \frac{2}{3} V_{S.BCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} a \sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{9}$$

$$\text{Mà } V_{S.HCD} = \frac{1}{3} d(H, (SCD)) \cdot S_{\Delta SCD}.$$

ΔSCD vuông tại C (do $AC^2 + CD^2 = AD^2$),

$$\text{do đó } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CD \cdot SC = \frac{1}{2} \cdot a \sqrt{2} \cdot 2a = a^2 \sqrt{2}. \text{ Vậy } d(H, (SCD)) = \frac{3a^3 \sqrt{2}}{9a^2 \sqrt{2}} = \frac{a}{3}$$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$

Giải:

Gọi E là trung điểm của BB' , ta có $EM \parallel CB'$

Suy ra $B'C \parallel (AME)$ nên

$$d(B'C; AM) = d(B'C; (AME)) = d(C; (AME))$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{C.AEM}}{V_{C.AEB}} = \frac{MC}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{C.AEM} = \frac{1}{2} V_{EACB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$$

$$\text{Ta có } d(C, (AME)) = \frac{3V_{C.AEM}}{S_{\Delta AEM}}$$

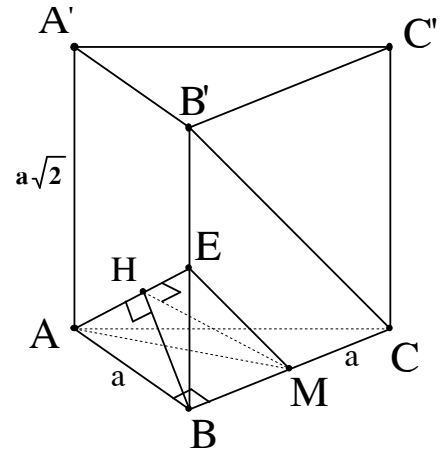
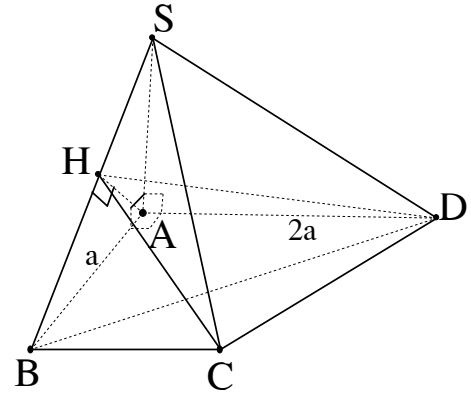
Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AE, ta có $BH \perp AE$

Hơn nữa $BM \perp (ABE) \Rightarrow BM \perp AE$, nên ta được $AE \perp HM$

$$\text{Mà } AE = \frac{a\sqrt{6}}{2}, \Delta ABE \text{ vuông tại B nên } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{EB^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta BHM \text{ vuông tại B nên } MH = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta AEM} = \frac{1}{2} AE \cdot HM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{a^2 \sqrt{14}}{8}$$



$$\text{Vậy: } d(C, (AME)) = \frac{3a^3\sqrt{2}}{24 \cdot \frac{a^2\sqrt{14}}{8}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Ghi chú: Có thể áp dụng công thức Hê – rông để tính $S_{\Delta AEM}$

Ví dụ 4:

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC . Tính khoảng cách Từ A đến $mp(BCC'B')$

Giải:

Theo giả thiết ta có $A'H \perp (ABC)$.

Tam giác ABC vuông tại A và AH là trung tuyến nên $AH = \frac{1}{2}BC = a$. $\Delta A'AH$ vuông tại H nên ta có

$$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Do đó } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } V_{A'.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{a^3}{2} = a^3$$

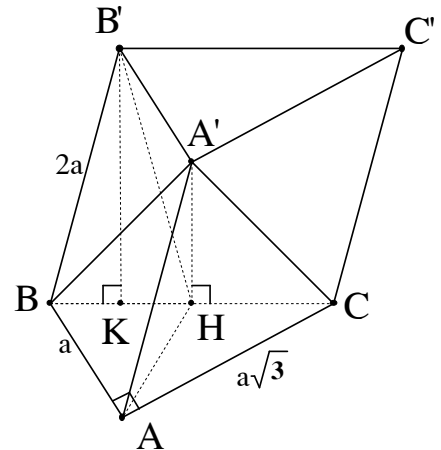
$$\text{Ta có } d(A', (BCC'B')) = \frac{3V_{A'.BCC'B'}}{S_{BCC'B'}}$$

Vì $AB \perp A'H \Rightarrow A'B' \perp A'H \Rightarrow \Delta A'B'H$ vuông tại A'

Suy ra $B'H = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a = BB'$. $\Rightarrow \Delta BB'H$ cân tại B' . Gọi K là trung điểm của BH , ta có $B'K \perp BH$. Do đó $B'K = \sqrt{BB'^2 - BK^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

$$\text{Suy ra } S_{BCC'B'} = B'C' \cdot BK = 2a \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} = a^2\sqrt{14}$$

$$\text{Vậy } d(A', (BCC'B')) = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}a}{14}$$



* Bài tập tham khảo :

Bài 1:

Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ A đến $mp(IBC)$

$$\text{ĐS: } d(A, (IBC)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Bài 2:

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = AB = a$, $BC = 2a$, điểm M thuộc AD sao cho $AM = 3MD$. Tính khoảng cách từ M đến $mp(AB'C)$

$$\text{ĐS: } d(A, (AB'C)) = \frac{a}{2}$$

Bài 3:

Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với $mp(ABC)$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) nếu $AD = a$, $AB = BC = b$

$$\text{ĐS: } d(A, (BCD)) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bài 4:

Cho tứ diện đều $ABCD$, biết $AB = a$, M là 1 điểm ở miền trong của tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ M đến các mặt của tứ diện

$$\text{ĐS: } h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ACB}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Bài 5:

Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M ở miền trong của tứ diện. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là khoảng cách từ M đến các mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ của tứ diện. Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ các đỉnh A, B, C, D đến các mặt đối diện của tứ diện. CMR: $\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} + \frac{r_4}{h_4} = 1$

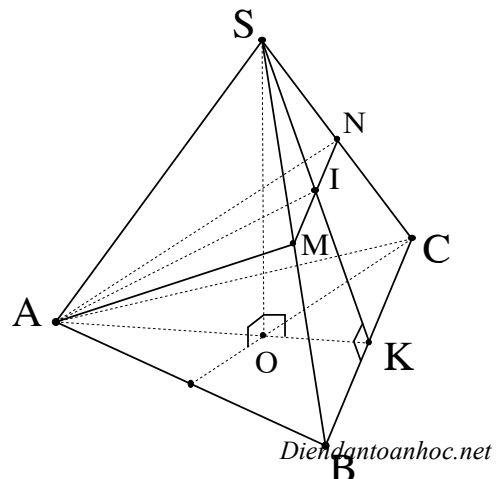
DẠNG 4: ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH TÍNH DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Việc tính diện tích đa giác phẳng được quy về việc tính diện tích tam giác theo công thức $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$, trong đó h – chiều cao và a là độ dài cạnh đáy.

Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, đặc biệt là việc tính diện tích của các đa giác phẳng trong không gian, tính trực tiếp theo công thức gặp nhiều khó khăn. Khi đó có thể tính diện tích đa giác thông qua thể tích của các khối đa diện. Sau đây là một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1:

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S , có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là



trung điểm của SB và SC. Tính diện tích tam giác AMN theo a, biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$

Giải:

Gọi K là trung điểm của BC và I là trung điểm của MN. Ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

Từ $(AMN) \perp (SBC)$

và $AI \perp MN$ (do $\triangle AMN$ cân tại A)

nên $AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SI$

Mặt khác, $MN \perp SI$ do đó $SI \perp (AMN)$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{SI \cdot S_{\triangle AMN}}{SO \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4} \frac{SO}{SI} \cdot S_{\triangle ABC} \quad (\text{O là trọng tâm của tam giác ABC})$$

Ta có $\triangle ASK$ cân tại A (vì AI vừa là đường cao vừa là trung tuyến) nên

$$AK = AS = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

$$\text{Và } SI = \frac{1}{2}SK = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \text{Vậy } S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{\frac{6a\sqrt{2}}{4}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \quad (\text{đvdt})$$

* Bài tập tham khảo:

Bài 1: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C'. Biết ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ ($c^2 \geq a^2 + b^2$). Một mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với CA' cắt lăng trụ theo một thiết diện.

a) Xác định thiết diện đó

b) Tính diện tích thiết diện xác định ở câu a)

$$\text{ĐS: Thiết diện AMN có diện tích } S_{AMN} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2c}$$

Bài 2: Cho tứ diện ABCD có các cạnh $AB = x$, $AC = y$, $AD = z$, các góc $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 90^\circ$. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD)

$$\text{a) Chứng minh rằng: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

b) Tính diện tích tam giác BCD

$$\text{ĐS: } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}$$

MỘT SỐ KỸ NĂNG GIẢI TOÁN TÍCH PHÂN

Trước tiên học sinh phải nắm thật kỹ nhóm công thức cơ bản sau:

I/ Học sinh cần nắm vững các công thức tính nguyên hàm sau:

- | | |
|--|---|
| 1. $\int dx = x + C$ | 2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ |
| 3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ | 4. $\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C \quad (\alpha \neq 1)$ |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C$ | 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| 7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$ |
| 9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ | 10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ |

Các công thức: 1-2-3-4 thuộc nhóm hàm số lũy thừa; 5-6 thuộc nhóm hàm số mũ; 7-8-9-10 thuộc nhóm hàm số lượng giác.

Chú ý:

- + Công thức nguyên hàm không có nhóm hàm số logarit như trong công thức đạo hàm.
- + Trong các công thức nguyên hàm **không mở rộng từ x sang hàm số u(x)** như trong công thức đạo hàm.
- + Trong các công thức nguyên hàm **chỉ được mở rộng từ x sang ax + b** như sau:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C (a \neq 0)$$

Ví dụ:

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \Rightarrow \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (a \neq 0)$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C \Rightarrow \int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$

II/ Các dạng tích phân thường gặp:

1) Tích phân dạng: $I = \int_a^b \frac{p(x)}{cx+d} dx (c \neq 0)$ (P(x) là một đa thức).

Nếu bậc P(x) lớn hơn hoặc bằng 1 ta chia tử cho mẫu ta được các tích phân có dạng:

$$+ \int_a^b x^\alpha dx \quad (\alpha \neq -1) = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_a^b \quad + \int_a^b \frac{dx}{cx+d} = \frac{1}{c} \left[\ln|cx+d| \right]_a^b$$

Ví dụ: Tính

$$I = \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 4x - 5}{2x - 3} dx$$

Giải

$$I = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x + \frac{17}{4} + \frac{\frac{31}{4}}{2x-3} \right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 + \frac{17}{4}x + \frac{31}{8} \ln|2x-3| \right]_{-1}^1 = \frac{17}{2} - \frac{31}{8} \ln 5$$

2) Tích phân dạng: $I = \int_a^b \frac{P(x)}{x^2 + px + q} dx$ (P(x) là một đa thức)

Nếu bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng 2 ta chia tử cho mẫu ta được các tích phân có dạng:

$$+ \int_a^b x^\alpha dx \ (\alpha \neq -1) = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_a^b = \frac{1}{\alpha+1} [b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}] \quad + \quad I_1 = \int_a^b \frac{Ax+B}{x^2 + px + q} dx$$

Cách tính I_1 :

$\Rightarrow x^2 + px + q = 0$ vô nghiệm ($\Delta < 0$)

Ta biến đổi: $Ax+B = \frac{A}{2}[(2x+p)-p] + B = \frac{A}{2}(2x+p) + (B - \frac{Ap}{2})$

$$I_1 = \frac{A}{2} \int_a^b \frac{2x+p}{x^2 + px + q} dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int_a^b \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

* $I_2 = \int_a^b \frac{2x+p}{x^2 + px + q} dx$ Đặt $t = x^2 + px + q \Rightarrow dt = (2x+p)dx$

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = \alpha; x = b \Rightarrow t = \beta$

$$I_2 = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_\alpha^\beta = \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

* $I_3 = \int_a^b \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int_a^b \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \int_a^b \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + m} \quad (m = q - \frac{p^2}{4} > 0)$

Đặt $x + \frac{p}{2} = \sqrt{m} \tan t \Rightarrow dx = \sqrt{m}(1 + \tan^2 t)dt$

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = \alpha; x = b \Rightarrow t = \beta$

$$I_3 = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{m}(1 + \tan^2 t)dt}{m \tan^2 t + m} = \frac{1}{\sqrt{m}} \int_\alpha^\beta dt = \frac{1}{\sqrt{m}} [t]_\alpha^\beta = \frac{1}{\sqrt{m}} [\beta - \alpha]$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_2^3 \frac{3x+2}{x^2 - 7x + 13} dx$

Giải

$$\begin{aligned}
3x + 2 &= \frac{3}{2}[(2x - 7) + 7] + 2 = \frac{3}{2}(2x - 7) + \frac{25}{2} \\
I &= \frac{3}{2} \int_2^3 \frac{(2x - 7)}{x^2 - 7x + 13} dx + \frac{25}{2} \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 7x + 13} \\
+ I_1 &= \int_2^3 \frac{(2x - 7)}{x^2 - 7x + 13} dx = \left[\ln |x^2 - 7x + 13| \right]_2^3 = -\ln 3 \\
+ I_2 &= \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 7x + 13} = \int_2^3 \frac{dx}{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Đặt } \left(x - \frac{7}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Đổi cận } \begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3} \\ x = 3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \\
&\Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t) dt \\
I_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \\
I &= \frac{-3}{2} \ln 3 + \frac{25\sqrt{3}}{18} \pi
\end{aligned}$$

☞ $x^2 + px + q = 0$ có nghiệm kép $x = \frac{p}{2} (\Delta = 0)$

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q} = \frac{Ax + B}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{M}{\left(x + \frac{p}{2}\right)} + \frac{N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{M\left(x + \frac{p}{2}\right) + N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} M = A \\ \frac{Mp}{2} + N = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \\ N \end{cases}$$

$$I_1 = \int_a^b \left(\frac{M}{x + \frac{p}{2}} + \frac{N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \right) dx = \left[M \ln \left| x + \frac{p}{2} \right| - \frac{N}{x + \frac{p}{2}} \right]_a^b$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_1^1 \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 1} dx$

Giải

$$\frac{2x+5}{x^2+2x+1} = \frac{2x+5}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 2x+5 = A(x+1) + B$$

Ta có: $\Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ A+B=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$

$$I = \int_1^2 \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx = \left[2 \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} \right]_1^2 = 2 \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

☞ $x^2 + px + q = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 ($\Delta > 0$)

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{M}{(x-x_1)} + \frac{N}{(x-x_2)} = \frac{M(x-x_2) + N(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M+N=A \\ -Mx_2+Nx_1=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \\ N \end{cases}$$

$$I_1 = \int_a^b \left(\frac{M}{(x-x_1)} + \frac{N}{(x-x_2)} \right) dx = \left[M \ln|x-x_1| + N \ln|x-x_2| \right]_a^b$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_2^3 \frac{4x-5}{x^2-4x-5} dx$

Giải

$$\frac{4x-5}{x^2-4x-5} = \frac{4x-5}{(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5} \Rightarrow 4x-5 = A(x-5) + B(x+1)$$

$$\Rightarrow 4x-5 = (A+B)x - 5A + B \Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ -5A+B=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_2^3 \left(\frac{\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{\frac{5}{2}}{x-5} \right) dx = \left[\frac{3}{2} \ln|x+1| + \frac{5}{2} \ln|x-5| \right]_2^3 = \frac{3}{2} \ln \frac{4}{3} + \frac{5}{2} \ln \frac{2}{3}$$

3) Tích phân dạng: $I = \int_a^b R(\sin x, \cos x) dx$

☞ $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (lẻ đối với $\sin x$)

$$I = \int_a^b R(\sin x, \cos x) \sin x dx$$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow -dt = \sin x dx$

Đổi cận: $x=a \Rightarrow t=\alpha; x=b \Rightarrow t=\beta$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = \left[G(t) \right]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$

Giải:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx$$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$$I = \int_1^0 (1 - t^2) t^2 (-dt) = \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

☞ $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (**lẻ đối với cos x**)

$$I = \int_a^b R(\sin x, \cos x) \cos x dx$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = \alpha; x = b \Rightarrow t = \beta$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = [G(t)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$$

Ví dụ :

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} dx$

Giải :

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0 ; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+t)^2} = \left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

☞ $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (**chẵn đối với sin x và cos x**)

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx$

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = \alpha; x = b \Rightarrow t = \beta$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = [G(t)]_{\alpha}^{\beta}$$

Ta có:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} ; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$

Giải:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$

$$I = \int_0^1 (1 + t^2) dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Hoặc dùng công thức hạ bậc :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

Giải:

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left[3x - 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$$

☞ Ngoài 3 trường hợp trên

Đặt: $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = \alpha$; $x = b \Rightarrow t = \beta$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = \left[G(t) \right]_{\alpha}^{\beta}$$

Ta có:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$

Giải:

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{x}{2})dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$;

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{t^2 + 2t + 1}{2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1) \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 (1 + \frac{2t}{1+t^2})dt = \left[t + \ln|t^2 + 1| \right]_0^1 = (1 + \ln 2)$$

☞ **Có dạng:** $\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx$

Giải:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 4x - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{4}$$

Chú ý:

$$\int_a^b \frac{dx}{1 \pm \cos x}$$

$$* 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$* 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{1 \pm \sin x}$$

$$* 1 + \sin x = 1 \pm \cos(\frac{\pi}{2} - x) \quad \text{áp dụng nhl trl z ãg hz p treh}$$

4) Tích phân dạng: $I = \int_a^b R(x, \sqrt[n]{\frac{cx+d}{ex+f}}) dx \quad (ce \neq 0)$

Đặt $t = \sqrt[n]{\frac{cx+d}{ex+f}} \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$

Đổi cận : $x = a \Rightarrow t = \alpha; x = b \Rightarrow t = \beta$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = [G(t)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

Giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow t^3 = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{t^3-1}{3} \Rightarrow dx = t^2 dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=\frac{7}{3} \Rightarrow t=2$$

$$I = \int_1^2 \frac{t^3-1}{3} t^2 dt = \frac{1}{3} \int_1^2 (t^3+2)t dt = \frac{1}{3} \int_1^2 (t^4+2t) dt = \frac{1}{3} \left[\frac{t^5}{5} + t^2 \right]_1^2 = \frac{46}{15}$$

5) Tích phân dạng:

$$\text{☞ } I = \int_a^b R(x, \sqrt{m-x^2}) dx \quad (m > 0)$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{m} \sin t \quad \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \quad (\text{ hoặc } x = \sqrt{m} \cos t \quad (t \in [0; \pi]))$$

$$\Rightarrow dx = \sqrt{m} \cos t dt \quad (-dx = \sqrt{m} \sin t dt)$$

$$\text{Đổi cận: } x=a \Rightarrow t=\alpha; x=b \Rightarrow t=\beta$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = [G(t)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$$

Ví dụ:

$$\text{Tính } I = \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

Giải

$$\text{Đặt: } x = 2 \sin t \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow dt = 2 \cos t dt;$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0; x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4t) dt = \left[t + \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{☞ } I = \int_a^b R(x, \sqrt{x^2 \pm m}) dx \quad (m > 0)$$

Cách 1:

$$\text{Đặt: } t = x + \sqrt{x^2 \pm m} \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=a \Rightarrow t=\alpha; x=b \Rightarrow t=\beta$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = [G(t)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$$

$$\text{CÁCH 2: } * \sqrt{x^2 - m} \quad \text{Đặt } x = \frac{\sqrt{m}}{\cos t} \quad * \sqrt{x^2 + m} \quad \text{Đặt } x = \sqrt{m} \tan t$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} \, dx$

Giải:

Đặt $t = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t - x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 - 2xt + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt$

$$\sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t};$$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=1+\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(\frac{t^2+1}{2t}\right) \left(\frac{t^2+1}{2t^2}\right) dt = \frac{1}{4} \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^4+2t^2+1}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{t^2}{2} + 2 \ln|t| - \frac{1}{2t^2} \right]_1^{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2(3+2\sqrt{2})} \right) \end{aligned}$$

☞ **Đặc biệt:** các dạng tích phân sau

$$\int_a^b (x^n \sqrt{m-x^2}) dx; \int_a^b \left(\frac{\sqrt{m-x^2}}{x^n} \right) dx; \int_a^b (x^n \sqrt{x^2 \pm m}) dx; \int_a^b \left(\frac{\sqrt{x^2 \pm m}}{x^n} \right) dx \quad (\text{với } n \text{ là số nguyên}$$

dương lẻ)

Đặt $* t = \sqrt{m-x^2} \Rightarrow t^2 = m-x^2 \Rightarrow x^2 = m-t^2 \Rightarrow x dx = -t dt$
 $* (t = \sqrt{x^2 \pm m})$

Đổi cận: $x=a \Rightarrow t=\alpha; x=b \Rightarrow t=\beta$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = [G(t)]_{\alpha}^{\beta}$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx$

Giải:

$$I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^2} \cdot x dx$$

Đặt: $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = t^2-1 \Rightarrow x dx = t dt$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t \cdot t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4-t^2) dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{15}$$

6) Tích phân dạng: $I = \int_a^b \frac{f(\ln x)}{x} dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

Đổi cận: $x=a \Rightarrow t=\alpha; x=b \Rightarrow t=\beta$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

Ví dụ:

Tính $I = \int_1^3 \frac{\ln x}{x(1 + \ln^2 x)} dx$

Giải:

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$;

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0; x = 3 \Rightarrow t = \ln 3$

$$I = \int_0^{\ln 3} \frac{t dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \left[\ln |1+t^2| \right]_0^{\ln 3} = \frac{1}{2} \ln(1 + \ln^2 3)$$

III/ Tích phân từng phần:

☞ $I = \int_a^b p(x) \ln x dx$

Dùng phương pháp tích phân từng phần đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ v' = p(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \int p(x) dx \end{cases} \Rightarrow I = [uv]_a^b - \int_a^b u' v dx$$

☞ $I = \int_a^b P(x) (e^x; \sin x; \cos x) dx$

Dùng phương pháp tích phân từng phần đặt

$$\begin{cases} u = p(x) \\ v' = e^x (\sin x; \cos x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = p'(x) \\ v = \int e^x (\sin x; \cos x) dx \end{cases} \Rightarrow I = [uv]_a^b - \int_a^b u' v dx$$

Ví dụ:

1) Tính $I = \int_1^3 x \ln(x^2 + 3) dx$

Giải:

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(x^2 + 3) \\ v' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{2x}{x^2 + 3} \\ v = \frac{x^2 + 3}{2} \end{cases}$

$$I = \left[\frac{x^2 + 3}{2} \ln(x^2 + 3) \right]_1^3 - \int_1^3 x dx = 6 \ln 12 - 2 \ln 4 - 4$$

2) Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

Giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$I = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$3) \text{ Tính } I = \int_0^2 (3x+2)e^{-x} dx$$

Giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 3x+2 \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 3 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = \left[-(3x+2)e^{-x} \right]_0^2 + \int_0^2 3e^{-x} dx = \frac{-8}{e^2} + 2 - \left[3e^{-x} \right]_0^2 = \frac{-11}{e^2} + 5$$

Chú ý: $I = \int_a^b \frac{f(\ln x)}{x} dx$

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\text{Đổi cận: } x=a \Rightarrow t=\alpha; x=b \Rightarrow t=\beta$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = \left[G(t) \right]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$$

Ví dụ:

$$\text{Tính } I = \int_1^e \frac{\ln x \sqrt[3]{2 + \ln^2 x}}{x} dx$$

Giải:

Cách 1: $\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 t \sqrt[3]{2+t^2} dt$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt[3]{2+t^2} \Rightarrow u^3 = 2+t^2 \Rightarrow \frac{3}{2} u^2 du = t dt$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} t=0 \Rightarrow u = \sqrt[3]{2} \\ t=1 \Rightarrow u = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

$$I = \frac{3}{2} \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} u du = \frac{3}{4} \left[u^2 \right]_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4})$$

Cách 2: $\text{Đặt } t = \sqrt[3]{2 + \ln^2 x} \Rightarrow t^3 = 2 + \ln^2 x \Rightarrow \frac{3}{2} t^2 dt = \ln x \frac{dx}{x}$

$$\text{Wokcajn:} \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2} \\ x = e \Rightarrow t = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

$$I = \frac{3}{2} \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} t dt = \frac{3}{4} \left[t^2 \right]_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4})$$

MỘT VÀI CÁCH NHỚ CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài viết nhỏ này chia sẻ với các bạn những kinh nghiệm nhớ các công thức lượng giác của tôi, một trong những hành hành trang mà tôi luôn mang theo trên con đường học toán của mình.

1. Dấu của các giá trị lượng giác (GTLG) :

Các bạn nên biết trong góc vuông (góc phần tư) thứ nhất, mọi GTLG đều mang dấu dương (+), di chuyển dấu + này theo chiều dọc, ta được dấu của cos, theo chiều ngang ta có dấu sin và nếu di chuyển chéo đi xuống góc phần tư thứ 3 ta được dấu của tan và cotan (còn trong những góc vuông còn lại dĩ nhiên dấu sẽ là âm!). Thế nên để ghi nhớ dấu của các hàm số lượng giác ta có: “cos dọc, sin ngang, tan - cotan chéo”.

2. Giá trị LG của các góc đặc biệt các bạn có thể dùng máy tính, tuy nhiên nếu không có máy tính thì ta vẫn nhớ được một cách dễ dàng nhờ cách chia nhóm như sau:

Trước hết cần nhớ một câu “thần chú” quen thuộc mà ta đã biết từ cấp 2 “sin đi học, cos không ham (không hư) tan đoàn kết cotan kết đoàn”.

Với các GTLG của góc 45^0 ta có nửa hình vuông có cạnh bằng 1 (đó cũng chính là tam giác vuông cân có cạnh bằng 1) dễ thấy khi đó đường chéo của hình vuông này là $\sqrt{2}$. Từ đó ta có ngay $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^0 = \cot 45^0 = 1$

Còn với các GTLG của các góc 30^0 , 60^0 , ta dùng nửa tam giác đều có cạnh bằng 1. Ta có: $\sin 30^0 = \frac{1}{2} = \cos 60^0$, $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Các góc 0^0 , 90^0 , 180^0 thì ta lại dùng đến nửa đường tròn lượng giác.

Chẳng hạn $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$ ta dễ dàng suy ra từ tọa độ của điểm $A'(-1; 0)$...(khi đó ta dùng câu sin đứng, cos nằm để nhớ $M(\cos a; \sin a)$ với M nằm trên đường tròn hay nửa đường tròn lượng giác; góc $(Ox, OM) = a$).

Một điều nữa là nhiều khi ta chỉ cần nhớ các giá trị của sin và cos thôi còn tan và cotan ta suy ngay ra được nhờ hệ thức quen thuộc.

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}, \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}, \text{ thậm chí chỉ cần nhớ đối với tan vì tana và cota}$$

là 2 số nghịch đảo của nhau.

* Khi nói “sin tăng cos giảm” thì ta có thể hiểu là: trong góc vuông thứ nhất, hàm sin tăng (Đồng biến), còn hàm cos giảm (Nghịch biến) khi góc tăng từ 0 đến 90^0 .

3. GTLG của các góc có liên quan đặc biệt:

Chắc chúng ta đều biết đến câu quen thuộc “*cos đối, sin bù, phụ chéo, khác π tan cotan*” cũng cần phải hiểu kỹ hơn ý nghĩa của câu này các GTLG được nhắc đến thì bằng nhau còn nếu không được nhắc đến thì chúng đối nhau ! .

Về cách nhớ các liên quan đặc biệt này, tôi học từ thầy giáo dạy toán của tôi. Các bạn cùng đọc cho vui nhé :

*** Liên quan đối (a và $-a$)**

Nếu 2 góc đối nhau

Cos của chúng bằng nhau

Sin, tan cotan đối

Hãy viết vào mau mau .

*** Liên quan bù (a và $\pi - a$)**

Nếu hai góc mà bù

Cos phải thêm dấu trừ

Tan cotan cũng vậy ()*

Sin bằng nhau rõ chưa ?

*** Hơn kém một π (a và $a + \pi$)**

Nếu hơn kém một π

Chuyện đó có khó gì

Sin cos đổi dấu đi

Tan cotan vẫn vậy

*** Hơn kém một vuông (a và $a + \frac{\pi}{2}$)**

Nếu hơn kém một vuông ($\frac{\pi}{2}$)

Chuyện này khó khăn hơn

Sin lớn bằng cos nhỏ

cos lớn bằng trừ sin con .

*** Liên quan phụ (a và $\frac{\pi}{2} - a$)**

Phụ nhau thì dễ ghê

Sin này bằng cos kia

Tan này bằng cotan nọ

Nhớ không hả IIC ?

(Bây giờ lớp học toàn ghi là $A_1, A_2 \dots$ nên khó gieo vần quá!), tuy nhiên các bạn cũng nên nhớ rằng : Muốn biến $\cos$ thành $\sin$ và ngược lại thì hãy dùng liên quan phụ.

$$\cos^4 a + \sin^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a \quad \cos^4 a + \sin^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a \quad \cos^4 a + \sin^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$$

$$\cos^4 a + \sin^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$$

(Các bạn có thể kiểm tra lại các liên quan đặc biệt này bằng công thức cộng .Ví dụ hơn kém 1 vuông , nếu nhớ được các công thức này sẽ rất tốt cho bạn đấy

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

4) Các công thức cộng :

*** Đối với $\sin$ và $\cos$:**

Cos thì cos cos sin sin

Sin thì sin cos cos sin khó gì

Bạn ơi hãy nhớ hãy ghi

Cos thời đổi dấu sin thì giữ nguyên.

Hoặc $\sin$ “ cùng dấu , khác loài “ $\cos$ “ cùng loài , khác dấu “

*** Công thức cộng tan :**

Tan của tổng 2 tầng cao rộng

Trên thượng tầng là tổng hai tan

Dưới hạ tầng số 1 ngang tàng

Dám trừ đi tích tan tan oai hùng .

5) Các công thức nhân đôi, nhân 3, hạ bậc :

Cần biết rằng chúng được sinh ra từ công thức cộng (vậy nên nếu quên công thức nhân đôi , nhân ba thì ta có thể “ mò lại “ dễ dàng nhờ công thức cộng).

Công thức nhân 3 là một trong các công thức quan trọng mà bạn cần phải nhớ nếu muốn làm được bài phương trình lượng giác thi đại học .Vậy nhớ thế nào đây ? Riêng tôi, tôi lại dùng câu “sin tăng, cos giảm” quan sát công thức ta thấy :

+) $\sin$ chỉ biểu thị qua $\sin$ $\cos$ chỉ biểu thị qua $\cos$

+) Số mũ của $\sin$ (từ 1 đến 3) cũng như hệ số (từ 3 đến 4) tăng từ trái qua phải, còn $\cos$ thì cả mũ và hệ số từ trái qua phải đều giảm, còn ở giữa vẫn là dấu trừ (-), bạn xem lại nhé :

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

6) Các công thức biến đổi :

*** Công thức biến đổi tổng thành tích**

Nếu bạn chịu khó để ý thì cũng thấy được rằng , chúng cũng được sinh ra từ công thức cộng . Còn cách nhớ? chắc chúng ta đều đã làm quen với “Bài thơ” sau :

Sin cộng sin bằng 2 sin cos

Sin trừ sin bằng 2 cos sin

Cos cộng cos bằng 2 cos cos

Cos trừ cos bằng trừ 2 sin sin

Về trái là sin cos của 2 góc a, b còn về phải là sin cos nửa tổng, nửa hiệu 2 góc đó .

*** Công thức biến đổi tích thành tổng**

Ở trên là cách nhớ công thức biến đổi tổng thành tích, muốn có công thức tích thành tổng thì chỉ cần viết ngược lại, khi đó ta thấy rằng tích cos cos bằng $\frac{1}{2} \cos \text{ tổng} + \cos \text{ hiệu}$, tích sin sin bằng

$\frac{1}{2} \cos \text{ hiệu} - \cos \text{ tổng}$ (hoặc bằng trừ $\frac{1}{2} \cos \text{ tổng} - \cos \text{ hiệu}$) tích sin cos bằng $\frac{1}{2} \sin \text{ tổng} + \sin \text{ hiệu}$.

Để nhớ được cũng không khó lắm, phải không các bạn ?

*** Một vài chú ý khi vận dụng các công thức lượng giác :**

Phải để ý vận dụng chiều ngược của công thức và phải biến đổi công thức trước khi sử dụng.

Ví dụ: $\sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$, $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$, $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$, $\frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} = \tan \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$

, $1 = \sin^2 a + \cos^2 a$, $\frac{1}{\cos^2 a} - 1 = \tan^2 a \dots\dots$

Để giải phương trình lượng giác phải có kỹ năng biến đổi tổng thành tích, ngược lại nhiều bài tìm nguyên hàm hay tính tích phân lại đòi hỏi chúng ta phải biết tách hay biến đổi tích thành tổng.

Nhiều công thức liên quan đến cos thường có dấu cộng còn sin thì có dấu trừ . **Ví dụ: Công thức hạ bậc**

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} ; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos^3 a = \frac{3 \cos a + \cos 3a}{4} ; \quad \sin^3 a = \frac{3 \sin a - \sin 3a}{4} \dots$$

Một số biểu thức quen nếu các bạn để ý và biết được cách biến đổi cũng sẽ rất có ích cho chúng ta trong khi đổi biến, hạ bậc hay thực hiện các phép biến đổi khác. Chẳng hạn như:

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos^4 a + \sin^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$$

$$\cos^6 a + \sin^6 a = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2a \dots$$

Các bạn thân mến !Trên đây là những kinh nghiệm nhớ công thức lượng giác của bản thân tôi cùng với những điều tôi học được của thầy tôi, bạn tôi và cả từ học sinh của tôi. Rất mong những kinh nghiệm đó giúp ích được cho các bạn, dù chỉ là một phần nhỏ bé .

MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I. Bất đẳng thức Côsi:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số không âm. Khi đó ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Ví dụ áp dụng:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2 \quad (*)$$

Bài giải:

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}} \quad (2)$$

Do cả hai vế của (1) và (2) đều là số dương, nên nhân từng vế của (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_n} \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

Hai dạng riêng của bất đẳng thức trên. Đó là khi $a, b, c > 0$, ta có:

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4 \quad (**) \quad (\text{Ứng với } n = 2)$$

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \quad (***) \quad (\text{Ứng với } n = 3)$$

Bất đẳng thức () tuy rất đơn giản nhưng nó lại vô cùng thông dụng. Để thấy rõ hiệu lực của bất đẳng thức đó tôi đưa ra một loạt các bài toán minh họa sau đây*

II. Các bài toán:

Bài toán 1:

Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Chứng minh:

Áp dụng (**), ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a)+(p-b)} = \frac{4}{c} \\ \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{(p-a)+(p-c)} = \frac{4}{b} \\ \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{(p-b)+(p-c)} = \frac{4}{a} \end{cases}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên suy ra:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài toán 2: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có: $h_a + h_b + h_c \geq 9r$, trong đó h_a, h_b, h_c là ba chiều cao của tam giác còn r là bán kính đường tròn nội tiếp.

Chứng minh: Ta biết rằng trong mọi tam giác đều có hệ thức sau:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

Áp dụng (***) suy ra:

$$(h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \geq 9 \Rightarrow h_a + h_b + h_c \geq 9r$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow h_a = h_b = h_c \Leftrightarrow a = b = c$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Bài toán 3: Chứng minh bất đẳng thức Nesbit sau đây: Cho a, b, c > 0. Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Chứng minh: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 &\geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9 \\ \Leftrightarrow [(b+c) + (c+a) + (a+b)] &\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9 \quad (1) \end{aligned}$$

(1) hiển nhiên đúng vì đó chính là (***) $\Rightarrow$ đ.p.c.m.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow b+c = c+a = a+b \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều.

Bài toán 4: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad (1)$$

Chứng minh:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} b+c=x >0 \\ c+a=y >0 \\ a+b=z >0 \\ a+b+c=p >0 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=2p$$

Khi đó $a = p - x$; $b = p - y$; $c = p - z$

Vậy:

$$\begin{aligned} \frac{(p-x)^2}{x} + \frac{(p-y)^2}{y} + \frac{(p-z)^2}{z} &\geq \frac{p}{2} \Leftrightarrow p^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 6p + (x+y+z) \geq \frac{p}{2} \\ \Leftrightarrow 2p^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &\geq 9p \Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \quad (2) \end{aligned}$$

(2) luôn đúng theo (***) $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đ.p.c.m.

Bài toán 5: Cho tam giác ABC với a, b, c là các cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}$$

Chứng minh: Ta luôn có

$$(ab + bc + ca) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 9 \quad (\text{Theo (***)})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunyakovski

$$(ab + bc + ca)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2)$$

Dẫn đến $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$

Với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2 \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2} \quad (\text{đ.p.c.m})$$

Bài toán 6: Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq 1 \end{cases}$

Chúng minh rằng: $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$

Chứng minh: Theo BĐT (***) thì

$$[(a^2 + 2bc) + (b^2 + 2ca) + (c^2 + 2ab)] \left[\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \right] \geq 9$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \left(\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \right) \geq 9$$

$$\text{Mà } 0 < (a + b + c)^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$$

Bài toán 7: Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AA_1 , BB_1 , CC_1 và trực tâm H. Chúng minh rằng:

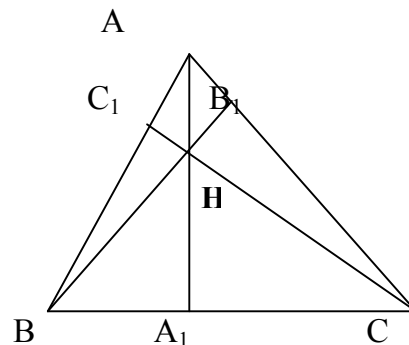
$$\frac{AH}{A_1H} + \frac{BH}{B_1H} + \frac{CH}{C_1H} \geq 6$$

Chứng minh:

$$\frac{AH}{A_1H} + \frac{BH}{B_1H} + \frac{CH}{C_1H} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{AH}{A_1H} \right) + \left(1 + \frac{BH}{B_1H} \right) + \left(1 + \frac{CH}{C_1H} \right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{AA_1}{A_1H} + \frac{BB_1}{B_1H} + \frac{CC_1}{C_1H} \geq 9$$



$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}AA_1 \cdot BC}{\frac{1}{2}HA_1 \cdot BC} + \frac{\frac{1}{2}BB_1 \cdot CA}{\frac{1}{2}HB_1 \cdot CA} + \frac{\frac{1}{2}CC_1 \cdot AB}{\frac{1}{2}HC_1 \cdot AB} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{HBC}} + \frac{S_{ABC}}{S_{HCA}} + \frac{S_{ABC}}{S_{HAB}} \geq 9$$

$$\Leftrightarrow (S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}) \left(\frac{1}{S_{HBC}} + \frac{1}{S_{HCA}} + \frac{1}{S_{HAB}} \right) \geq 9$$

hiển nhiên đúng vì đó chính là (***) $\Rightarrow$ đ.p.c.m.

Bài toán 8: (Đề thi chọn HSG toán lớp 10 Tỉnh Thái Nguyên năm 2010)

Cho tam giác ABC và điểm G ở trong tam giác đó. Các đường thẳng AG, BG, CG cắt các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P.

Chứng minh rằng nếu $\frac{AG}{MG} + \frac{BG}{NG} + \frac{CG}{PG} = 6$ thì G là trọng tâm tam giác ABC.

Chứng minh:

Theo định lí Seva ta có:

$$\frac{MG}{MA} + \frac{NG}{NB} + \frac{PG}{PC} = 1.$$

Áp dụng (***), ta có:

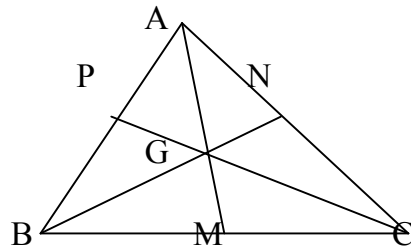
$$\left(\frac{MA}{MG} + \frac{NB}{NG} + \frac{PC}{PG} \right) \left(\frac{MG}{MA} + \frac{NG}{NB} + \frac{PG}{PC} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MG} + \frac{NB}{NG} + \frac{PC}{PG} \geq 9 \Rightarrow \frac{MG + AG}{MG} + \frac{NG + BG}{NG} + \frac{PG + CG}{PG} \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{MG} + \frac{BG}{NG} + \frac{CG}{PG} \geq 6$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{MG}{MA} = \frac{NG}{NB} = \frac{PG}{PC} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow$ G là trọng tâm tam giác ABC.



Bài toán 9:

Chứng minh rằng: $\log_{b+c} a^2 + \log_{c+a} b^2 + \log_{a+b} c^2 \geq 3$, $\forall a, b, c > 2$.

Chứng minh:

Vì $b, c > 2 \Rightarrow bc > 2 \cdot \max(b, c) \geq b + c$

$$\text{Do đó: } \log_{b+c} a^2 = \frac{\ln a^2}{\ln(b+c)} \geq \frac{\ln a^2}{\ln bc} = \frac{2 \ln a}{\ln b + \ln c}$$

$$\text{Tương tự: } \log_{c+a} b^2 \geq \frac{2 \ln b}{\ln c + \ln a}; \quad \log_{a+b} c^2 \geq \frac{2 \ln c}{\ln a + \ln b}$$

Từ đó ta có:

$$\log_{b+c} a^2 + \log_{c+a} b^2 + \log_{a+b} c^2 \geq \frac{2 \ln a}{\ln b + \ln c} + \frac{2 \ln b}{\ln c + \ln a} + \frac{2 \ln c}{\ln a + \ln b} \geq 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

$$(\text{Ở đây sử dụng bài toán 3: } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \quad \forall x, y, z > 0) \Rightarrow \text{đ.p.c.m.}$$

Bài toán 10: (Vô địch Nam Tư năm 1976)

$$\text{Chứng minh rằng: } 2 \left(\frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} + \frac{\log_a b}{a+b} \right) \geq \frac{9}{a+b+c} \text{ với mọi } a, b, c > 1$$

$$\text{Chứng minh: } 2 \left(\frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} + \frac{\log_a b}{a+b} \right) \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \left[\frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} + \frac{\log_a b}{a+b} \right] \geq 9$$

Theo bất đẳng thức CôSi ta có:

$$(b+c) + (c+a) + (a+b) \geq 3 \sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$\left(\frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} + \frac{\log_a b}{a+b} \right) \geq 3 \sqrt[3]{\frac{\log_b c \cdot \log_c a \cdot \log_a b}{(b+c)(c+a)(a+b)}}$$

Nhân từng vế hai bất đẳng thức trên ta được:

$$[(b+c) + (c+a) + (a+b)] \left[\frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} + \frac{\log_a b}{a+b} \right] \geq 9 \sqrt[3]{\log_b c \cdot \log_c a \cdot \log_a b} = 9$$

Suy ra đ.p.c.m.

$$\text{Bài toán 11: Đặt } S = \sum_{i=1}^{2010} a_i. \text{ Chứng minh rằng } \sum_{i=1}^{2010} \frac{S-a_i}{a_i} \geq 2010^2 - 2010$$

với mọi $a_1, a_2, \dots, a_{2010} > 0$.

Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^{2010} \frac{S-a_i}{a_i} \geq 2010^2 - 2010 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2010} \left(1 + \frac{S-a_i}{a_i} \right) \geq 2010^2 - 2010 + 2010 = 2010^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2010} \frac{S}{a_i} \geq 2010^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2010} a_i \cdot \sum_{i=1}^{2010} \frac{1}{a_i} \geq 2010^2$$

Đúng theo BĐT (*) ứng với $n = 2010$.

Bài toán 12: (Vô địch UCRAINA)

Cho $\begin{cases} a_1, \dots, a_n > 0 \\ a_1 + \dots + a_n = 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2 - a_i} \geq \frac{n}{2n - 1}$

Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2 - a_i} \geq \frac{n}{2n - 1} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{a_i}{2 - a_i} \right) \geq \frac{n}{2n - 1} + n = \frac{2n^2}{2n - 1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{2}{2 - a_i} \geq \frac{2n^2}{2n - 1} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 - a_i} \geq \frac{n^2}{2n - 1}$$

$$\Leftrightarrow (2n - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 - a_i} \geq n^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (2 - a_i) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 - a_i} \geq n^2$$

Bất đẳng thức này đúng theo (*) $\Rightarrow$ đ.p.c.m.

Bài toán 13: (Đề thi đề nghị Olympic 30 tháng 4 lần thứ VIII)

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu:

$$\cos A + \cos B + \cos C \geq \frac{2p - a}{2p + a} + \frac{2p - b}{2p + b} + \frac{2p - c}{2p + c} \quad (1) \quad (p \text{ là nửa chu vi})$$

Lời giải:

Ta chứng minh $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Ta có:

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C + \cos \frac{\pi}{3} &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} \\ &\leq 2 \left(\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} \right) \leq 2.2 \cos \frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4} \cos \frac{A+B-\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}{4} \leq 4 \cos \frac{\pi}{3} \\ &\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 0 < \cos \frac{A-B}{2} \leq 1; 0 < \cos \left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1; 0 < \cos \frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{4} \leq 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \cos \frac{A-B}{2} = 1 \\ \cos \frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} = 1 \\ \cos \frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C$$

$$\text{Vậy } \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{2p-a}{2p+a} + \frac{2p-b}{2p+b} + \frac{2p-c}{2p+c} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2p-a}{2p+a} + 1 + \frac{2p-b}{2p+b} + 1 + \frac{2p-c}{2p+c} + 1 \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4p}{2p+a} + \frac{4p}{2p+b} + \frac{4p}{2p+c} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4p \left(\frac{1}{2p+a} + \frac{1}{2p+b} + \frac{1}{2p+c} \right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (2p+a+2p+b+2p+c) \left(\frac{1}{2p+a} + \frac{1}{2p+b} + \frac{1}{2p+c} \right) \geq \frac{9}{2}$$

(Vì $2p = a + b + c$)

Bất đẳng thức này đúng theo (***)

Vậy (2) đúng

$$\text{Do đó (1) xảy ra } \Leftrightarrow VT = VP = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Bài toán 14: Cho hình chóp S.ABC có các cạnh bên đôi một vuông góc với nhau. Gọi α, β, γ là các góc giữa đường cao xuất phát từ đỉnh và các cạnh bên của hình chóp. Chứng minh:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \leq \frac{3}{4}$$

Chứng minh:

Vẽ chiều cao SH.

Đặt $\angle ASH = \alpha$; $\angle BSH = \beta$, $\angle CSH = \gamma$.

Rõ ràng ta có: $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$ (1)

Nhân cả hai vế của (1) với SH^2 ta có

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2)$$

Đặt $\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = a$; $\sin^2 \alpha + \sin^2 \gamma = b$; $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = c$,

Khi đó dựa vào (2) ta có $a + b + c = 2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = 4$

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (2 - \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma) = a - 1$.

Tương tự $\cos^2 \beta = b - 1$; $\cos^2 \gamma = c - 1$.

Vậy bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} \leq \frac{3}{4} \quad \text{hay} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{4} \quad (3)$$

Theo (***) có: $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$, mà $a + b + c = 4$,

Vậy (3) đúng $\Rightarrow$ đ.p.c.m.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow SA = SB = SC$.

Bài toán 15: Cho tứ diện ABCD, M là một điểm ở trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của hình chóp tại A', B', C', D'.

Chứng minh:

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} + \frac{MD}{MD'} \geq 12$$

Chứng minh:

Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của A, M lên mp(BCD). Ta có H, I, A' thẳng hàng. Gọi V, V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích của tứ diện ABCD và hình chóp đỉnh M với các đáy là các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC

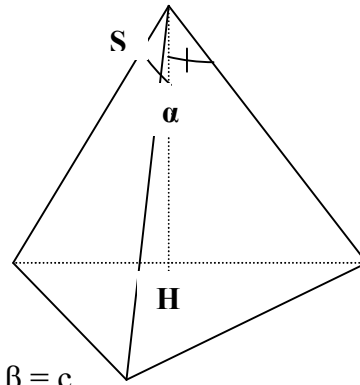
Ta có: $\frac{AA'}{HA'} = \frac{AH}{MI} = \frac{\frac{1}{3}AH.S_{BCD}}{\frac{1}{3}MI.S_{BCD}} = \frac{V}{V_1}$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MA'} = \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{V}{V_1} - 1$$

Tương tự: $\frac{MB}{MB'} = \frac{V}{V_2} - 1$; $\frac{MC}{MC'} = \frac{V}{V_3} - 1$;

$$\frac{MD}{MD'} = \frac{V}{V_4} - 1$$

Từ đó suy ra:
$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} + \frac{MD}{MD'} = V \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_4} \right) - 4$$



$$= (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_4} \right) - 4 \geq 16 - 4 = 12 \quad (\text{đ.p.c.m}).$$

III. Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Bài 2: Cho tam giác ABC. Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm các đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C .

Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các tam giác O_1BC, O_2CA, O_3AB . Chứng minh: $S_1 + S_2 + S_3 \geq 3S$.

Bài 3: Cho tam giác ABC. Chứng minh: $a \sin \frac{C}{2} + b \sin \frac{A}{2} + c \sin \frac{B}{2} \geq 2\sqrt{3}S$

Bài 4: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Ba chiều cao AA', BB', CC' cắt đường tròn tâm O tại A_1, B_1, C_1 . Chứng minh:

$$\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} \geq \frac{9}{4}.$$

Bài 5: $\forall a_1, a_2, \dots, a_{2010} > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2010}} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \dots + a_{2010}} + \dots + \frac{a_{2010}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2009}} \geq \frac{2010}{2009}$$

Bài 6: Đặt $S = \sum_{i=1}^n a_i$. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{S - a_i} \geq \frac{n^2}{(n-1)S} \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU VÀ ỨNG DỤNG

I. Các kiến thức cơ bản:

1. Phương trình mặt cầu:

Dạng 1: Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. (1)

Dạng 2: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) (2). Khi đó: Mặt cầu tâm $I(-a; -b; -c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

2. Vị trí tương đối của mặt cầu với đường thẳng:

Cho mặt cầu (C) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R và đường thẳng (Δ) .

Tính: $d(I, \Delta)$. Nếu: $d(I, \Delta) > R : (\Delta) \cap (C) = \emptyset$;

$d(I, \Delta) < R : (\Delta) \cap (C)$ tại 2 điểm phân biệt;

$d(I, \Delta) = R : (\Delta), (C)$ tiếp xúc nhau, (Δ) gọi là tiếp tuyến của mặt cầu.

3. Vị trí tương đối của mặt cầu với mặt phẳng:

Cho mặt cầu (C) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

Tính: $d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Nếu:

1) $d(I, (P)) > R : (P) \cap (C) = \emptyset$;

2) $d(I, (P)) < R : (P) \cap (C)$ là đường tròn $\left(H; r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))}\right)$ với H là hình chiếu của I trên (P) .

Vậy đường tròn trong không gian có phương trình:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

3) $d(I, (P)) = R : (P), (C)$ tiếp xúc nhau tại điểm H là hình chiếu của I trên (P) , (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (C) .

II. Các dạng toán:

Dạng 1: Xác định tâm và bán kính của mặt cầu cho trước (dạng pt (2)):

Cách 1: Đưa về dạng 1

Cách 2: Kiểm tra điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Rightarrow$ tâm và bán kính.

Ví dụ:

Cho phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2m^2x - 4my + 8m^2 - 4 = 0$

Tìm điều kiện để phương trình trên là phương trình mặt cầu. Khi đó tìm tập hợp tâm của họ mặt cầu đó.

Giải:

$$\text{Pt đã cho} \Leftrightarrow (x - m^2)^2 + (y - 2m)^2 + z^2 = m^4 - 4m^2 + 4$$

$$\text{là phương trình mặt cầu} \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 4 = (m^2 - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}$$

Khi đó tâm $I(m^2; 2m; 0)$. Ta thấy tâm I thuộc mặt phẳng Oxy và: $x_I = \frac{y_I^2}{4}$

Vậy tập hợp tâm I là parabol $x = \frac{y^2}{4}$ nằm trong mp Oxy bỏ đi 2 điểm: $M(2; 2\sqrt{2}; 0)$ và $N(2; -2\sqrt{2}; 0)$.

Dạng 2: Viết phương trình của mặt cầu khi biết một số yếu tố cho trước

Đi xác định tâm và bán kính của mặt cầu:

- Biết tâm: tìm bán kính;
- Biết bán kính: tìm tâm;
- Chưa biết tâm và bán kính: Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, tiếp xúc với 2 mặt phẳng cho trước.... thường xác định tâm trước sau đó đi tìm bán kính.

Bài 1:

Lập phương trình mặt cầu tâm $I(4; 3; 2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) với: $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$.

Giải: Phương trình mp(ABC): $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 3 = 0$

Bán kính mặt cầu: $R = d(I, (ABC)) = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 12$$

Bài 2: Lập phương trình mặt cầu tâm $I(2; 3; -1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng (d) có

phương trình: $\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 16$

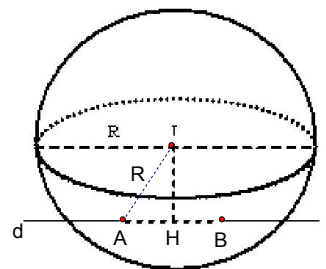
Giải:

(d) đi qua $M(11; 0; -25)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Có:

$$IH = d(I, AB) = \frac{|\overrightarrow{MI}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 15 \Rightarrow \text{Bán kính mặt cầu:}$$

$$R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 17. \text{ Vậy phương trình mặt cầu: } (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 289$$



Bài 3:

Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (d) có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$

và hai mặt phẳng $(P_1): x + 2y + 2z - 2 = 0$; $(P_2): 2x + y + 2z - 1 = 0$. Lập phương trình mặt cầu có tâm I nằm trên (d) và tiếp xúc với 2 mặt phẳng trên.

Giải:

$$I \in (d) \Rightarrow I(2t+1; t+2; 2t+3)$$

Mặt cầu tiếp xúc với 2 mặt phẳng $\Leftrightarrow d(I, (P_1)) = d(I, (P_2))$

$$\Leftrightarrow |8t+9| = |9t+9| \Leftrightarrow \begin{cases} 8t+9 = 9t+9 \\ 8t-9 = -9t-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t = -\frac{18}{17} \end{cases}$$

$$t=0 \Rightarrow I_1(1; 2; 3); R_1=3 \Rightarrow Pt \text{ m/c } (S_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$$

$$t = -\frac{18}{17} \Rightarrow I_2\left(-\frac{19}{17}; \frac{16}{17}; \frac{15}{17}\right); R_2 = \frac{3}{17} \Rightarrow Pt \text{ m/c } (S_2): \left(x + \frac{19}{17}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{17}\right)^2 + \left(z - \frac{15}{17}\right)^2 = \frac{9}{289}$$

Chú ý:

Nếu $(P_1) \parallel (P_2)$:

1) d song song nhưng không cách đều (P_1) và (P_2) hoặc nằm trên (P_1) hoặc (P_2) : Không có mặt cầu thỏa mãn.

2) d song song và cách đều (P_1) và (P_2) : Có vô số mặt cầu thỏa mãn.

3) d không song song, không nằm trên (P_1) và (P_2) : Có 1 mặt cầu thỏa mãn.

Bài 4:

Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD với A(1; 1; 0), B(3; 1; 2), C(-1; 1; 2) và D(1; -1; 2).

Giải:

Cách 1: Gọi I(x; y; z) $\Rightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \\ IC^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1; 1), R = IA = 2$

Cách 2:

Gọi phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

Mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D nên:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + d + 2 = 0 \\ 6a + 2b + 4c + d + 14 = 0 \\ -2a + 2b + 4c + d + 6 = 0 \\ 2a - 2b + 4c + d + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = -1; c = -2; d = 2$$

Kết luận: Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$

Chú ý:

Bài toán (ĐH KD-2004): Trong không gian Oxyz cho 3 điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và mặt phẳng (P) có phương trình: $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

Cách giải bài toán này tương tự như cách 1 của bài toán trên.

Dạng 3: Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu

Bài toán 1:

Lập phương trình tiếp diện (P) của mặt cầu (S) tâm I, bán kính R tại điểm A

Cách giải:

mp(P) đi qua A và nhận véc tơ $\overrightarrow{IA}$ làm véc tơ pháp tuyến

Bài toán 2:

Lập phương trình tiếp diện (P) của mặt cầu (S) tâm I(a; b; c), bán kính R biết véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n} = (A; B; C)$

Cách giải:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Có: $d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R \Rightarrow$ tìm được D suy ra phương trình mp(P).

Chú ý:

Trong bài toán cho biết véc tơ pháp tuyến dưới dạng:

- Biết (P) song song với một mặt phẳng hoặc song song với 2 đường thẳng cho trước.
- Biết vuông góc với 1 đường thẳng cho trước.

Bài toán 3:

Lập phương trình tiếp diện (P) của mặt cầu (S) tâm I(a; b; c), bán kính R biết (P) chứa đường thẳng (d) cho trước.

Cách giải:

- Xét đường thẳng (d) dưới dạng phương trình tổng quát;
- Viết phương trình chùm mặt phẳng đi qua (d);
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc tìm ra mp(P).

Bài toán 4:

Lập phương trình tiếp diện (P) của mặt cầu (S), tâm I(a; b; c), bán kính R biết (P) đi qua điểm C và:

- 1) Song song với đường thẳng (d) cho trước.
- 2) Vuông góc với mặt phẳng (Q) cho trước.

Cách giải:

- 1) Gọi: $(Q) = (d; C)$; $a = (P) \cap (Q) \Rightarrow a$ đi qua A và song song với d nên có pt xác định

Bài toán trở thành viết phương trình mp(P) đi qua a và tiếp xúc với mặt cầu (S)

- 2) Tương tự như trên với: d đi qua A và vuông góc với mp(Q).

Dạng 4: Đường tròn trong không gian

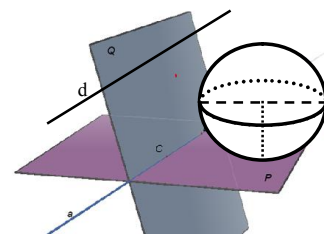
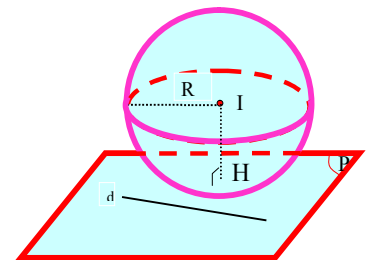
Bài toán 1:

Xác định tâm, tính bán kính đường tròn là giao của mặt phẳng với mặt cầu cho trước:

Cách giải:

Sử dụng tính chất ở phần B.I₂ để tìm tâm, tính bán kính đường tròn

Bài toán 2:



Tìm tâm và bán kính của đường tròn là giao của 2 mặt cầu (S), (S') có tâm lần lượt là I, I'; bán kính R, R'.

Cách giải:

- Đưa pt đường tròn là giao của 2 mặt cầu về pt đường tròn là giao của mặt cầu (S) với một mặt phẳng (Q).

- Tâm của đường tròn là $O = II' \cap (Q)$;

bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (P))}$.

Bài toán 3:

Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn sau kẻ từ A cho trước:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Cách giải:

Gọi B là tiếp điểm. Để ý rằng B thuộc đường tròn nên tọa độ B thỏa mãn (1).
Lại có: tiếp tuyến AB của đường tròn đồng thời là tiếp tuyến của mặt cầu tâm O nên:

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \quad (2)$$

từ (1) và (2) suy ra tọa độ B $\Rightarrow$ tiếp tuyến AB.

Dạng 5: Ứng dụng của mặt cầu giải một số bài toán đại số

Bài 1:

Tìm m để phương trình sau có đúng một nghiệm, hãy tìm nghiệm đó:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x - y + 2z = m \end{cases} \quad (1)$$

Giải:

Nghiệm của hệ phương trình (nếu có) là tọa độ điểm chung của:

mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (S) có tâm O(0; 0; 0) bán kính R = 1

và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - m = 0$

Do đó hệ (1) có đúng một nghiệm khi và chỉ khi (S) và (α) tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow d(O, (\alpha)) = \frac{|-m|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$$

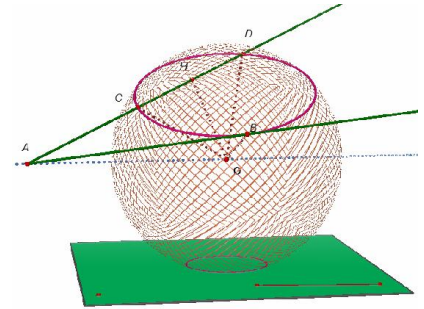
TH1: $m = 3$ nghiệm của hệ là hình chiếu vuông góc H của O trên $(\alpha_1): 2x - y + 2z - 3 = 0$

đường thẳng Δ qua O và vuông góc với (α_1) có phương trình
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

giá trị của tham số t tương ứng với điểm chung của (α_1) và Δ là $t = \frac{1}{3} \Rightarrow H \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$

TH2: $m = -3$. Gọi H' là hình chiếu vuông góc của O trên $(\alpha_2): 2x - y + 2z + 3 = 0$

$$\Rightarrow H' \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right) \text{ (tương tự như TH1)}$$



Vậy khi $m = 3$ thì hệ có nghiệm duy nhất là $\left(x = \frac{2}{3}; y = -\frac{1}{3}; z = \frac{2}{3}\right)$

khi $m = -3$ thì hệ có nghiệm duy nhất là $\left(x = -\frac{2}{3}; y = \frac{1}{3}; z = -\frac{2}{3}\right)$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + z = 3(1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3(2) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3(3) \end{cases}$$

Giải:

Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, tâm O bán kính $R = \sqrt{3}$ và mp(α): $x + y + z - 3 = 0$ tiếp xúc với nhau vì $d(O, (\alpha)) = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{3} = R$.

Do đó hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 3(1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3(2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất,

dễ thấy nghiệm đó là $x = y = z = 1$ và nghiệm này cũng thỏa (3). Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$

Bài 3: Cho ba số thực x, y, z thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTLN và GTNN của:

$$F = |2x + 2y - z - 9|$$

Giải:

Xét mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, tâm O, bán kính $R = 1$ và mặt phẳng (α): $2x + 2y - z - 9 = 0$

Đường thẳng Δ qua O và vuông góc với (α) có phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ giá trị tham

số t tương ứng với giao điểm của Δ và (S) là $t = \pm \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \Delta$ và (S) cắt nhau tại 2 điểm: $A\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ và $B\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

$$d(A, (\alpha)) = \frac{\left|\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - 9\right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2; \quad d(B, (\alpha)) = \frac{\left|-\frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - 9\right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$\text{Lấy } M(x; y; z) \in (S), \quad d(M, (\alpha)) = \frac{|2x + 2y - z - 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{3} F$$

$$\text{Luôn có} \quad d(A, (\alpha)) \leq d(M, (\alpha)) \leq d(B, (\alpha)) \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{3} F \leq 4 \Leftrightarrow 6 \leq F \leq 12$$

Vậy $F_{\min} = 6$ đạt khi $x = y = \frac{2}{3}; z = -\frac{1}{3}$

$$F_{\max} = 6 \text{ đạt khi } x = y = -\frac{2}{3}; z = \frac{1}{3}$$

Bài tập vận dụng:

Bài 1:

Trong hệ toạ độ Oxyz cho đường thẳng (d): $\begin{cases} 2x - 2y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$. Tìm m để d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm M, N sao cho $MN = 9$

Bài 2:

- Trong không gian Oxyz cho mp(P): $2x + 2y + z + 5 = 0$ và I(1; 2; -2):
- Lập phương trình mặt cầu (C), tâm I sao cho giao tuyến của mặt cầu (C) và mp (P) là đường tròn có chu vi bằng 8π
 - CMR; mặt cầu (C) nói trên tiếp xúc với (d): $2x - 2 = y + 3 = z$.
 - Lập phương trình mặt phẳng đi qua (d) mà tiếp xúc với mặt cầu (C).

Bài 3:

Cho điểm M(0; 2; 0) và đường tròn (C): $\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9 \text{ (S)} \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

- CMR: M nằm ngoài (C). Lập phương trình các tiếp tuyến kẻ từ M tới (C).
- Từ M kẻ các tiếp tuyến tới mặt cầu (S). Tìm tập hợp các tiếp điểm.

Bài 4:

Cho mặt cầu (S): $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 5$ và mp(P): $x - 2y + 2z + 1 = 0$

- CNR: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn. Lập phương trình đường tròn (C) là giao tuyến và tìm tâm, tính bán kính của đường tròn đó.
- Lập phương trình mặt cầu chứa (C) và tâm nằm trên mặt phẳng (Q): $x + y + z + 3 = 0$

Bài 5:

Cho 2 mặt cầu: $(S_1): (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 5$

$$(S_2): (x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 20$$

- CMR: Hai m/c cắt nhau, lập phương trình đường tròn giao tuyến của 2 m/c.
- Tìm tâm và bán kính của đường tròn.

Bài 6:

Cho mặt cầu (S): $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và mp(P): $x - 4y - 3z + 5 = 0$. Lập phương trình tiếp diện của (S) đi qua A(0; 1; 0) và vuông góc với mp(P).

Bài 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0 \\ 3x + 2y - 2z - 8 = 0 \\ 3x + 3y - 4z - 12 = 0 \end{cases}$

ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN:

Bài 1:

$$(S): I(-2; 3; 0), R = \sqrt{13 - m} \quad (m \geq 13)$$

$$d: A(0; 1; -1); \text{vtcp } \vec{a} = 3(2; 1; 2), d(I, d) = 3, IM^2 = IH^2 + d^2(I, d) \Rightarrow m = -\frac{65}{4}$$

Bài 2:

a) Bán kính đường tròn $r = 4, d(I, (P)) = 3 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$

b) $d(I, (\Delta)) = 5 = R \Rightarrow \text{đpcm}$

c) $2x - 11y + 10z - 35 = 0.$

Bài 3:

a) Gọi tiếp điểm là $H(x; y; z)$. Vì H thuộc (C) nên:
$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9 \quad (S) \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Lại có: $\Rightarrow \overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{MH} \Rightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 2 = 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) có: $H_1(2; 0; 0); H_2\left(-\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{16}{7}\right) \Rightarrow \text{pttt.}$

b) Gọi T là 1 tiếp điểm nên T thuộc m/c (S) (1)

Lại có: $MT = \sqrt{R^2 + MI^2} = 2\sqrt{2}$ nên T thuộc m/c (S') tâm M , bán kính $2\sqrt{2}$ có pt:

$$x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tập hợp T là giao của 2 m/c $(S), (S')$ nên là mp có phương trình

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Bài 4:

a) Đường tròn tâm $H\left(\frac{5}{3}; \frac{-7}{3}; \frac{-11}{3}\right); r = 2$

b) Tâm J của m/c nằm trên đường thẳng $IH \Rightarrow J = IH \cap (Q) \Rightarrow J(3; -5; -1)$

$$l = d(J, (P)) = 4 \Rightarrow \text{bán kính m/c: } R'^2 = r^2 + l^2 = 20$$

Bài 5:

a) $R_2 - R_1 < I_1 I_2 < R_2 + R_1 \Rightarrow \text{ĐPCM. Pt: } \begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 5 \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \quad (\alpha) \end{cases}$

b) Tâm $O = I_1 I_2 \cap (\alpha) \Rightarrow H\left(\frac{5}{3}; \frac{-7}{3}; \frac{-11}{3}\right); r = 2$

Bài 6: Lập pt đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P) :
$$\begin{cases} 4x + y - 1 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành lập pt mp đi qua d , tiếp xúc với (S) .

Bài 7:

Nghiệm của hệ là tọa độ điểm chung của:

Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ và đường thẳng Δ : $\begin{cases} 3x + 2y - 2z - 8 = 0 \\ 3x + 3y - 4z - 12 = 0 \end{cases}$

Δ qua M(0; 4; 0) và có VTCP $\vec{u} = (-2; 6; 3)$

$\Rightarrow \Delta$ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -2t \\ y = 4 + 6t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Giá trị tham số t tương ứng với điểm chung của (S) và Δ là nghiệm của phương trình:

$$(-2t)^2 + (4 + 6t)^2 + (3t)^2 - 2(-2t) - 4(4 + 6t) - 6 \cdot 3t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{10}{49} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta$ và (S) có hai điểm chung A(0; 4; 0) và $A\left(\frac{20}{49}; \frac{136}{49}; -\frac{30}{49}\right)$

Vậy hệ (3) có hai nghiệm $(0; 4; 0)$ và $\left(\frac{20}{49}; \frac{136}{49}; -\frac{30}{49}\right)$

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Tùy theo tính chất của từng bài toán, trong quá trình thực hiện có thể kết hợp đạo hàm với nhiều bất đẳng thức khác nhau như: Bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacôpski, Trêbursép.....kết hợp với chứng minh bằng quy nạp toán học.

Sau đây là một số bài toán về bất đẳng thức dùng phương pháp trên để giải:

Bài 1: Cho hai số a, b thỏa mãn: $a + b = 2$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 \geq 2$.

Hướng dẫn: Đặt $x = a \rightarrow b = 2 - x$. Khi đó $a^4 + b^4 = x^4 + (2 - x)^4$

Xét hàm số: $f(x) = x^4 + (2 - x)^4$

Ta có: $f'(x) = 4[x^3 - (2 - x)^3]$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

BBT:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Vậy $f(x) \geq 2, \forall x \rightarrow$ BĐT được chứng minh.

Tổng quát hơn: 1/ Cho hai số a, b thỏa mãn: $a + b = k$. Chứng minh các bất đẳng thức:

$$a^4 + b^4 \geq 2 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^4, \quad a^{2010} + b^{2010} \geq 2 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^{2010}.$$

2/ Cho hai số a, b thỏa mãn $a + b \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Bài 2: Cho a, b là các số không âm. Chứng minh rằng: $7a^3 + 3b^3 \geq 9a^2b$.

Hướng dẫn: Ta có bất đẳng thức: $7a^3 + 3b^3 - 9a^2b \geq 0$. (1)

- Nếu $a = 0$ thì (1) đúng với mọi $b \geq 0$.
- Nếu $a > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 3x^3 - 9x + 7 \geq 0$, với $x = \frac{b}{a}, x \geq 0$.

Đặt $f(x) = 3x^3 - 9x + 7$ ($x \geq 0$) $\rightarrow f'(x) = 9x^2 - 9 \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

BBT:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	7	1	$+\infty$

Vậy $f(x) \geq 1, \forall x \geq 0 \rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \geq 0 \rightarrow$ BĐT được chứng minh.

Bài 3: Cho $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng: $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{1,5x+1}$.

Hướng dẫn: Với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2\sqrt{2^{2\sin x + \tan x}}$

Cần chứng minh: $2\sqrt{2^{2\sin x + \tan x}} > 2^{1,5x+1}$ hay $2^{2\sin x + \tan x} > 2^{3x}$

$\Leftrightarrow 2\sin x + \tan x - 3x > 0$, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$.

Ta có $f'(x) = \frac{(\cos x - 1)^2 (\cos x + \frac{1}{2})}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(0; \frac{\pi}{2})$

Do đó với $x > 0$ ta có $f(x) > f(0) = 0 \rightarrow$ BĐT được chứng minh.

Bài 4: Chứng minh rằng: Nếu $x > 0$, n là số nguyên dương thì ta luôn có:

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Hướng dẫn: Đặt $f_n(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!})$.

Cần chứng minh $f_n(x) > 0, \forall x > 0$.

- Ta có: $f_1(x) = e^x - 1 > 0, \forall x > 0$.

- Giả sử $f_k(x) > 0, \forall x > 0$. Ta chứng minh $f_{k+1}(x) > 0, \forall x > 0$

Thật vậy: $f'_{k+1}(x) = f_k(x) > 0, \forall x > 0 \rightarrow$ hàm số $f_{k+1}(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó khi $x > 0$ ta có $f_{k+1}(x) > 0$.

Vậy $f_n(x) > 0, \forall x > 0 \rightarrow$ BĐT được chứng minh.

Bài 5: Cho ΔABC có 3 góc nhọn, chứng minh rằng:

$$3(a + b + c) \leq \pi \left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} \right) \quad (1)$$

Hướng dẫn: BĐT (1) $\Leftrightarrow 3(\sin A + \sin B + \sin C) \leq (A + B + C) \left(\frac{\sin A}{A} + \frac{\sin B}{B} + \frac{\sin C}{C} \right)$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Ta có: $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

Xét hàm số $g(x) = x \cos x - \sin x, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Ta có: $g'(x) = -x \sin x < 0, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \rightarrow$

hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{2}) \rightarrow g(x) < g(0) = 0$.

Suy ra $f'(x) < 0, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$ hay hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{2})$.

Từ đó nếu giả sử $A \geq B \geq C$ thì $f(A) \leq f(B) \leq f(C)$ hay $\frac{\sin A}{A} \leq \frac{\sin B}{B} \leq \frac{\sin C}{C}$.

Áp dụng BĐT Trêbusép cho 2 dãy số: (A, B, C) và $(\frac{\sin A}{A}, \frac{\sin B}{B}, \frac{\sin C}{C})$ ta có BĐT cần chứng minh.

Bài 6: Chứng minh rằng: Nếu phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm thì $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn: Giả sử phương trình có nghiệm là x_0 thì $x_0 \neq 0$ và

$$x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 + \frac{1}{x_0})^2 + a(x_0 + \frac{1}{x_0}) + b - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}, (|y_0| \geq 2) \text{ ta được phương trình: } y_0^2 + ay_0 + b - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - y_0^2 = ay_0 + b. \text{ Do đó: } (2 - y_0^2)^2 = (ay_0 + b)^2 \leq (a^2 + b^2)(y_0^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(2 - y_0^2)^2}{y_0^2 + 1}. \text{ Xét hàm số: } f(t) = \frac{(2 - t)^2}{t + 1}, \text{ với } t \geq 4 \rightarrow f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 8}{(t + 1)^2},$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}. \text{ Ta có BBT:}$$

t	4	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$

Vậy $f(t) \geq \frac{4}{5}, \forall t \geq 4 \rightarrow$ BĐT $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$. dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{4}{5} \\ 2a + 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{4}{5} \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Bài 7: Chứng minh rằng: Nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $3x - x^3 < \frac{2}{\sin 2x}$

Hướng dẫn: Xét các hàm số: $f(x) = \frac{2}{\sin 2x}$ và $g(x) = 3x - x^3$

Với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin 2x \leq 1 \rightarrow \frac{2}{\sin 2x} \geq 2$ hay $f(x) \geq 2$, dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{\pi}{4}$.

$$g'(x) = 3 - 3x^2, \begin{cases} g'(x) = 0 \\ x \in (0; \frac{\pi}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \rightarrow g(1) = 2$$

$g''(x) = -6x < 0, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Suy ra: $g(x) \leq g(1) = 2, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$, dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.

Vậy $3x - x^3 < \frac{2}{\sin 2x}$, với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Bài 8: Gọi V, S là thể tích và diện tích xung quanh của một hình nón tròn xoay.

Chứng minh rằng: $(\frac{SV}{\pi})^2 \leq (\frac{2S}{\pi\sqrt{3}})^3$ (1)

Hướng dẫn: Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2}$ (R : bán kính đáy; l : đường sinh, $l > R$)

$$(1) \Leftrightarrow 4R^4(l^2 - R^2) \leq \frac{8R^3 l^3}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{R}{l} - (\frac{R}{l})^3 \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (2)$$

Đặt $x = \frac{R}{l}$ ($0 < x < 1$), xét hàm số: $f(x) = x - x^3 \rightarrow f'(x) = 1 - 3x^2$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ta có BBT:

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{2}{2\sqrt{3}}$	

Vậy $\forall x \in (0; 1)$ ta có $f(x) \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} \rightarrow$ BĐT được chứng minh.

Bài 9: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (1)

Hướng dẫn: Từ giả thiết suy ra: $0 < a, b, c < 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{a^3}{a-a^3} + \frac{b^3}{b-b^3} + \frac{c^3}{c-c^3} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Xét hàm số: $f(x) = x - x^3$ với $0 < x < 1 \rightarrow f'(x) = 1 - 3x^2$

Tương tự bài 8 ta có: $f(x) \leq \frac{2}{2\sqrt{3}}, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \forall x \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-x^3} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \quad (2).$$

Lần lượt thay $x = a, b, c$ vào (2) rồi cộng vế theo vế ta được BĐT (1).

Bài 10: Chứng minh rằng: $\cos \frac{2x}{1+x^2} + \cos \frac{4x}{1+x^2} \geq \cos 1 + \cos 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn: BĐT đã cho $\Leftrightarrow \cos \frac{2x}{1+x^2} + \cos \frac{4x}{1+x^2} + 1 \geq \cos 1 + 2\cos^2 1 \quad (1)$

Xét hàm số: $y = \cos \frac{2x}{1+x^2} + \cos \frac{4x}{1+x^2} + 1$

$$\text{Đặt } u = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow ux^2 - 2x + u = 0$$

Nếu $u = 0$ thì $x = 0$, $u \neq 0$ thì $|u| \leq 1$

Đặt $t = \cos u$, từ $|u| \leq 1 \rightarrow \cos 1 \leq t \leq 1$ và được hàm số $g(t) = 2t^2 + t$

$\rightarrow g'(t) = 4t + 1 > 0, \forall t \in [\cos 1; 1] \rightarrow$ hàm số $g(t)$ đồng biến trên $[\cos 1; 1]$

$\rightarrow g(t) \geq g(\cos 1) = 2\cos^2 1 + \cos 1, \forall t \in [\cos 1; 1] \rightarrow$ BĐT được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = \cos 1$ hay $\cos u = \cos 1 \Leftrightarrow u = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bài 11: Cho $0 < b < a$. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (1)$

Hướng dẫn: BĐT (1) $\Leftrightarrow 1 - \frac{b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a}{b} - 1. \quad (2)$

Đặt $x = \frac{a}{b}$, do $0 < b < a$ nên $x > 1$. BĐT (2) $\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1, \forall x > 1$.

- Chứng minh: $\ln x < x-1, \forall x > 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 < 0, \forall x > 1$.

Đặt $f(x) = \ln x - x + 1 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0, \forall x > 1 \rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Do đó với $x > 1$ thì $f(x) < f(1) = 0 \rightarrow \ln x < x-1, \forall x > 1$.

- Chứng minh: $\frac{x-1}{x} < \ln x, \forall x > 1 \Leftrightarrow \ln x - \frac{x-1}{x} > 0, \forall x > 1$.

Đặt $g(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$. Chứng minh tương tự ta được $g(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

$\rightarrow g(x) > g(1) = 0, \forall x > 1$ hay $\ln x - \frac{x-1}{x} > 0, \forall x > 1$.

Từ đó suy ra BĐT cần được chứng minh.

Bài 12: Chứng minh rằng: Với $x \geq 2$ thì $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x \geq 6. \quad (1)$

Hướng dẫn: Đặt $t = (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x, t \geq 3+2\sqrt{2}$ với mọi $x \geq 2$.

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t} \geq 6 \\ t \geq 3+2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = t^2 - 6t + 1 \geq 0 \\ t \geq 3+2\sqrt{2} \end{cases}$$

t	$-\infty$	$3-2\sqrt{2}$	$3+2\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f(t)$	+	0	-	0	+

Vậy $f(t) \geq 0, \forall t \geq 3+2\sqrt{2} \rightarrow$ BĐT cần chứng minh.

Bài 13: Cho $a \leq 6, b \leq -8, c \leq 4$. Chứng minh rằng: $\forall x \geq 1$ ta đều có:

$$x^4 - ax^2 - bx + 1 \geq c.$$

Hướng dẫn: Xét hàm số: $f(x) = x^4 - ax^2 - bx + 1$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 2ax - b$; $f''(x) = 12x^2 - 2a = 2(6x^2 - a)$

Với $a \leq 6, \forall x \geq 1$ thì $f''(x) > 0 \rightarrow$ hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

Suy ra $f'(x) > f'(1) = 4 - (2a + b) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$. Do đó $f(x) \geq f(1) = 1 - a - b + 1 = 2 - (a + b) \geq 4 \geq c$

Vậy $f(x) \geq c \rightarrow$ BĐT được chứng minh.

Bài 14: Chứng minh rằng: $x^4 + px + q \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \left(\frac{q}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{p}{4}\right)^4$ (1)

Áp dụng chứng minh rằng: Nếu 2 số m, n thỏa mãn (1) thì: $nx^4 + mx^3 + 1 \geq 0, \forall x \in R$ (2)

Hướng dẫn: Xét hàm số: $f(x) = x^4 + px + q$.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + p \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{p}{4}} \rightarrow$ BBT:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{\frac{p}{4}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{3p}{4}\sqrt[3]{\frac{p}{4}} + q$	$+\infty$

Suy ra $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3p}{4}\sqrt[3]{\frac{p}{4}} + q \geq 0 \Leftrightarrow q \geq \frac{3p}{4}\sqrt[3]{\frac{p}{4}} \Leftrightarrow \left(\frac{q}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{p}{4}\right)^4 \rightarrow$ BĐT (1) được chứng minh.

Áp dụng: * Nếu $x = 0$ thì (2) thỏa mãn $\forall x \in R$.

Nếu $x \neq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^4 + m\left(\frac{1}{x}\right) + n \geq 0$.

Đặt $t = \frac{1}{x}, p = m, q = n$ thì ta có $f(t) \geq 0 \rightarrow$ BĐT (2) được chứng minh.

Bài 15: Cho 3 số $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

Hướng dẫn: Đặt $x = a, x \in [0; 1]$. Xét hàm số:

$$f(x) = \frac{x}{b+c+1} + \frac{b}{c+x+1} + \frac{c}{x+b+1} + (1-x)(1-b)(1-c), \forall x \in [0; 1]$$

Ta có: $f'(x) = -\frac{b}{(x+c+1)^2} - \frac{c}{(x+b+1)^2} + d$, trong đó $d = \frac{1}{b+c+1} - (1-b)(1-c)$

$\rightarrow f''(x) = \frac{2b}{(x+c+1)^3} + \frac{2c}{(x+b+1)^3} \geq 0, \forall x \in [0; 1] \rightarrow$ hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $[0; 1]$

Ta xét 3 trường hợp sau:

- TH 1: $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1]$. Ta có:

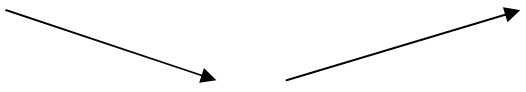
$$f(x) \leq f(1) = \frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{1+c+1} + \frac{c}{b+1+1} \leq \frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{b+c+1} \leq 1, \forall x \in [0; 1]$$

- TH 2: $f'(x) \leq 0, \forall x \in [0; 1]$. Ta có:

$$f(x) \leq f(0) = \frac{b}{c+1} + \frac{c}{b+1} + (1-b)(1-c) = \frac{1+b+c+b^2c^2}{1+b+c+bc} \leq 1, \forall x \in [0; 1]$$

- TH 3: $f'(x)$ có dấu thay đổi trên $[0; 1]$. Ta có BBT:

x	0	x_0	1
---	---	-------	---

$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Suy ra: $\max_{[0;1]} f(x) = \max\{f(0); f(1)\}$.

Mà $f(0) \leq 1, f(1) \leq 1$ nên $\max_{[0;1]} f(x) \leq 1$. Vậy $f(x) \leq 1, \forall x \in [0;1]$

BÀI TẬP

Bài 1: Chứng minh rằng: Với $x > 0$ ta có các bất đẳng thức:

a) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ (HD: Xét hàm số: $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$, với $x > 1$.

b) $\ln x < \frac{2(x-1)}{x+1}$ (HD: Xét hàm số: $f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x$, với $x > 1$.

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, chứng minh rằng:

$$\sin A + \sin B + \sin C + \tan A + \tan B + \tan C > 2\pi$$

HD: Xét hàm số: $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Bài 3: Cho $x \in [0; \frac{\pi}{2})$. Chứng minh rằng: $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2^{x+1}$.

Bài 4: Cho $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{b}$.

HD: Xét hàm số: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ và chứng minh $f(x)$ nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{2})$.

Bài 5: Cho $a + b = 2$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3$

HD: Đặt $x = a \rightarrow b = 2 - x$. Xét hàm số: $f(x) = x^4 + (2-x)^4 - x^3 - (2-x)^3$

Bài 6: Chứng minh rằng: Nếu $|x| < 1, n \in \mathbb{N}, n > 1$ thì $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$

Bài 7: Với $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Chứng minh rằng: $4x^2 - 4ax + a^2 - 2a \geq 2$, với $\forall x \in [-2; 0]$.

