

PHẦN THỨ NHẤT- PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài.

Số phức là một chuyên đề quan trọng trong chương trình toán phổ thông. Sau nhiều lần cải cách giáo dục và thay sách giáo khoa, số phức được chính thức đưa vào từ năm học 2008-2009 trong chương trình giải tích 12. Trong các đề thi đại học , cao đẳng, các đề thi học sinh giỏi, các đề thi Olympic ta thấy các bài toán liên quan về số phức xuất hiện rất nhiều và được đề cập dưới nhiều dạng phong phú. Các phương pháp giải vừa mang tính tổng hợp cao vừa mang tính đặc thù sâu sắc.

Qua một số năm giảng dạy bản thân thấy số phức là một công cụ toán học đặc lực , có nhiều ứng dụng , nhưng được trình bày trong sách giáo khoa còn rất đơn giản. Do đó rất nhiều học sinh, thậm chí là học sinh giỏi sau khi học xong chương trình số phức cũng chỉ hiểu một cách đơn sơ. Việc sử dụng số phức cũng còn rất hạn chế như tính toán trên số phức, giải phương trình bậc hai, một số phương trình bậc cao dạng đặc biệt, tính các tổng có dạng đặc biệt. Thực tế nghiên cứu ta thấy số phức có ứng dụng rộng rãi hơn nhiều. Số phức có thể dùng làm công cụ giải quyết bài toán đại số, bài toán số học , bài toán tổ hợp, đặc biệt tỏ ra hiệu quả nhất là bài toán hình học phẳng và bài toán lượng giác. Nhờ biểu diễn của số phức dưới các dạng đại số , hình học và lượng giác nên những ứng dụng này là hết sức tự nhiên. Qua quá trình ứng dụng ta thấy được mối quan hệ chặt chẽ giữa số phức với hình học và vectơ.

Trọng tâm của đề tài tác giả chú trọng tới vấn đề sử dụng số phức làm công cụ giải toán chứ không chú trọng tính toán đối với số phức. Hướng nghiên cứu cũng xoay sâu vào nội dung ứng dụng của nó. Tác giả đã cố gắng tìm tòi và đưa vào những ứng dụng tiêu biểu nhằm giúp học sinh có thêm công cụ giải toán.

Khi nghiên cứu đề tài này, tác giả mong muốn có một cái nhìn toàn diện toán học dưới nhiều góc độ, thấy được mối tương quan giữa các lĩnh vực toán học. Trên hết là rèn luyện cho học sinh khả năng tư duy linh hoạt, thấy được tầm quan trọng của số phức trong giải toán. Giới thiệu tới các em một công cụ toán học tốt mà các em ít có điều kiện tiếp cận.

Việc nghiên cứu đề tài này cũng là một phần trong quá trình tác giả tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi và luyện thi đại học ở trường phổ thông. Quá trình nghiên cứu cũng đã giúp cho bản thân có cái nhìn sâu sắc và đầy đủ hơn về số phức, tạo cho mình một tài liệu chuyên về số phức , phục vụ cho quá trình giảng dạy.

2) Nội dung nghiên cứu.

Đề tài nghiên cứu về nội dung số phức dưới góc độ các ứng dụng của nó vào trong giải toán.

2.1) Khách thể nghiên cứu.

Đề tài nghiên cứu trên khách thể là học sinh trung học phổ thông, đối tượng chủ yếu là lớp luyện thi đại học và lớp bồi dưỡng học sinh giỏi.

2.2) Tác động được thực hiện.

+ Hiện trạng :

Học sinh nắm kiến thức về số phức sơ sài. Chưa thấy được những ứng dụng của số phức vào các phần toán học khác. Chưa sử dụng số phức linh hoạt và sáng tạo để làm công cụ giải toán.

+ Cơ sở khoa học:

Cơ sở khoa học là các kiến thức về số phức được trình bày trong chương trình giải tích lớp 12.

Các kiến thức nền tảng của những lĩnh vực mà đề tài nghiên cứu .

+ Cơ sở thực tiễn:

Cơ sở thực tiễn là những nội dung kiến thức học sinh gặp phải cần giải quyết trong các lớp luyện thi và lớp bồi dưỡng học sinh giỏi.

2.3) Những thuận lợi và khó khăn khi thực hiện đề tài.

+ Thuận lợi:

Được sự quan tâm chỉ đạo của ban giám hiệu nhà trường. Được sự động viên giúp đỡ, đóng góp ý kiến của thầy tổ trưởng và thầy cô khác trong bộ môn Toán.

Được tạo điều kiện trong việc giảng dạy các lớp luyện thi và lớp bồi dưỡng, qua đó học sinh có điều kiện tiếp xúc với những kiến thức trong đề tài thường xuyên, do đó đề tài có điều kiện áp dụng thực tế giảng dạy nhiều hơn.

+ Khó khăn:

Kiến thức nền tảng về số phức được trình bày trong chương trình còn ở mức độ đơn giản nên học sinh gặp khó khăn khi lĩnh hội kiến thức trong chuyên đề. Thời gian dành cho nội dung số phức trong chương trình hạn chế nên việc triển khai gặp phải nhiều khó khăn về mặt thời gian.

Học sinh ở trường giảng dạy đa phần là yếu trong khi các kiến thức trong đề tài ở mức độ khá cao nên các em nắm chưa được nhiều.

Chương trình số phức trong chương trình chính khóa được trình bày cuối năm lớp 12 nên để học sinh lớp 10 và 11 có thể vận dụng được cần trang bị cho các em những kiến thức cơ bản về số phức.

3) Phương pháp nghiên cứu đề tài.

Để nghiên cứu đề tài này , tác giả đã phối hợp các phương pháp:

- Phương pháp tiếp cận vấn đề.
- Phương pháp phân tích , bình luận
- Phương pháp tổng hợp, hệ thống hóa
- Phương pháp chọn lọc .

3.1) Phương pháp tiếp cận vấn đề .

Đề tài này được tác giả ấp ủ từ những năm 2009 sau một thời gian tham gia giảng dạy. Từ đó đến nay, tác giả đã tiếp cận với nhiều khóa học trò, tiếp cận với nhiều đề thi đại học và học sinh giỏi , từ đó rút ra được nhiều nội dung hơn, có sự đánh giá ngày càng toàn diện hơn. Qua phân tích và giải đề thi, giúp tác giả có được nhiều ví dụ dẫn chứng cho dạng bài tập mà mình đưa ra. Từ đó đề tài có nội dung phong phú hơn. Đề tài được trình bày theo các vấn đề từ mức dễ đến khó hơn. Từ đó dẫn dắt học sinh có thể lĩnh hội được dần các nội dung khó.

Các kiến thức Toán sẽ được dùng trong phần nào tác giả đều cố gắng trình bày cụ thể cơ sở để học sinh có thể nắm bắt lý thuyết trước, sau đó mới vận dụng vào làm bài tập. Xem đó là kiến thức cơ sở cho nội dung đang xét tới. Với cách trình bày đó, học

sinh sẽ không cảm thấy đón nhận kiến thức một cách gượng ép. Các em có thể từ từ tiếp cận vấn đề một cách tự nhiên.

Các nội dung ứng dụng khác nhau được trình bày theo dạng các bài học § , nhằm tránh sự nặng nề không cần thiết cho học sinh. Cuối mỗi bài có phần bài tập đề nghị để học sinh có thể tự rèn luyện kiến thức và kỹ năng cho mình.

3.2) Phương pháp phân tích , bình luận.

Trước khi đi vào mỗi dạng , tác giả thường đưa ra những **phân tích** của mình về các vấn đề thường gặp của dạng đó. Khái quát phương pháp giải cũng như chỉ ra các việc cần làm khi giải. Học sinh sẽ bước đầu hình dung được nội dung phương pháp giải tổng quát của vấn đề mình đang gặp.

Qua các ví dụ , tác giả thường có các **bình luận** về dạng bài tập đó, từ đó học sinh có thể thấy rõ bản chất của vấn đề mình đang gặp phải. Thấy được tính cụ thể cũng như tổng quát trong mỗi bài toán.

Qua mỗi **bình luận** tác giả muốn trao đổi với người đọc về phương pháp giải, cách suy nghĩ nào đi tới lời giải như thế. Thấy được tính tương tự hóa trong các bài toán khác nhau.

Một khi nắm được bản chất, học sinh có thể làm được các bài tập tương tự , cũng như có thể sáng tạo ra các bài toán khác từ bài toán gốc.

3.3) Phương pháp tổng hợp, hệ thống hóa.

Đây là phương pháp chủ đạo của đề tài. Nội dung đề tài được phân chia thành nhiều dạng Toán, đó là quá trình tổng hợp những kiến thức từ nhiều nguồn tài liệu và từ bản thân rút ra. Các dạng bài tập đưa ra cũng ở mức độ khá trở lên, nên đòi hỏi nhiều quá trình suy luận và tổng hợp lời giải .Vì nội dung đề tài xuyên suốt cả một vấn đề Toán học khá rộng , nên đòi hỏi người viết phải có sự chuẩn bị khá lâu dài về mặt thời gian (ý tưởng hình thành), và khi viết ra cần phải tổng hợp các kiến thức lại thành chủ đề thống nhất.

Các chủ đề khác nhau được hệ thống hóa theo một bố cục chặt chẽ , nhằm làm toát lên tính ứng dụng của số phức trong mỗi dạng bài toán.

Đọc qua đề tài ta thấy các vấn đề Toán học đề cập tới ở đây đều gắn trên cái cột sống số phức, các biểu diễn, các biến đổi số phức. Tác giả đã cố gắng tổng hợp các vấn đề Toán học có cùng bản chất đó.

3.4) Phương pháp chọn lọc.

Ứng dụng của số phức còn rất nhiều nhưng ở đây tác giả chọn lọc ra những ứng dụng mang tính rộng rãi hơn, phù hợp với trình độ của học sinh, với nội dung chương trình mà các em thường gặp hằng ngày. Các ứng dụng mang tính chuyên sâu như ứng dụng vào số học, vào dãy số, vào tổ hợp không được trình bày ở đây. Các ví dụ đưa ra làm minh họa cho phương pháp cũng được chọn lọc rất kỹ, vừa cố gắng đảm bảo tính điển hình, vừa có mức kiến thức vừa phải, phù hợp với chương trình phổ thông.

4) Mục đích nghiên cứu đề tài.

Chọn đề tài số phức và các ứng dụng để nghiên cứu với những mục đích như sau:

Muốn có sự đầu tư nhiều hơn về nội dung số phức, một nội dung mà bản thân cảm thấy mình còn vấp phải nhiều khó khăn trong quá trình giảng dạy. Do số phức là một chủ đề mới nên chưa có nhiều tài liệu tiếp cận một cách đầy đủ. Bằng việc nghiên cứu tìm tòi để viết về nó, tôi hi vọng mình sẽ trau dồi thêm kiến thức và kỹ năng về toán số phức.

Tạo cho mình một tài liệu riêng theo cách hiểu của mình, bằng ngôn ngữ của mình, phục vụ cho quá trình giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi, luyện thi đại học.

Có điều kiện để trao đổi, học hỏi kinh nghiệm từ đồng nghiệp gần xa.

Đưa tới cho học sinh một tài liệu tham khảo đã được bản thân nghiên cứu, trình bày theo ngôn ngữ của mình, giúp các em trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi và luyện thi Đại học.

5) Nhiệm vụ của việc nghiên cứu đề tài.

Quá trình nghiên cứu đề tài để bản thân trau dồi thêm kiến thức chuyên môn và nghiệp vụ. Cách thức thực hiện một đề tài khoa học . Có điều kiện để trao đổi nhiều hơn với thầy cô trong tổ Toán về các vấn đề Toán. Quan trọng hơn nữa là đưa tới cho học sinh một số dạng bài tập có ứng dụng cao trong các kỳ thi, giúp các em có kết quả tốt hơn.

Đề tài mà tác giả thực hiện với nhiệm vụ là giúp học sinh cải tiến phương pháp học tập. Biết quan tâm tới bản chất Toán học trong mỗi phát biểu. Có cái nhìn linh động đối với các dạng toán. Các ứng dụng được tác giả đưa ra đây là những dạng thường gặp trong các kỳ thi, nhằm rèn luyện kỹ năng và phương pháp giải cho học sinh.

Đề tài khi được công bố, nó giúp học sinh nắm vững hơn về số phức, sử dụng số phức một cách linh động và hiệu quả, thấy được mối quan hệ mật thiết giữa số phức với các lĩnh vực toán học khác.

6) Phạm vi nghiên cứu.

Đề tài nghiên cứu về lĩnh vực số phức dưới góc độ nó là một công cụ giải toán. Những ứng dụng của số phức trong đại số, lượng giác, tổ hợp, hình học sẽ lần lượt được trình bày. Do đó các lĩnh vực trên sẽ được tác giả đề cập tới trong chuyên đề.

Phạm vi kiến thức tác giả sử dụng là hoàn toàn sơ cấp, chỉ phát triển từ sách giáo khoa. Do đó phù hợp cho đối tượng học sinh phổ thông. Chẳng hạn có nhiều bài toán trong chuyên đề nếu biểu diễn số phức ở dạng mũ là $z = re^{i\varphi}$ sẽ cho kết quả gọn hơn nhiều nhưng tác giả không trình bày ở đây, vì lý do dạng mũ học sinh phổ thông không nghiên cứu.

PHẦN THỨ HAI- NỘI DUNG ĐỀ TÀI

§1. Ứng dụng số phức để giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình.

Phân tích

Xét phương trình $f(z)=0$ và với nghiệm $z=x+yi$ ($x,y \in \mathbb{R}$), ta có thể giải bằng cách

tách phần thực riêng và phần ảo riêng, đưa về xét hệ phương trình $\begin{cases} h(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$. Ý

tưởng này ta có thể gặp trong sách giáo khoa khi tìm căn bậc hai, bậc ba của một số phức dưới dạng đại số.

Bây giờ ta xét ý tưởng đó dưới góc độ giải một phương trình hoặc hệ phương trình.

Ví dụ 1:

$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 & (1) \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 & (2) \end{cases} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

Giải:

Nhân phương trình (2) với i rồi cộng vế theo vế với phương trình (1) ta được:

$$x+yi + \frac{3x-y-(x+3y)i}{x^2+y^2} = 3 \Rightarrow x+yi + \frac{3(x-yi)}{x^2+y^2} - \frac{i(x-yi)}{x^2+y^2} = 3$$

Đặt $z=x+yi$ ($x,y \in \mathbb{R}$), phương trình trở thành $z + \frac{(3-i)\bar{z}}{|z|^2} = 3$. Ta có $|z|^2 = z\bar{z}$. Nên ta có

phương trình $z + \frac{(3-i)}{z} = 3 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 - i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2+i \\ z = 1-i \end{cases}$. Từ đó suy ra nghiệm (x,y)

là $(2;1)$; $(1;-1)$.

Ví dụ 2: (Thi học sinh giỏi quốc gia 96)

Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$$

Giải: Điều kiện $x, y > 0$. Đặt $u = \sqrt{x}$; $v = \sqrt{y}$. Đưa hệ về hệ mới
$$\begin{cases} u\left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ v\left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Ta đặt $z = u + vi$ ($u, v \in \mathbb{R}$). Nhân phương trình thứ hai với i rồi cộng về theo về ta được phương trình

$$u + vi + \frac{u - vi}{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i.$$

Vì $\frac{u - vi}{u^2 + v^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$, phương trình được viết lại

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i\right)z + 1 = 0.$$

Giải phương trình cuối ta được $z = \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}} + i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right)$. Từ đó suy ra

$$(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right).$$

Cuối cùng hệ có hai nghiệm $(x, y) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2; \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right)^2\right)$.

Bình luận:

Qua hai ví dụ trên ta thấy điều căn bản để của việc sử dụng số phức đó là thấy được các vế trái của mỗi phương trình là ứng với phần thực và phần ảo của một biểu thức phức nào đó. Bằng các biến đổi hợp lý ta đưa về một phương trình phức. Kỹ năng nhân hai vế phương trình nào đó với số đơn vị ảo i là cần thiết.

Ví dụ 3:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{2013}} = 2013\sqrt{\frac{2014}{2013}} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{2013}} = 2013\sqrt{\frac{2012}{2013}} \end{cases}$$

Giải:

Xét các số phức $z_j = \sqrt{1+x_j} + \sqrt{1-x_j}i$; $j=1,2,\dots,2013$. Khi đó $|z_j| = \sqrt{2}$. Do đó

$$\sum_{j=1}^{2013} |z_j| = 2013\sqrt{2}.$$

Mặt khác ta có $\sum_{j=1}^{2013} z_j = (\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{2013}}) + (\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{2013}})i$.

Nên

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{2013} z_j \right| &= \sqrt{(\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{2013}})^2 + (\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{2013}})^2} \\ &= \sqrt{2013 \cdot 2014 + 2013 \cdot 2012} = 2013\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Như vậy ta có $\sum_{j=1}^{2013} |z_j| = \left| \sum_{j=1}^{2013} z_j \right|$. Chứng tỏ các số phức z_j bằng nhau.

Vậy hệ có nghiệm $x_1 = x_2 = \dots = x_{2013} = \frac{1}{2013}$.

Ví dụ 4 :

Giải phương trình $\left| \sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 40} \right| = x^2 + 5x + \frac{45}{4}$.

Giải :

Phương trình xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$$\left| \sqrt{(x+1)^2 + 4} - \sqrt{(2-x)^2 + 36} \right| = x^2 + 5x + \frac{45}{4}. \text{ Ta xét các số phức } z_1 = x+1-2i ; z_2 = 2-x+6i.$$

Ta có $z_1 + z_2 = 3+4i$; $|z_1 + z_2| = 5$; $|z_1| = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$; $|z_2| = \sqrt{(2-x)^2 + 36}$.

Theo tính chất mô đun ta có $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| = 5$.

Nhưng xét về phải ta có $x^2 + 5x + \frac{45}{4} = \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 + 5 \geq 5$.

Kết hợp lại ta được $\left| |z_1| - |z_2| \right| = |z_1 + z_2| = 5$. Dấu đẳng thức xảy ra trong các trường hợp sau:

TH1 : $z_1 = 0$ hoặc $z_2 = 0$ không xảy ra.

TH2: Hai số phức thỏa mãn $z_1 = kz_2$ với $k < 0$ suy ra $\frac{x+1}{-2} = \frac{2-x}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{5}{2}$.

Bình luận : Thông thường khi các vế xuất hiện dạng căn thức hoặc trị tuyệt đối thì ta nghĩ đến mô-đun, đến hiệu mô-đun của những số phức nào đó. Cần chú ý việc chọn các số phức hợp lý để mô-đun của một tổng là một hằng số. Điều này quyết định sự thành công của lời giải.

Ví dụ 5

Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{29}$.

Giải:

Xét các số phức $z_1 = 1 - x + 2i$; $z_2 = 1 + x + 3i$.

Khi đó ta có $|z_1| = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$; $|z_2| = \sqrt{x^2 + 2x + 10}$; $z_1 + z_2 = 2 + 5i$; $|z_1 + z_2| = \sqrt{29}$.

Kết hợp với đề bài ta có $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$, điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi

$z_1 = kz_2$; $k > 0$. Do đó ta có

$$\frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{3} > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{5}$.

Ví dụ 6:

Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$ có nghiệm.

Giải:

Xét hai số phức $z_1 = \frac{1}{2} + x - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = \frac{1}{2} - x + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Ta suy ra $|z_1| = \sqrt{x^2 + x + 1}$;

$$|z_2| = \sqrt{x^2 - x + 1}; |z_1 + z_2| = 1.$$

Theo tính chất mô-đun ta có $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$z_1 = 0$ hoặc $z_2 = 0$ hoặc $z_1 + z_2 = 0$. Nhưng cả ba trường hợp không thể xảy ra. Do đó ta luôn có $||z_1| - |z_2|| < 1$.

Vậy phương trình có nghiệm khi $-1 < m < 1$.

Ví dụ 7:

Giải phương trình $\sqrt{9x^3 - 18x^2} + \sqrt{36x^2 - 9x^3} = 9 + x^2$.

Giải:

Phương trình có nghĩa khi $2 \leq x \leq 4$.

Xét các số phức $z_1 = 1+i$; $z_2 = \sqrt{9x^3 - 18x^2} + \sqrt{36x^2 - 9x^3}.i$. Ta suy ra $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = 3x\sqrt{2}$,
 $|z_1||z_2| = 6x$.

Ta gọi các vectơ $\vec{u} = (1;1)$; $\vec{v} = (\sqrt{9x^3 - 18x^2}; \sqrt{36x^2 - 9x^3})$ là các vectơ biểu diễn cho các số phức $z_1; z_2$.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{9x^3 - 18x^2} + \sqrt{36x^2 - 9x^3}$.

Ta luôn có bất đẳng thức $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, suy ra $9 + x^2 \leq 6x \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Thử lại $x = 3$ thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ví dụ 8 :

Giải phương trình $\sqrt{x-2\sqrt{x-4}-3} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 1$.

Giải :

Điều kiện $x \geq 4$.

Viết lại phương trình thành $\sqrt{(\sqrt{x-4}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{x-4})^2} = 1$.

Xét các số phức $z_1 = \sqrt{x-4}-1+0i$; $z_2 = 2-\sqrt{x-4}+0i$. Ta suy ra

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{x-4}-1)^2}; |z_2| = \sqrt{(2-\sqrt{x-4})^2}.$$

Và $z_1 + z_2 = 1+0i \Rightarrow |z_1 + z_2| = 1$.

Vì $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$, kết hợp với giả thiết suy ra $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$.

Dấu « = » xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{x-4}-1}{2-\sqrt{x-4}} = k > 0 \Leftrightarrow x = \frac{5+6k}{1+k}$

Bài tập đề nghị :

1) Giải bất phương trình $(3-x)\sqrt{x-1} + \sqrt{5-2x} \geq \sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$.

2) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x+5} = \sqrt{10}$

3) $\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1} = \sqrt{2}$

4) $\sqrt{3-2x-x^2} + \sqrt{24-23x-x^2} = 10$

$$5) \quad \sqrt{10-3x-x^2} + \sqrt{18-7x-x^2} \leq \sqrt{77}$$

$$6) \quad \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} \leq 2$$

$$7) \quad \left| \sqrt{x^2-4x+5} - \sqrt{x^2-10+50} \right| \geq 5$$

$$8) \quad \sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{3x^2+4x+1}.$$

9) Giải các hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(1 - \frac{12}{3x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{y} \left(1 + \frac{12}{3x+y} \right) = 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

10) Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1} + \sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1} = 3$$

§2 Ứng dụng số phức vào chứng minh bất đẳng thức.

Phân tích :

Ta lưu ý rằng $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$ với $z_1; z_2$ là các số phức bất kỳ. Để sử dụng số phức vào chứng minh bất đẳng thức, ta phải đưa giả thiết và kết luận của bài toán về qua các biểu diễn số phức. Để lời giải thành công thì cần phải chọn các số phức hợp lý.

Ví dụ 1:

Cho $2n$ số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}.$$

Giải :

Xét các số phức $z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2; \dots; z_n = a_n + ib_n$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \geq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|.$$

Đây là bất đẳng thức cơ bản về mô đun.

Bình luận:

Sự xuất hiện của căn thức là dấu hiệu để ta nghĩ tới tổng các mô-đun của các số phức. từ đó hướng giải quyết là đưa về chứng minh bất đẳng thức về mô-đun.

Ví dụ 2:

Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn phương trình $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 5$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5-a-2b} + \sqrt{5-c-2d} + \sqrt{5-ac-bd} \leq \frac{3\sqrt{30}}{2}.$$

Chứng minh:

Nhân hai vế với $\sqrt{2}$ ta được $\sqrt{10-2a-4b} + \sqrt{10-2c-4d} + \sqrt{10-2ac-2bd} \leq 3\sqrt{15}$ (1)

Do $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 5$ nên

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(c-1)^2 + (d-2)^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \leq 3\sqrt{15} \quad (2).$$

Xét các số phức $z = x + iy$; $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$; $z_3 = 1 + 2i$ với $|z| = |z_1| = |z_2| = 5$.

Gọi M, N, P là các điểm biểu diễn các số phức z ; z_1 ; z_2 . Khi đó M, N, P nằm trên đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{5}$.

Bất đẳng thức (2) trở thành $|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3| + |z_1 - z_2| \leq 3\sqrt{15}$

$$\Leftrightarrow MN + MP + NP \leq 3\sqrt{15}.$$

Vì $MN + MP + NP$ là chu vi tam giác MNP, còn $3\sqrt{15}$ là chu vi tam giác đều nội tiếp đường tròn. Theo tính chất của hình học sơ cấp ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 3

Cho các số thực dương x, y, z và $x + y + z = 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}.$$

Giải:

Ta xét các số phức $z_1 = x + \frac{1}{x}i$; $z_2 = y + \frac{1}{y}i$; $z_3 = z + \frac{1}{z}i$. Khi đó ta có

$$z_1 + z_2 + z_3 = x + y + z + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)i;$$

$$\text{Và } |z_1| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}; \quad |z_2| = \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}}; \quad |z_3| = \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức mô-đun $|z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3|$ ta suy ra

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 &= 81(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 80(x+y+z)^2 \\ &\geq 2.9.(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 80(x+y+z)^2 \geq 2.9.9 - 80 = 82 \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \geq \sqrt{2.9.9 - 80} = \sqrt{82}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của P là $\sqrt{82}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 4

Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \leq 1$.

Chứng minh :

Ta xét các số phức $z_1 = \sin x + i \cos x$; $z_2 = \sin y \sin z + i \cos y \cos z$. Khi đó ta có

$$|z_1| = 1; \quad |z_2| = \sqrt{\sin^2 y \sin^2 z + \cos^2 y \cos^2 z}. \text{ Ta gọi các vectơ}$$

$$\vec{u} = (\sin x; \cos x); \quad \vec{v} = (\sin y \sin z; \cos y \cos z) \text{ là các vectơ biểu diễn các số phức } z_1; z_2.$$

Theo tính chất tích vô hướng ta có

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Rightarrow \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \leq 1 \cdot \sqrt{\sin^2 y \sin^2 z + \cos^2 y \cos^2 z}.$$

Bây giờ ta có

$$\sqrt{\sin^2 y \sin^2 z + \cos^2 y \cos^2 z} = \sqrt{\sin^2 y (1 - \cos^2 z) + \cos^2 y (1 - \sin^2 z)} = \sqrt{1 - \sin^2 y \sin^2 z - \cos^2 y \cos^2 z} \leq 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = \sin y = \sin z = 1$ và $\cos x = \cos y = \cos z = 1$.

Ví dụ 5 :

Cho a, b, c bất kỳ. Chứng minh rằng $\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

Chứng minh:

Xét các số phức $z_1 = a + c - bi$; $z_2 = -a + c + bi$. Khi đó ta có

$$|z_1| = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}; \quad |z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}; \quad |z_1 - z_2| = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Theo tính chất của mô-đun ta có $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 - z_2|$, ta có đpcm.

Ví dụ 6:

Chứng minh rằng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2.$$

Chứng minh:

Xét các số phức

$$z_1 = 2\cos x \cos y + i \sin(x-y) \Rightarrow |z_1| = \sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)};$$

$$z_2 = 2\sin x \sin y + i \sin(x-y) \Rightarrow |z_2| = \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)}.$$

Ta cũng có $z_1 + z_2 = 2\cos(x-y) + i2\sin(x-y) \Rightarrow |z_1 + z_2| = 2$.

Áp dụng bất đẳng thức $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ ta có ngay kết quả.

Ví dụ 7:

Cho $a+b+c=1$ và các số thực x, y, z thỏa mãn $ax+by+cz=4$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{9a^2 + a^2x^2} + \sqrt{9b^2 + b^2y^2} + \sqrt{9c^2 + c^2z^2} \geq 5.$$

Chứng minh:

Ta xét 3 số phức sau: $z_1 = 3a + ax.i$; $z_2 = 3b + by.i$; $z_3 = 3c + cz.i$.

Ta suy ra $|z_1| = \sqrt{9a^2 + a^2x^2}$; $|z_2| = \sqrt{9b^2 + b^2y^2}$; $|z_3| = \sqrt{9c^2 + c^2z^2}$.

Và $z_1 + z_2 + z_3 = 3a + 3b + 3c + (ax + by + cz).i \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Áp dụng bất đẳng thức $|z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3|$ ta có

$$\sqrt{9a^2 + a^2x^2} + \sqrt{9b^2 + b^2y^2} + \sqrt{9c^2 + c^2z^2} \geq 5.$$

Ví dụ 8 :

Cho các số a, b, c thay đổi thỏa mãn $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = abc$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca}$$

Giải:

Ta biến đổi $P = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}}$.

Xét các số phức $z_1 = \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{2}}{b}i$; $z_2 = \frac{1}{b} + \frac{\sqrt{2}}{c}i$; $z_3 = \frac{1}{c} + \frac{\sqrt{2}}{a}i$.

Ta suy ra $z = z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \left(\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{\sqrt{2}}{b} + \frac{\sqrt{2}}{c}\right)i = 1 + \sqrt{2}i$ (Vì $ab + bc + ca = abc$)

Đề ý $P = |z_1| + |z_2| + |z_3| = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}} \geq |z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Vậy GTNN của P là 3.

Ví dụ 9:

Chứng minh rằng $\sqrt{a^2 + 4} + \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 1} + \sqrt{b^2 - 6b + 10} \geq 5, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Chứng minh:

Xét các số phức $z_1 = -i$, $z_2 = 3 + 3i$, $z_3 = a + i$, $z_4 = b + 2i$.

Khi đó $|z_3 - z_1| = \sqrt{a^2 + 4}$, $|z_4 - z_3| = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 1}$, $|z_4 - z_2| = \sqrt{b^2 - 6b + 10}$, $|z_2 - z_1| = 5$.

Áp dụng bất đẳng thức mô-đun ta có

$$|z_3 - z_1| + |z_4 - z_3| + |z_2 - z_4| \geq |z_3 - z_1 + (z_4 - z_3) + (z_2 - z_4)| = |z_2 - z_1|$$

Hay là $\sqrt{a^2 + 4} + \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 1} + \sqrt{b^2 - 6b + 10} \geq 5, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 10:

Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z).$$

Chứng minh:

Biến đổi bất đẳng thức trở thành:

$$\sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(z + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z).$$

Ta xét các số phức

$$z_1 = x + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2}i, \quad z_2 = x + y + \frac{y+z}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z)i, \quad z_3 = x + y + z + \frac{x+y+z}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y+z)i.$$

Khi đó ta có

$$|z_1| = \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + xy + y^2}, \quad |z_2 - z_1| = \sqrt{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2} = \sqrt{y^2 + yz + z^2},$$

$$|z_3 - z_2| = \sqrt{\left(z + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2} = \sqrt{z^2 + zx + x^2},$$

$$|z_3| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 (x+y+z)^2 + \frac{3}{4}(x+y+z)^2} = \sqrt{3(x+y+z)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức mô-đun ta có $|z_1| + |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| \geq |z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2)| = |z_3|$.

Hay là $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$ (Đpcm).

Nhận xét:

Nếu không dùng công cụ số phức, ta có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp đánh giá đại diện như sau:

Ta có $\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y).$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \sqrt{3}(x + y) \Leftrightarrow 4(x^2 + xy + y^2) \geq 3(x + y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}).$$

Tương tự ta có: $\sqrt{y^2 + yz + z^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z)$ (3).

$$\text{và } \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(z + x) \quad (4).$$

Cộng vế theo vế (2), (3) và (4) ta được:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z) \text{ (đpcm).}$$

Bình luận :

Việc áp dụng số phức vào chứng minh bất đẳng thức cho ta kết quả nhanh chóng trên cơ sở sử dụng các bất đẳng thức cơ bản về mô-đun. Hơn nữa ta có thể giải quyết được các bài toán vô tỉ, đây là một nội dung tương đối khó trong bất đẳng thức. Để

đi đến lời giải thành công thì việc chọn số phức hợp lý là vấn đề cần chú ý. Qua các ví dụ trên hình thành cho ta một số kỹ năng cần thiết khi chọn số phức.

Bài tập đề nghị :

1. Cho a, b là các số thực tùy ý, chứng minh rằng

$$\sqrt{2b^2 - 6a + 9} + \sqrt{2b^2 - \frac{10ab}{3} + \frac{13a^2}{9}} + \sqrt{\frac{13a^2}{9} - 4a + 4} \geq \sqrt{13}.$$

2. Với $\forall x, y \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + 4x + 9y^2 - 6y + 5} + \sqrt{4x^2 + 8x + y^2 - 4y + 8} \geq \sqrt{x^2 + 4y^2 + 4y + 1}.$$

3. Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, chứng minh rằng

$$\sqrt{4\cos^2 x + \sin 2x + \sin^2 x} - \sqrt{4\cos^2 x - \sin 2x + \sin^2 x} \leq \sin x.$$

4. Cho $a + b + c = 2$ và $ax + by + cz = 6$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \sqrt{16a^2 + (ax)^2} + \sqrt{16b^2 + (by)^2} + \sqrt{16c^2 + (cz)^2}.$$

5. Cho các số thực x, y thỏa mãn $|x| \geq 1$; $|y| \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4} \geq \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1}.$$

6. Tìm GTNN của biểu thức

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1}$$

§3. Ứng dụng số phức vào trong lượng giác.

Phân tích :

Khi áp dụng số phức vào lượng giác thì công thức ta hay sử dụng chính là công thức Moa-vơ

Cho $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, khi đó ta có $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cũng từ công thức Moa-vơ ta có các căn bậc n của 1 là

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}; k=0,1,2,\dots,n-1$$

Để chứng minh các hệ thức liên quan đến một tổng hữu hạn , ta còn phải sử dụng tới khai triển Niu-ton trong các phép chứng minh $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

Bây giờ ta xét một số ví dụ sử dụng công thức trên để giải.

Ví dụ 1:

Hãy biểu diễn $\tan 5\varphi$ qua $\tan \varphi$.

Giải:

Áp dụng công thức Moa-vơ ta có

$$\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5.$$

Sử dụng khai triển nhị thức Niu-ton và tách riêng phần thực , phần ảo ta được

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + \cos \varphi \sin^4 \varphi$$

$$\sin 5\varphi = 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi.$$

Từ đó ta suy ra
$$\tan 5\varphi = \frac{5 \tan \varphi - 10 \tan^3 \varphi + \tan^5 \varphi}{1 - 10 \tan^2 \varphi + 5 \tan^4 \varphi}.$$

Ví dụ 2:

Hãy biểu diễn $\sin^5 \varphi$ qua các hàm lượng giác góc bội $k\varphi$.

Giải:

Ta đặt $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Khi đó $z^{-1} = \cos \varphi - i \sin \varphi$.

Theo công thức Moa- vơ ta có $z^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$; $z^{-k} = \cos k\varphi - i \sin k\varphi$ ($k \in \mathbb{R}$).

Từ đó ta suy ra $\cos \varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}$; $\sin \varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}$; $\cos k\varphi = \frac{z^k + z^{-k}}{2}$; $\sin k\varphi = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}$.

Áp dụng các công thức trên ta được

$$\begin{aligned} \sin^5 \varphi &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^5 = \frac{z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}}{32i} \\ &= \frac{(z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1})}{32i} = \frac{2i \sin 5\varphi - 5 \cdot 2i \sin 3\varphi + 10 \cdot 2i \sin \varphi}{32i} \\ &= \frac{\sin 5\varphi - 5 \sin 3\varphi + 10 \sin \varphi}{16}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta theo dõi các ví dụ ứng dụng số phức để tính các tổng đặc biệt

Ví dụ 3:

Tính tổng $S = \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$.

Giải:

Ta xét các tổng $A = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$; $B = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$

Ta xét số phức $z = 1 + A + iB = 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx)$

$$= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + \dots + (\cos x + i \sin x)^n = \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^{n+1}}{1 - (\cos x + i \sin x)}$$

$$= \frac{1 - \cos(n+1)x - i \sin(n+1)x}{1 - \cos x - i \sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{n+1}{2} x - 2i \sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{n+1}{2} x}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \left(\sin \frac{n+1}{2} x - i \cos \frac{n+1}{2} x \right)}{\sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \left(\cos \frac{n+1}{2} x + i \sin \frac{n+1}{2} x \right)}{\sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \left(\cos \frac{n}{2} x + i \sin \frac{n}{2} x \right)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} + i \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

So sánh hai số phức trước và sau khi biến đổi ta được

$$A = S = \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} - 1$$

Nhận xét:

Từ quá trình biến đổi ở trên ta cũng thu được

$$S = \sum_{k=1}^n \sin(kx) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Cũng từ các kết quả trên ta có thể tính các tổng

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k \cos(kx) \text{ và } S_2 = \sum_{k=1}^n k \sin(kx)$$

Bằng cách sử dụng đạo hàm như sau:

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k \cos(kx) = \sum_{k=1}^n (\sin(kx))' = (B)';$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k \sin(kx) = \sum_{k=1}^n (-\cos(kx))' = (-A)'$$

Bây giờ ta thử dùng số phức để hạ bậc tổng quát $\sin^n x$; $\cos^n x$.

Ví dụ 4:

Hãy tính $\sin^n x$; $\cos^n x$ theo sin và cosin của góc bội của x

Ta xét số phức $z = \cos x + i \sin x$. Theo công thức Moa- vơ ta có $z^{-1} = \cos x - i \sin x$.

Từ đó suy ra $\cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}$; $\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}$.

Lại theo công thức nhị thức Niu-ton ta có

$$\begin{aligned} (z + z^{-1})^n &= z^n + C_n^1 z^{n-1} z^{-1} + C_n^2 z^{n-2} z^{-2} + \dots + z^{-n} \\ &= \begin{cases} (z^n + z^{-n}) + C_n^1 (z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \dots + C_n^{\frac{n}{2}} z^0, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ (z^n + z^{-n}) + C_n^1 (z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \dots + C_n^{\frac{n-1}{2}} (z + z^{-1}), & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases} \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} (z - z^{-1})^n &= z^n - C_n^1 z^{n-1} z^{-1} + C_n^2 z^{n-2} z^{-2} - \dots + (-1)^n z^{-n} \\ &= \begin{cases} (z^n + z^{-n}) - C_n^1 (z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} z^0, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ (z^n - z^{-n}) - C_n^1 (z^{n-2} - z^{-(n-2)}) + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} (z - z^{-1}), & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} \cos^n x &= \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} [\cos nx + C_n^1 (\cos(n-2)x) + \dots + \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}], & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{1}{2^{n-1}} [\cos nx + C_n^1 (\cos(n-2)x) + \dots + C_n^{\frac{n-1}{2}} \cos x], & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases} \\ \sin^n x &= \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \left[2 \cos nx - 2 C_n^1 \cos(n-2)x + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} \right], & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n} \left[2 \sin nx - 2i C_n^1 \sin(n-2)x + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2 \sin x \right], & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ hai công thức trên ta có được công thức hạ bậc tổng quát. Rõ ràng các trường hợp $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ là các trường hợp đặc biệt.

Tiếp theo , ta sẽ dùng số phức để chứng minh các hệ thức lượng giác.

Ví dụ 5:

Cho tam giác ABC có $A = \frac{\pi}{7}$; $B = \frac{2\pi}{7}$; $C = \frac{4\pi}{7}$. Chứng minh rằng

$$1. OH = OI_a = R\sqrt{2};$$

$$2. R = 2r_a;$$

$$3. a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2.$$

Chứng minh:

$$1. \text{ Theo định lý sin ta có } a = 2R \sin \frac{\pi}{7}; b = 2R \sin \frac{2\pi}{7}; c = 2R \sin \frac{4\pi}{7}.$$

$$\begin{aligned} \text{Theo hệ thức Ô-le ta có } OH^2 &= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 9R^2 - 4R^2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{4\pi}{7} \right) \\ &= 9R^2 - 4R^2 \left(\frac{3}{2} - \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} \right) \right) = 9R^2 - 4R^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Bây giờ ta xét số phức } z = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}.$$

$$\text{Ta có } z + z^3 + z^5 = z \cdot \frac{z^6 - 1}{z^2 - 1} = \frac{z^7 - z}{z^2 - 1} = \frac{-1 - z}{z^2 - 1} = \frac{1}{1 - z}.$$

$$\text{Tách phần thực riêng ta có } \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } OH = 9R^2 - 4R^2 \left(\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4} \right) \right) = 2R^2. \text{ Hay } OH = R\sqrt{2}.$$

Bây giờ ta tính OI_a^2 như sau

$$OI_a^2 = R^2 + \frac{abc}{b+c-a} = R^2 + 4R^2 \frac{\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7}}.$$

$$\text{Mà } \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \left(\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} \right)$$

$$= 2 \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} - 2 \sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} = 4 \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}.$$

Do đó $OI_a^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$.

Vậy $OH = OI_a = R\sqrt{2}$

2. Áp dụng các công thức quen thuộc ta có $R = \frac{abc}{4S}$; $r_a = \frac{S}{p-a}$

Từ đó suy ra $R.r_a = \frac{abc}{4(p-a)} = \frac{abc}{2(b+c-a)} = \frac{R^2}{2}$. Vậy $R = 2r_a$.

Theo câu 1 ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{4\pi}{7} \right) = 4R^2 \cdot \frac{7}{4} = 7R^2$.

Bài tập đề nghị:

1) Rút gọn biểu thức

$$A = \sin \frac{\pi}{2m} \cdot \sin \frac{2\pi}{2m} \dots \sin \frac{(m-1)\pi}{2m}$$

2) Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^k \sin(\alpha + k\beta); \quad T_n = \sum_{k=1}^n q^k \cos(\alpha + k\beta)$$

Trong đó q, α, β là các số thực cho trước.

3) Chứng minh các đẳng thức

$$\sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{3\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

4) Chứng minh rằng

$$\sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2nx = \frac{\sin nx \sin (n+1)x}{\sin x}, x \neq k\pi.$$

5) Lập phương trình mà nghiệm của nó là tích các số

$$\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}, \sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \sin^2 \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}.$$

6) Chứng minh rằng

$$\cos \varphi + C_n^1 \cos 2\varphi + \dots + C_n^{n-1} \cos n\varphi + \cos (n+1)\varphi = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \cos \frac{n+2}{2} \varphi$$

§4. Ứng dụng số phức vào đa thức

Phân tích :

Nhờ công thức Moa-vơ (Moiverer) và công thức tính căn bậc n của đơn vị ta có thể vận dụng linh hoạt vào việc chứng minh tính phân tích được (còn gọi là tính khả

quy) , tính bất khả quy, tính chỉ hết trong đa thức. Khi sử dụng công thức Moa-vơ ta có thể làm triệt tiêu dần các lũy thừa bậc n của đa thức để đưa về đa thức có bậc đơn giản.

Ví dụ 1:

Tìm n để đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Giải :

Xét đa thức $Q(x) = x^2 + x + 1$. Đa thức này có nghiệm là $\varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Đa thức $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $Q(x) = x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $P(\varepsilon) = 0$. Áp dụng công thức Moa- vơ

Ta có

$$\cos\frac{4n\pi}{3} + i\sin\frac{4n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{2n\pi}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3k + 1 \\ n = 3k + 2 \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy với $\begin{cases} n = 3k + 1 \\ n = 3k + 2 \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$ thì $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Bình luận:

Nếu không dùng công cụ số phức , ta phải tìm điều kiện để mọi nghiệm của $x^2 + x + 1$ cũng là nghiệm của $x^{2n} + x^n + 1$. Điều đó dẫn đến lý luận nếu ω là nghiệm thì $\omega^3 = 1$. Do đó ta phai biểu diễn và lý luận n thông qua bội của 3. Phép giải như vậy sẽ phức tạp hơn.

Ví dụ 2:

Cho các đa thức $P(x); Q(x); R(x); S(x)$ thỏa mãn

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$

Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho $x - 1$.

Giải:

Gọi ε là căn bậc 5 của 1. Ta có $\varepsilon = \cos\frac{k2\pi}{5} + i\sin\frac{k2\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$ và $\varepsilon^5 = 1$. Hơn nữa ta để

ý rằng $\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Thay x lần lượt bởi $\varepsilon^4, \varepsilon^3, \varepsilon^2, \varepsilon$ ta có

$$P(1) + \varepsilon Q(1) + \varepsilon^2 R(1) = 0$$

$$P(1) + \varepsilon^2 Q(1) + \varepsilon^4 R(1) = 0$$

$$P(1) + \varepsilon^3 Q(1) + \varepsilon^6 R(1) = 0$$

$$P(1) + \varepsilon^4 Q(1) + \varepsilon^8 R(1) = 0$$

Nhân các phương trình từ thứ nhất đến thứ tư lần lượt với $-\varepsilon, -\varepsilon^2, -\varepsilon^3, -\varepsilon^4$ ta được

$$-\varepsilon P(1) - \varepsilon^2 Q(1) - \varepsilon^3 R(1) = 0$$

$$-\varepsilon^2 P(1) - \varepsilon^4 Q(1) - \varepsilon R(1) = 0$$

$$-\varepsilon^3 P(1) - \varepsilon Q(1) - \varepsilon^4 R(1) = 0$$

$$-\varepsilon^4 P(1) - \varepsilon^3 Q(1) - \varepsilon^2 R(1) = 0$$

Cộng vế theo vế 8 phương trình trên đồng thời sử dụng $\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ ta được $5P(1) = 0 \Leftrightarrow P(1) = 0$. Vậy $P(x)$ chia hết cho $x - 1$.

Ví dụ 3:

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(x)P(x+1) = P(x^2)$.

Giải:

Giả sử α là một nghiệm của phương trình $P(x) = 0$. Từ giả thiết ta suy ra

$\alpha^2; \alpha^4; \dots; \alpha^{2^n}; \dots$ cũng là các nghiệm của $P(x) = 0$.

Do đó $|\alpha| = 1$ hoặc $|\alpha| = 0$ vì nếu ngược lại thì dãy $\alpha^2; \alpha^4; \dots; \alpha^{2^n}; \dots$ có vô hạn phần tử.

Tương tự ta cũng có $\alpha - 1$ cũng là nghiệm của $P(x)$ vì $P(x+1) = P(\alpha) = 0$. Lý luận

tương tự ta có $|\alpha - 1| = 0$ hoặc $|\alpha - 1| = 1$.

Giả sử $|\alpha| = 1$ và $|\alpha - 1| = 1$. Ta đặt $\alpha = \cos \beta + i \sin \beta$ (vì $|\alpha| = 1$). Cũng vì $|\alpha - 1| = 1$ nên

$$2 \cos \beta = 1 \text{ suy ra } \beta = \frac{\pi}{3} \text{ hoặc } \beta = \frac{5\pi}{3}.$$

Ta xét $\beta = \frac{\pi}{3}$, do $\alpha^2 - 1$ cũng là nghiệm $P(x) = 0$. Tuy nhiên

$$|\alpha^2 - 1|^2 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 1 \right)^2 + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3. \text{ Điều này mâu thuẫn với lập luận trên.}$$

Tương tự với trường hợp $\beta = \frac{5\pi}{3}$. Như vậy ta có thể kết luận $\alpha = 1$ hay $\alpha - 1 = 0$. Từ đây $P(x)$ có dạng

$$P(x) = kx^m(1-x)^n. \text{ Thay vào giả thiết ta tìm được } c=1 \text{ và } m=n. \text{ Vậy } P(x) = x^m(1-x)^m.$$

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng với mọi giá trị $n \in \mathbb{N}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $n \neq 1$; $\sin \alpha \neq 0$, đa thức $P(x) = x^n \sin \alpha - x \sin \alpha + \sin(n-1)\alpha$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

Chứng minh:

Ta đặt $x_\varepsilon = \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha$; với $\varepsilon = \pm 1$. Khi đó đa thức $Q(x)$ được biểu diễn dưới dạng

$$Q(x) = (x - \cos \alpha - i \sin \alpha)(x - \cos \alpha + i \sin \alpha) = (x - x_1)(x - x_{-1}).$$

Theo công thức Moa-vơ ta có $x_\varepsilon^n = (\cos \varepsilon \alpha + i \sin \varepsilon \alpha)^n = \cos n\varepsilon \alpha + i \sin n\varepsilon \alpha = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } P(x_\varepsilon) &= (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)^n \sin \alpha - (\cos \alpha + \varepsilon i \sin \alpha) \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha \\ &= \cos n\alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha = \sin(n-1)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 0. \end{aligned}$$

Do đó theo định lý Bézout thì đa thức $P(x)$ chia hết cho hai đa thức $(x - x_1)$ và $(x - x_{-1})$ nên chia hết cho $Q(x)$.

Ví dụ 5:

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ khác đa thức hằng sao cho

$$P(x)P(x+1) = P(x^2 + x + 1) \quad (1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải:

Giả sử x_0 là một nghiệm của $P(x) = 0$, khi đó $x_0^2 + x_0 + 1$ cũng là nghiệm.

Thay x bởi $x-1$ ta có $P(x-1)P(x) = P(x^2 - x + 1)$.

Chọn α là nghiệm có mô-đun lớn nhất. Từ cách chọn α ta suy ra $|\alpha^2 + \alpha + 1| \leq |\alpha|$;
 $|\alpha^2 - \alpha + 1| \leq |\alpha|$.

Vì cả $\alpha^2 + \alpha + 1$ và $\alpha^2 - \alpha + 1$ đều là nghiệm của $P(x) = 0$. Ta thấy $\alpha \neq 0$.

$$\text{Ta lại có } 2|\alpha| = |\alpha^2 + \alpha + 1 - (\alpha^2 - \alpha + 1)| \leq |\alpha^2 + \alpha + 1| + |\alpha^2 - \alpha + 1| \leq |\alpha| + |\alpha| = 2|\alpha|.$$

Vậy dấu đẳng thức xảy ra nên $\alpha^2 + \alpha + 1 = k(\alpha^2 - \alpha + 1)$, $k < 0$.

Hơn nữa từ tính lớn nhất $|\alpha|$ ta suy ra $|\alpha^2 + \alpha + 1| = |\alpha^2 - \alpha + 1| = |\alpha|$, suy ra $k = -1$. Do đó $\alpha^2 + \alpha + 1 = -(\alpha^2 - \alpha + 1) \Rightarrow \alpha^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm i$.

Ta cũng suy ra $x^2 + 1$ là thừa số của $P(x)$, nên $P(x)$ được phân tích thành

$$P(x) = (x^2 + 1)^m Q(x), \text{ trong đó } Q(x) \text{ không chia hết cho } x^2 + 1.$$

Thế ngược vào (1) ta có $Q(x)Q(x+1) = Q(x^2 + x + 1)$ (2), $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu $Q(x) = 0$ lại có nghiệm thì từ lý luận trên suy $Q(x)$ phải chia hết cho $x^2 + 1$, điều này mâu thuẫn. Ta suy ra $Q(x)$ là một hằng số c . Thay vào (2) ta suy ra $c = 1$. Vậy đa thức thỏa mãn là $P(x) = (x^2 + 1)^m$.

Ví dụ 6 :

Chứng minh rằng không thể phân tích đa thức $f(x) = (x^2 + 1)^2 (x^2 + 2^2)^2 \dots (x^2 + n^2)^2 + 1$ thành tích của hai đa thức hệ số nguyên bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Chứng minh :

Giả sử ta phân tích được $f(x) = g(x).h(x)$ với $g(x), h(x)$ là các đa thức có hệ số nguyên với bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Ta chú ý rằng $f(\pm ki) = 1$, với $k = 1, 2, \dots, n$, nên ta suy ra $g(ki).h(ki) = 1$, với

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n.$$

Vì số 1 chỉ có các cách phân tích là $1.1; (-1).(-1); i(-i); (-i).i$ nên ta có

$$(g(ki); h(ki)) \in \{(1; 1); (-1; -1); (i; -i); (-i; i)\}.$$

Như vậy ta luôn có $g(ki) = \overline{h(-ki)} = h(-ki)$.

Như vậy đa thức $g(x) - h(-x)$ có $2n$ nghiệm phân biệt, trong khi bậc của nó nhỏ hơn $2n$. Vậy ta có $g(x) - h(-x)$ là đa thức không, suy ra $g(x) = h(-x)$. Từ đó bậc của $g(x)$ bằng bậc của $h(x)$ và bằng n .

Vì $f(x)$ là đa thức có hệ số bậc cao nhất là 1 nên ta cũng có thể giả sử $g(x)$ và $h(x)$ có hệ số bậc cao nhất là 1.

Khi đó đa thức $g^2(x) - h^2(x)$ có bậc nhỏ hơn $2n$. Đa thức này có ít nhất $2n$ nghiệm ki với $k \in \{\pm 1; \pm 2; \dots; \pm n\}$. Suy ra $g^2(x) - h^2(x) = 0$. Ta suy ra $g(x) = h(x)$ vì ta không thể có $g(x) = -h(x)$.

Vậy nên $f(x) = g^2(x)$. Từ đây ta có $g^2(0) = f(0) = (n!)^2 + 1$, điều này không thể vì $g^2(0)$ là số chính phương.

Ví dụ 7 :

Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + x + 1$ với mọi số m, n, p nguyên dương.

Giải :

Ta sẽ đi chứng minh mọi nghiệm của $Q(x)$ cũng là nghiệm của $P(x)$.

Ta gọi ω là một nghiệm của $Q(x)$ thì ta có $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Từ đó ta có $\omega^2 = -\omega - 1$; $\omega^3 = -\omega^2 - \omega = 1$.

Thay ω vào $P(x)$ ta được $P(\omega) = \omega^{3m} + \omega^{3n+1} + \omega^{3p+2} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Ta có điều phải chứng minh :

Bình luận :

Ta thấy rằng ω là nghiệm của $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ thì ω chính là căn bậc ba của 1 nên

$$\omega = \cos \frac{k2\pi}{3} + i \sin \frac{k2\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Thay ω vào $P(x)$ ta cũng có $P(\omega) = 0$. Lời giải phức tạp này sẽ gọn gàng hơn.

Bài tập đề nghị :

1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \neq 1$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\sin \alpha \neq 0$ ta có đa thức $P(x) = x^n \sin x - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ luôn chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

2) Tìm tất cả các cặp số m, n tự nhiên để cho đa thức $P(x) = 1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$ chia hết cho đa thức

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^m.$$

3) Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \dots + x^{ka_k+k-1}$ luôn chia hết cho đa thức $Q(x) = x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + 1$

§5. Ứng dụng số phức vào nhị thức Niu-tơn.

Phân tích :

Áp dụng số phức vào bài toán nhị thức Niu-tơn ta chú ý vào điều kiện $i^2 = -1$ và sử dụng công thức Moa-vơ. Khai triển và so sánh hai cách khai triển ta thu được kết quả

Ví dụ 1 :

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có :

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - C_n^6 \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots$$

$$\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1} \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots$$

Chứng minh :

Theo công thức Moa-vơ, ta có

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

Mặt khác sử dụng công thức khai triển Niu-tơn ta có

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos^{n-k} \alpha (i \sin \alpha)^k.$$

Chú ý $i^2 = -1$, từ đó ta đi đến

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - C_n^6 \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots \\ &+ i(C_n^1 \cos^{n-1} \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots) \end{aligned}$$

Từ đó so sánh hai số phức ta có

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - C_n^6 \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots$$

$$\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1} \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots$$

Bình luận :

Công thức trên ta gọi là công thức góc nhân tổng quát. Từ công thức này ta tìm thấy công thức nhân đôi, nhân ba, nhân bốn ... quen thuộc.

Ví dụ 2 :

Với mọi n nguyên dương, hãy chứng minh hệ thức

THPT Bình An - Bình Dương

SKKN năm học 2013-2014

$$1. C_n^0 \cos \alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha + \dots + C_n^n \cos(n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha.$$

$$2. C_n^0 \sin \alpha + C_n^1 \sin 2\alpha + C_n^2 \sin 3\alpha + \dots + C_n^n \sin(n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha.$$

Chứng minh :

Từ khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n \Rightarrow x(1+x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \dots + C_n^n x^{n+1} \quad (1)$$

Trong (1) ta thay x bởi $\cos \alpha + i \sin \alpha$, sử dụng công thức Moa-vơ ta có

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= C_n^0 (\cos \alpha + i \sin \alpha) + C_n^1 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \dots \\ &+ C_n^n (\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha) \\ &= [C_n^0 \cos \alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + \dots + C_n^n \cos(n+1)\alpha] + i [C_n^0 \sin \alpha + C_n^1 \sin 2\alpha + \dots + C_n^n \sin(n+1)\alpha]. \end{aligned}$$

Nhưng mặt khác ta lại có :

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n \\ &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right) \\ &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n+2}{2} \alpha + i \sin \frac{n+2}{2} \alpha \right). \end{aligned}$$

Từ đó so sánh hai số phức ở hai vế ta có

$$C_n^0 \cos \alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha + \dots + C_n^n \cos(n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha$$

$$C_n^0 \sin \alpha + C_n^1 \sin 2\alpha + C_n^2 \sin 3\alpha + \dots + C_n^n \sin(n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha \quad (\text{đpcm}).$$

Bình luận :

Sự xuất hiện của các số C_n^k là dấu hiệu để ta sử dụng khai triển Niu-ơn. Rõ ràng không dùng biểu diễn Moa-vơ để chứng minh thì đây là một bài toán rất khó trong lượng giác.

Ví dụ 3 :

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2 = 2^n$$

Chứng minh :

Xét số phức $z^n = (1+i)^n = (1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots) + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)i$.

Ta có $|z^n| = |z|^n = (\sqrt{2})^n$. Mặt khác ta cũng có $|z^n| = \sqrt{(1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2}$.

So sánh hai vế ta được $(1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2 = 2^n$.

Bình luận:

Sự xuất hiện tổng bình phương là một dấu hiệu tốt để ta nghĩ tới mô-đun của số phức.

Như vậy việc xét số phức $z^n = (1+i)^n$ là một điều rất tự nhiên.

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có

$$C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2C_n^4 - 3^3C_n^6 + \dots = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}; \quad C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

Chứng minh:

Xét số phức $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

Theo công thức Moa- vơ ta có $z^n = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$.

Theo công thức khai triển Niu-ơn ta lại có

$$\begin{aligned} z^n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (\sqrt{3})^k (i)^k \\ &= \frac{1}{2^n} \left[(C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2C_n^4 - 3^3C_n^6 + \dots) + \sqrt{3}(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)i \right]. \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2C_n^4 - 3^3C_n^6 + \dots = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}; \quad C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3} \quad (\text{đpcm}).$$

Bình luận :

Nếu không sử dụng số phức thì việc chứng minh công thức trên là rất khó. Từ đây ta thấy việc sử dụng số phức là một phương pháp hết sức hiệu quả.

Ví dụ 5:

Tính tổng: $S = C_{2009}^0 + C_{2009}^4 + C_{2009}^8 + \dots + C_{2009}^{2004} + C_{2009}^{2008}$

Ta có:

$$\begin{aligned}(1+i)^{2009} &= C_{2009}^0 + iC_{2009}^1 + \dots + i^{2009}C_{2009}^{2009} \\ &= C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - C_{2009}^6 + \dots - C_{2009}^{2006} + C_{2009}^{2008} + \\ &\quad (C_{2009}^1 - C_{2009}^3 + C_{2009}^5 - C_{2009}^7 + \dots - C_{2009}^{2007} + C_{2009}^{2009})i\end{aligned}$$

Thấy: $S = \frac{1}{2}(A+B)$, với $A = C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - C_{2009}^6 + \dots - C_{2009}^{2006} + C_{2009}^{2008}$

$$B = C_{2009}^1 + C_{2009}^3 + C_{2009}^5 + C_{2009}^7 + \dots + C_{2009}^{2007} + C_{2009}^{2009}$$

Ta có: $(1+i)^{2009} = (1+i)[(1+i)^2]^{1004} = (1+i).2^{1004} = 2^{1004} + 2^{1004}i$.

Đồng nhất thức ta có A chính là phần thực của $(1+i)^{2009}$ nên $A = 2^{1004}$.

Ta có: $(1+x)^{2009} = C_{2009}^0 + xC_{2009}^1 + x^2C_{2009}^2 + \dots + x^{2009}C_{2009}^{2009}$

Cho $x = -1$ ta có: $C_{2009}^0 + C_{2009}^2 + \dots + C_{2009}^{2008} = C_{2009}^1 + C_{2009}^3 + \dots + C_{2009}^{2009}$

Cho $x=1$ ta có: $(C_{2009}^0 + C_{2009}^2 + \dots + C_{2009}^{2008}) + (C_{2009}^1 + C_{2009}^3 + \dots + C_{2009}^{2009}) = 2^{2009}$.

Suy ra: $B = 2^{2008}$.

Từ đó ta có: $S = 2^{1003} + 2^{2007}$.

Bài tập đề nghị

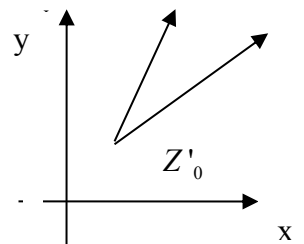
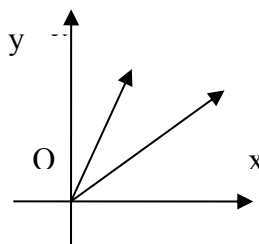
1. Tính các tổng sau $A = C_{2013}^0 - C_{2013}^2 + C_{2013}^4 - \dots - C_{2013}^{2012}$; $B = C_{2013}^1 - C_{2013}^3 + C_{2013}^5 - \dots - C_{2013}^{2013}$.
2. Chứng minh rằng $1 - C_n^3 + C_n^6 - \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$.
3. Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương ta có

$$\left(1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots \right)^2 = \left(\sqrt{2} \right)^n \cos \frac{n\pi}{4}; \quad \left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots \right)^2 = \left(\sqrt{2} \right)^n \sin \frac{n\pi}{4}.$$

§6. Ứng dụng số phức vào hình học phẳng.

Phân tích :

Ta gọi α là góc định hướng tạo bởi hai tia lần lượt biểu diễn cho hai số phức và hai tia có chung gốc tọa độ O . Khi đó ta có $\alpha = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}$



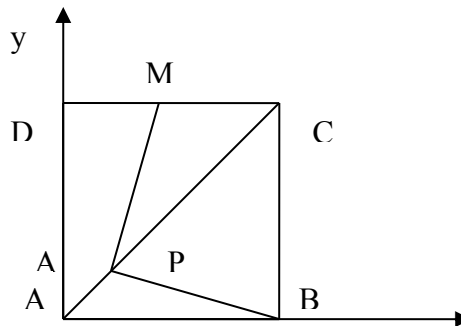
Nếu hai tia xuất phát từ một điểm z'_0 khác điểm O, với z'_0 là điểm biểu diễn số phức z'_0 nào đó thì ta có $\alpha = \arg(z'_2 - z'_0) - \arg(z'_1 - z'_0) = \arg \frac{(z'_2 - z'_0)}{(z'_1 - z'_0)}$.

Từ đây ta rút ra nhận xét là các điểm $z'_0; z'_1; z'_2$ biểu diễn các số phức $z'_0; z'_1; z'_2$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\arg \frac{(z'_2 - z'_0)}{(z'_1 - z'_0)}$ bằng 0 hoặc bằng $\pm\pi$, tức là $\frac{(z'_2 - z'_0)}{(z'_1 - z'_0)}$ là một số thực.

Ví dụ 1:

Cho hình vuông ABCD. Điểm M là trung điểm của CD, điểm P nằm trên đường chéo AC sao cho $PC = 3AP$. Chứng minh $\widehat{BPM} = 90^\circ$.

Chứng minh:



Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc tại A, $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$.

Khi đó điểm A; B; C; D lần lượt biểu diễn các số phức $z_1 = 0$; $z_2 = 1$; $z_3 = 1 + i$; $z_4 = i$. Từ giả thiết ta dễ dàng suy ra các điểm M, N lần lượt biểu diễn cho các số phức

$$z_5 = \frac{1}{2} + i; z_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i.$$

$$\text{Ta xét số phức } z = \frac{z_5 - z_6}{z_2 - z_6} = \frac{\frac{1}{2}(1 + 2i) - \frac{1}{4}(1 + i)}{1 - \frac{1}{4}(1 + i)} = \frac{1 + 3i}{3 - i} = i.$$

Vì một argument của $z = i$ là $\frac{\pi}{2}$ nên $\widehat{BPM} = 90^\circ$.

Bình luận :

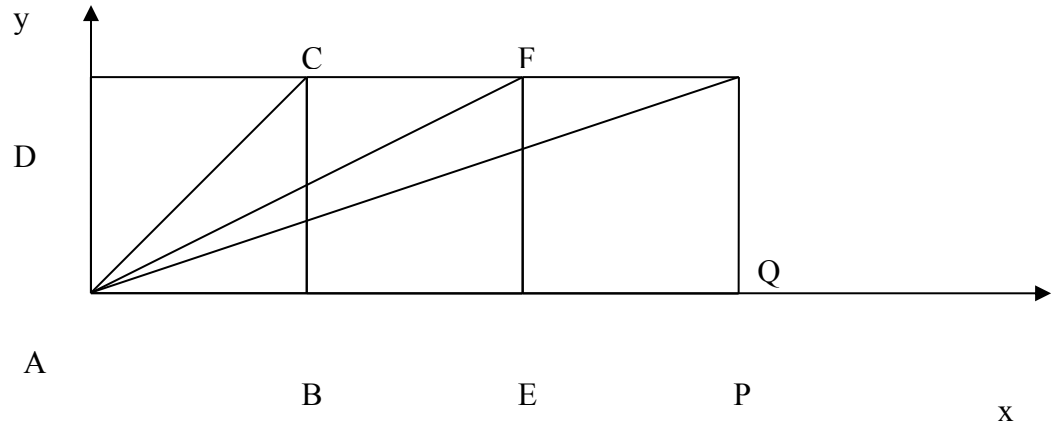
Ta chọn gốc tọa độ thường là tại những điểm vuông góc. Đồng thời có thể biểu diễn các điểm còn lại đơn giản và dễ dàng. Đó chính là lý do ta chọn gốc tại A trong bài này và bài tiếp theo.

Ví dụ 2 :

Cho ba hình vuông bằng nhau $ABCD$; $BEFC$; $EPQF$. Chứng minh rằng

$$\widehat{ACD} + \widehat{AFD} + \widehat{AQD} = \frac{\pi}{2}.$$

Chứng minh :



Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc tại A, $\overline{AB} = \vec{i}$; $\overline{AD} = \vec{j}$.

Ta có điểm A biểu diễn số 0, điểm B là 1, điểm C là $1+i$, điểm D là i ; điểm E là 2, điểm F là $2+i$, điểm P là 3, điểm Q là $3+i$.

Vì $\widehat{ACD} = \widehat{BAC} = \arg(1+i)$; $\widehat{AFD} = \widehat{EAF} = \arg(2+i)$; $\widehat{AQD} = \widehat{PAQ} = \arg(3+i)$.

Do đó

$$\widehat{ACD} + \widehat{AFD} + \widehat{AQD} = \arg(1+i) + \arg(2+i) + \arg(3+i) = \arg(1+i)(2+i)(3+i) = \arg(10i) = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 3:

Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC} \neq 60^\circ$), ở miền ngoài của tam giác vẽ các tam giác đều ABD và ACE. Dựng hình bình hành AEFD. Chứng minh tam giác BFC đều.

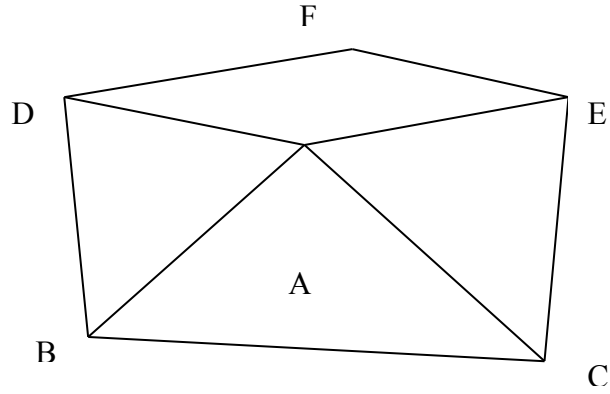
Giải: Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại A, các số phức được biểu diễn bởi các điểm A, B, C lần lượt là 0; b; c.

Theo cách dựng tam giác đều từ đề ra ta suy ra các số phức lần lượt biểu diễn bởi các điểm E, D, F là

$$e = c \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = c \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$d = b \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = b \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$f = d + e = \frac{1}{2}(b+c) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(c-b)$$



Từ đó suy ra $BF = |b - f| = \left| \frac{1}{2}(b+c) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(c-b) - b \right| = |c-b| = BC$

$$CF = |f - c| = \left| \frac{1}{2}(b+c) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(c-b) - c \right| = |c-b| = BC.$$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

Bình luận:

Để nắm vững cơ sở lý thuyết của lời giải trên, ta chú ý điều sau

Ta biết rằng số 1 có n căn bậc n khác nhau được xác định theo công thức

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

Các căn bậc n đó được biểu diễn thành các đỉnh của một đa giác đều n đỉnh. Theo công thức

Môa-vơ ta có $\omega_1^k = \omega_k$.

Ta xét đa giác đều $A_1A_2\dots A_n$, các đỉnh được biểu diễn bởi các số phức tương ứng là

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Gọi $a_1, a_2, \dots, a_n$ lần lượt là các số phức được biểu diễn bởi các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Theo tính chất biến đổi của số phức ta có kết quả sau $a_{i+1} - a_i = \omega_i(a_{i+1} - a_i)$.

Đặc biệt trong tam giác đều ta có kết quả $a_3 - a_1 = \omega(a_2 - a_1)$, với

$$\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $a_3 = a_1 + \omega(a_2 - a_1)$

Đây là công thức xác định đỉnh thứ 3 của tam giác đều qua hai đỉnh kia.

Bài tập đề nghị:

- 1) Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng các hình vuông ABDE, ACFG . Gọi H,K,L lần lượt là trung điểm BE, BC, CG.
 - a) Chứng minh rằng tam giác HKL vuông cân.
 - b) Có nhận xét gì về vị trí thứ tư của hình vuông có 3 đỉnh lần lượt là H,K,L.
- 2) Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. Trên cạnh AB lấy D sao cho $BD=2AD$. Các đoạn thẳng AM, CD cắt nhau tại điểm I. Chứng minh rằng
 - a) I là trung điểm của AM
 - b) $CI=3DI$.
- 3) Cho tứ giác lồi ABCD . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi E,F lần lượt là giao điểm của AB, CD và MN. Chứng minh rằng nếu $AD=BC$ thì $\widehat{AEM} = \widehat{BFM}$.
- 4) Về phía ngoài tứ giác ABCD trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lần lượt dựng các hình vuông E,F ,G,H . Chứng minh rằng nếu $EG=FH$ thì $EG \perp FH$.
- 5) Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Đoạn thẳng CM và DN cắt nhau tại P. Chứng minh rằng AP bằng cạnh hình vuông.

§7. Ứng dụng phương trình đường thẳng trong số phức .

Phân tích:

Ta biết rằng ba số phức khác nhau $z_0; z_1; z_2$ được biểu diễn bởi các điểm $Z_0; Z_1; Z_2$ thẳng hàng khi và chỉ khi góc giữa các vector $\overrightarrow{Z_0Z_1}$ và $\overrightarrow{Z_0Z_2}$ bằng 0 hoặc bằng $\pm\pi$. Do

đó $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ là số thực. Theo tính chất số thực ta suy ra $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{\overline{z_2 - z_0}}{\overline{z_1 - z_0}}$.

Từ biểu thức trên ta suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $z_0; z_1$ là

$$\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{\overline{z_1 - z_0}}$$

Hay là $(\overline{z_1 - z_0})z - (z_1 - z_0)\overline{z} + (z_1\overline{z_0} - \overline{z_1}z_0) = 0$ (1).

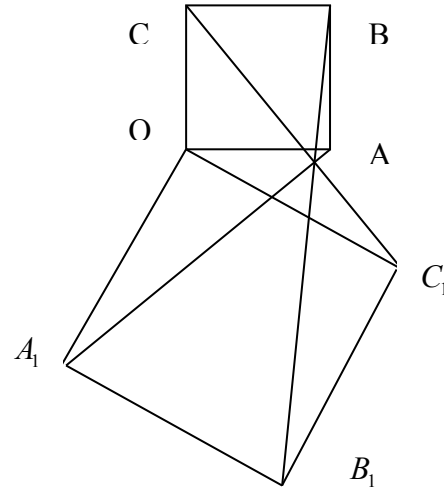
Phương trình (1) chính là phương trình đường thẳng trong số phức.

Bây giờ ta sẽ xét ứng dụng của phương trình đường thẳng này trong các bài toán chứng minh đồng quy và thẳng hàng trong hình học.

Ví dụ 1:

Cho hai hình vuông $OABC$ và $OA_1B_1C_1$ cùng chiều quay có điểm chung O . Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1 ; BB_1 ; CC_1 đồng quy tại một điểm.

Giải:



Chọn hệ trục tọa độ gốc tại O . Gọi a ; a_1 lần lượt là các số phức được biểu diễn bởi các điểm A ; A_1 .

Từ giả thiết ta suy ra các điểm còn lại là các số phức

$$c = ai; b = a + c = a(1+i); c_1 = a_1i; b_1 = a_1 + c_1 = a_1(1+i).$$

Các đường thẳng AA_1 ; BB_1 ; CC_1 lần lượt có phương trình là

$$(\bar{a} - \bar{a}_1)z - (a - a_1)\bar{z} + a\bar{a}_1 - \bar{a}a_1 = 0 \quad (1);$$

$$(\bar{b} - \bar{b}_1)z - (b - b_1)\bar{z} + b\bar{b}_1 - \bar{b}b_1 = 0 \quad (2)$$

$$(\bar{c} - \bar{c}_1)z - (c - c_1)\bar{z} + c\bar{c}_1 - \bar{c}c_1 = 0 \quad (3)$$

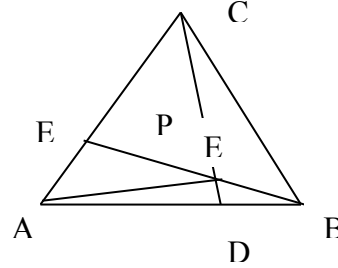
Ta lưu ý là

$$c\bar{c}_1 - \bar{c}c_1 = (ai)(-a_1i) - (-ai)(a_1i) = a\bar{a}_1 - a_1\bar{a}$$

$$b\bar{b}_1 - \bar{b}b_1 = a(1+i)\bar{a}_1(1-i) - \bar{a}(1-i)a_1(1+i) = 2(a\bar{a}_1 - a_1\bar{a}).$$

do đó nếu cộng (1) và (3) thì ta được (2), điều đó chứng tỏ một điểm là giao của AA_1 và CC_1 thì điểm đó nằm trên BB_1 . Vậy các đường thẳng AA_1 ; BB_1 ; CC_1 đồng quy tại một điểm.

Ví dụ 2: Cho tam giác đều ABC . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, D sao cho $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EA} = \frac{1}{2}$. Gọi P là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng $\widehat{APC} = 90^\circ$.



Giải:

Chọn hệ trục tọa độ vuông góc có gốc tại A, vector $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với vector $\vec{i}$. Ta giả sử tam giác đều có cạnh là 1. Khi đó các điểm tương ứng lần lượt biểu diễn cho các số phức sau

$$b = 1; \quad c = b \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Từ cách cho các điểm D, E ta suy ra

$$d = \frac{1}{3}c = \frac{1}{6} + i \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad e = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}.$$

Phương trình đường thẳng BD và CE lần lượt là

$$(\bar{b} - \bar{d})z - (b - d)\bar{z} + b\bar{d} - \bar{b}d = 0 \quad (1)$$

$$(\bar{c} - \bar{e})z - (c - e)\bar{z} + c\bar{e} - \bar{c}e = 0 \quad (2)$$

Gọi p là số phức được biểu diễn bởi điểm P, khi đó p là nghiệm của hệ (1);(2) nên

$$p = z = \frac{9}{14} + i \frac{\sqrt{3}}{14}.$$

Bây giờ ta xét tỉ số $\frac{c-p}{p} = \frac{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{9}{14} + i \frac{\sqrt{3}}{14} \right)}{\frac{9}{14} + i \frac{\sqrt{3}}{14}} = \frac{2 - i6\sqrt{3}}{9 + i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}i$

Tỉ số trên là một số thuần ảo nên argument của nó bằng $\frac{\pi}{2}$. Vậy $\widehat{APC} = 90^\circ$.

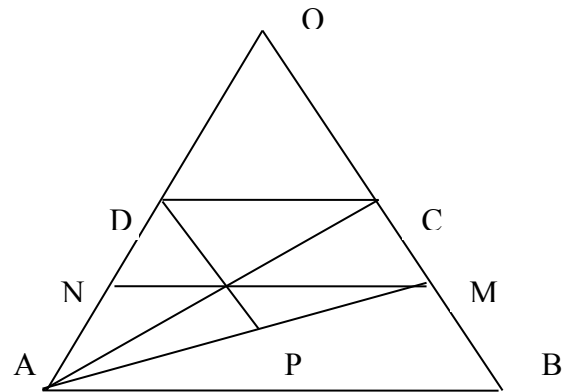
Ví dụ 3:

Cho hình thang ABCD có đáy lớn là AB, M là trung điểm cạnh BC, P là giao của đường thẳng BM và đường thẳng song song với BC xuất phát từ D. Chứng minh rằng nếu $AP=PM$ thì các đường thẳng AC, DP, MN đồng quy tại một điểm, với N là trung điểm của AD.

Giải:

Gọi O là giao điểm của AD và BC. Chọn hệ trục tọa độ vuông góc có gốc tại O.

Vì $DP \parallel OM$ và P là trung điểm của AM nên ta suy ra D là trung điểm của AO và $AO = 2OD$. Ta gọi các số phức lần lượt được biểu diễn bởi các điểm trên hình là a, b, c, d, m, n, p



Ta có $a = 2d$; $b = 2c$. Các điểm M, P là $m = \frac{b+c}{2} = \frac{3c}{2}$; $p = \frac{a+m}{2} = \frac{2d + \frac{3}{2}c}{2} = \frac{4d+3c}{4}$.

Gọi Q là giao của AC và MN thì ta có $q = \frac{a+c}{2} = \frac{2d+c}{2}$.

Mặt khác ta có $q = \frac{2d+c}{2} = \frac{d+2 \cdot \frac{4d+3c}{4}}{3} = \frac{d+2p}{3}$

Đẳng thức cuối chứng tỏ Q thuộc đường thẳng DP.

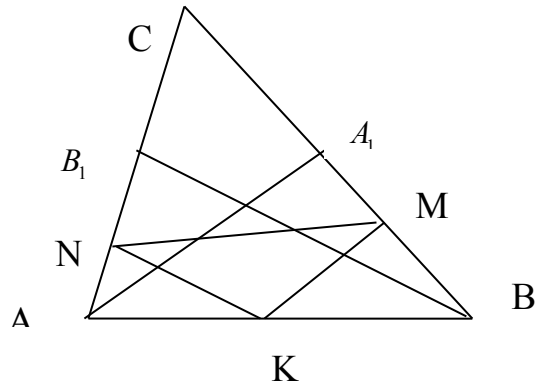
Vậy các đường thẳng AC, DP, MN đồng quy tại một điểm Q.

Ví dụ 4 :

Cho tam giác ABC, lấy K là trung điểm AB.

Từ K kẻ hai đường thẳng song song với trung tuyến AA_1 và BB_1 của tam giác ABC và cắt các cạnh AC tại M, BC tại N. Chứng minh rằng các đường trung tuyến AA_1 , BB_1 chia đoạn MN thành ba phần bằng nhau.

Giải :



Gọi các số phức lần lượt được biểu diễn bởi các điểm trong hình là $a, b, c, d, m, n, a_1, b_1$.

Gọi P, Q lần lượt là các trung điểm của AA_1, BB_1 .

$$\text{Ta lần lượt có } b_1 = \frac{a+c}{2} ; a_1 = \frac{b+c}{2} ; k = \frac{a+b}{2} ; m = \frac{a+b_1}{2} = \frac{3a+c}{4} ; n = \frac{3b+c}{4}.$$

$$\text{Ta cũng có } p = \frac{a+a_1}{2} = \frac{a+\frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4} ; q = \frac{b+b_1}{2} = \frac{b+\frac{a+c}{2}}{2} = \frac{2b+a+c}{4}.$$

$$\text{Bây giờ ta có } m-n = \frac{3}{4}(a-b) ; m-p = \frac{1}{4}(a-b) ; n-q = -\frac{1}{4}(a-b) ; p-q = \frac{1}{4}(a-b).$$

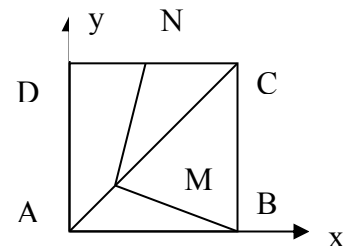
Từ các đẳng thức trên suy ra $PQ \parallel AB$ và PQ đi qua M, N. Hơn nữa ta có $NP=PQ=QM$.

Ví dụ 5 :

Cho hình vuông ABCD, M thuộc đoạn AC sao cho $AM = \frac{1}{4}AC$. Gọi N là trung điểm

CD. Chứng minh tam giác BMN vuông cân tại M.

Giải :



Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxy như hình vẽ . Ta giả sử hình vuông có cạnh là 1.

Từ đó ta có các số phức lần lượt ứng với các điểm trên hình là $a=0, b=1, d=i,$

$$c=1+i, n=\frac{1}{2}+i, m=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i.$$

Bây giờ ta xét tỷ số $\frac{n-m}{b-m} = \frac{\frac{1}{2} + i - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)}{1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)} = i$.

Tỷ số này là một số thuần ảo nên một argumet của nó là $\frac{\pi}{2}$. Nên $BM \perp MN$.

Lại vì $n-m = \frac{1}{2} + i - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$; $b-m = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$ nên ta có $MN = BM$.

Vậy tam giác BMN vuông cân tại M.

Bài tập đề nghị :

- 1) Cho hình thang ABCD đáy lớn là AB. Kẻ đường thẳng song song với hai đáy lần lượt cắt các cạnh bên BC, AD tại N và M, cắt các đường chéo AC, BD tại P và Q. Chứng minh rằng $MD=QN$.
- 2) Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng các hình vuông ABEF và ACGH. Gọi N là trung điểm FH, M là giao của BG và CE. Chứng minh rằng N,M,A thẳng hàng.
- 3) Qua điểm M nằm trong hình bình hành ABCD ta kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của chúng, cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại P,Q,R,S. Chứng minh rằng nếu PQ và RS cắt nhau thì giao điểm của chúng nằm trên AC.
- 4) Cho $A_1; B_1; C_1$ lần lượt trung điểm của BC, CA, AB của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ trong tam giác. Gọi $M_1; M_2; M_3$ lần lượt đối xứng với M qua $A_1; B_1; C_1$. Chứng minh rằng các đường thẳng $AM_1; BM_2; CM_3$ đồng quy.
- 5) Chứng minh rằng giao điểm hai đường chéo của hình thang, giao điểm hai cạnh bên và những trung điểm của hai cạnh đáy cùng nằm trên một đường thẳng (Định lý Shainer)

§8 Ứng dụng của số phức vào đa giác đều.

Ta biết rằng số 1 có n căn bậc n khác nhau được xác định theo công thức

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

Các căn bậc n đó được biểu diễn thành các đỉnh của một đa giác đều n đỉnh. Theo công thức

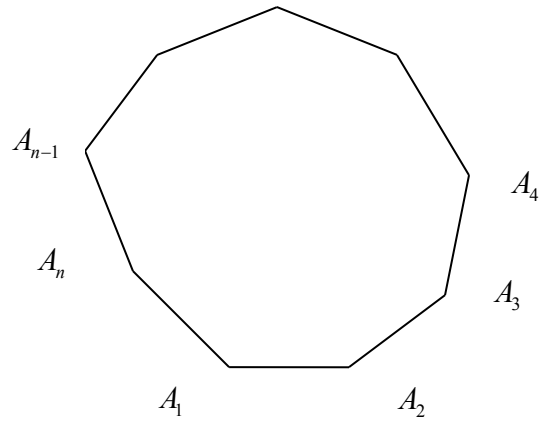
Môa-vơ ta có $\omega_1^k = \omega_k$.

Ta xét đa giác đều $A_1A_2...A_n$, các đỉnh được biểu diễn bởi các số phức tương ứng là

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k=1,2,...,n.$$

Gọi $a_1, a_2, ..., a_n$ lần lượt là các số phức được biểu diễn bởi các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$.

Theo tính chất biến đổi của số phức ta có kết quả sau $a_{i+1} - a_i = \omega_i (a_{i+1} - a_i)$.



Đặc biệt trong tam giác đều ta có kết quả $a_3 - a_1 = \omega(a_2 - a_1)$, với

$$\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

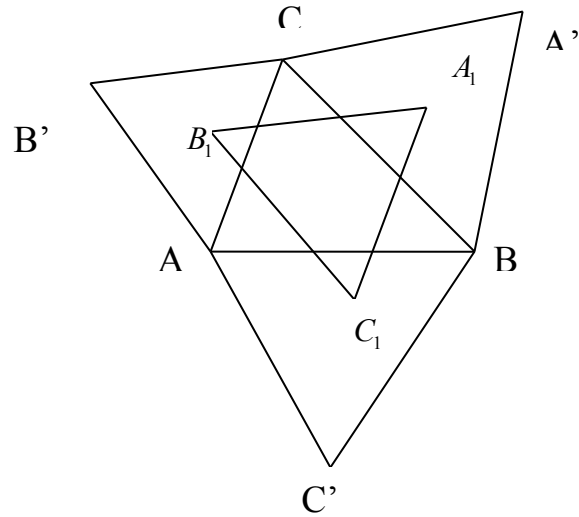
Do đó $a_3 = a_1 + \omega(a_2 - a_1)$

Đây là công thức xác định đỉnh thứ 3 của tam giác đều qua hai đỉnh kia.

Bây giờ ta sẽ áp dụng những nhận định trên vào các bài toán đa giác đều.

Ví dụ 1:

Cho tam giác bất kỳ ABC. Về phía ngoài ta dựng các tam giác đều ABC' , BCA' , CAB' . Chứng minh rằng các trọng tâm C_1, B_1, A_1 của các tam giác mới dựng là đỉnh của một tam giác đều.



Giải:

Gọi a, b, c lần lượt là các số phức được biểu diễn bởi các điểm A, B, C.

Theo công thức xác định đỉnh thứ 3 của tam giác đều ta có :

$$c' = b + \omega(a - b); \quad b' = a + \omega(c - a); \quad a' = c + \omega(b - c).$$

Cũng theo công thức trọng tâm ta có

$$c_1 = \frac{a + b + c'}{3} = \frac{1}{3}[(1 + \omega)a + (2 - \omega)b]$$

$$b_1 = \frac{a + c + b'}{3} = \frac{1}{3}[(1 + \omega)c + (2 - \omega)a]$$

$$a_1 = \frac{b + c + a'}{3} = \frac{1}{3}[(1 + \omega)b + (2 - \omega)c]$$

Bằng cách kiểm tra trực tiếp cuối cùng ta có

$$c_1 = a_1 + \omega(b_1 - a_1).$$

Chúng ta chứng tỏ rằng các điểm C_1, B_1, A_1 là các đỉnh của tam giác đều.

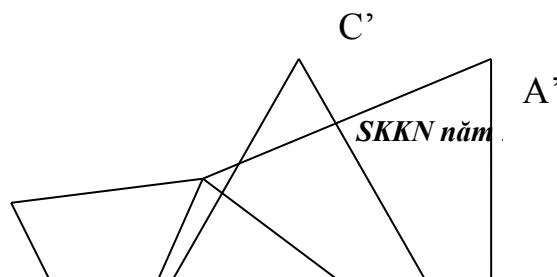
Ví dụ 2:

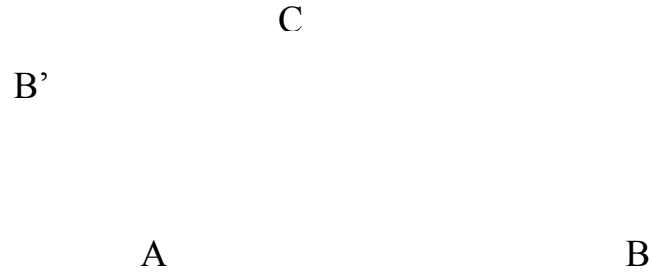
Trên các cạnh của tam giác ABC .

Ta dựng các tam giác đều ABC' , BCA' , CAB' sao cho A' và A, B' và B nằm về hai phía khác nhau đối đường thẳng AB. Chứng minh rằng nếu điểm M là trọng tâm

ABC' thì tam giác $A'MB'$ là cân và góc ở đỉnh M bằng $\frac{2\pi}{3}$.

Chứng minh:





Sử dụng công thức xác định đỉnh thứ ba của tam giác đều ta có

$$a' = c + \omega(b - c); \quad b' = a + \omega(c - a); \quad c' = b + \omega(a - b).$$

Vì M là trọng tâm của tam giác ABC' nên ta có $m = \frac{a+b+c'}{3} = \frac{1}{3}[(1+\omega)b + (2-\omega)a]$.

Khi đó

$$b' - m = a + \omega(c - a) - \frac{1}{3}[(1+\omega)b + (2-\omega)a] = \frac{1}{3}[(1-2\omega)a - (1+\omega)b + 3\omega c]$$

Và
$$a' - m = c + \omega(b - c) - \frac{1}{3}[(1+\omega)b + (2-\omega)a] = \frac{1}{3}[(\omega-2)a - (1-2\omega)b + 3(1-\omega)c]$$

Vì ta chứng minh được $b' - m = \omega^2(a' - m)$.

Chứng tỏ rằng $A'M = B'M$. Hơn nữa vì argument của ω^2 là $\frac{2\pi}{3}$ nên góc ở đỉnh bằng

$$\frac{2\pi}{3}.$$

Ví dụ 3 :

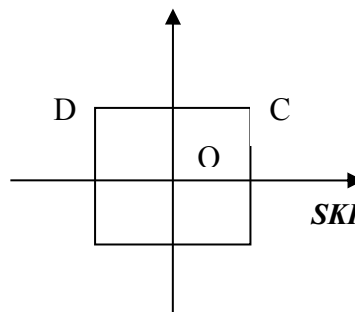
Trong hình vuông ABCD ta dựng các tam giác đều ABK, BCL, CDM, DAN, . Chứng minh rằng trung điểm của 4 đoạn thẳng KL, LM, MN, NK và trung điểm của 8 đoạn thẳng AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN là đỉnh của đa giác đều 12 cạnh.

Giải :

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại tâm O của hình vuông.

Các điểm A,B,C,D lần lượt biểu diễn các số phức sau :

$$a = -1 - i; \quad b = 1 - i; \quad c = 1 + i; \quad d = -1 + i.$$



A

B

Từ đó ta suy ra các điểm của các tam giác đều là theo công thức đỉnh thứ ba ta có

$$k = -1 - i + 2\omega ; l = 1 - i + 2i\omega ; n = -1 + i - 2i\omega ; m = 1 + i - 2\omega .$$

Đồng thời ta cũng có các trung điểm sau :

$$a_k = -1 - i + \omega ; b_l = 1 - i + i\omega ; c_m = 1 + i - \omega ;$$

$$d_n = -1 + i - i\omega ; k_l = -i + (1 + i)\omega ; l_m = 1 + (i - 1)\omega$$

$$m_n = i - (1 + i)\omega ; m_n = i - (1 + i)\omega ; n_k = -1 + (1 - i)\omega ;$$

$$b_k = -i + \omega ; c_l = 1 + i\omega ; d_m = i - \omega ; a_n = -1 - i\omega .$$

Bằng tính toán ta đi đến kết quả 12 đỉnh trên là các đỉnh của đa giác đều 12 cạnh .
tâm của đa giác cũng là tâm hình vuông.

Bài tập đề nghị :

1) Qua điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC ta dựng những đường thẳng song song với các cạnh BC, CA, AB và lần lượt cắt các cạnh CA, AB, BC tại M, N, Q.

Chứng minh rằng M, N, Q thẳng hàng.

2) Trong mặt phẳng cho hai tam giác đều có cùng hướng quay là $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$.

Từ điểm O bất kỳ ta lấy những đoạn thẳng OC_1, OC_2, OC_3 sao cho $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$;

$$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{A_2B_2} ;$$

$$\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{A_3B_3} . \text{ Chứng minh rằng tam giác } C_1C_2C_3 \text{ đều.}$$

3). Trên cạnh của một tam giác bất kỳ ta dựng ra phía ngoài các tam giác BQC, CPA, ARP, sao cho $\widehat{QBC} = \widehat{CAP} = 45^\circ ; \widehat{BQC} = \widehat{PCA} = 30^\circ ; \widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^\circ$.

Chứng minh tam giác PQR đều.

PHẦN III - KẾT QUẢ

Trên đây là nội dung của đề tài ”Số phức và ứng dụng”. Việc áp dụng đề tài vào thực tiễn giảng dạy được thực hiện theo từng phần. Đề tài được phát huy tối đa ở các lớp luyện thi đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi.

Sau đây là phần kết quả :

1) Sử dụng ở lớp luyện thi Đại học :

Đề tài được sử dụng hằng năm trong các lớp luyện thi đại học và đã phát huy được tác dụng khá nhiều. Cung cấp cho các em một công cụ toán học hiệu quả để giải quyết các vấn đề toán học khác. Đề tài hỗ trợ được phần nào cho các em trong quá trình ôn luyện. Sau đây là một số kết quả thu nhận được trong lớp luyện thi đại học.

Lớp- niên khóa	Học sinh giải quyết được bài Bất đẳng thức	Điểm thi đại học môn Toán	
LỚP 12A từ năm 2009 đến 2013	1. Nguyễn Thị Yến Nhi	8,5(Khối A)	9,5(B)
	2. Bùi Thị Thu Nga	8(A)	9(B)
	3. Nguyễn T.Mộng Tuyền	8 (A)	8.5(B)
	4. Nguyễn Thị Thúy Quỳnh	8 (A)	8(B)
	5. Phạm Xuân Hà	8(A)	8(B)
	6. Nguyễn Đức Tuyền	7,5(A)	8(B)
	7. Bùi Văn Thanh Hào	8,5(A)	9,5(B)
	8. Châu Nguyệt Quế	8(A)	9(B)
	9. Lưu Đức Trung	8(A)	8(A)
	10. Ngô T.T Trang	8(A)	8,5(B)
	11. Nguyễn T.Mỹ Thu	8,5(A)	9,5(B)
	12. Đỗ Thị Trang	8,5(A)	8,5(B)
	13. Nguyễn Viết Xuân	8,5(A)	9(B)
	14. Nguyễn Thị Cẩm Tú	8(A)	9(B)
	15. Lại Thị Anh Thư	8(A)	8(B)
	16. Keo Hoàng Phương	8(A)	8(B)

	17. Hoàng Hải	9(A)	
	18. Nguyễn Văn Tường	8(A)	9(B)
	19. Nguyễn Thị Thảo Trang	8,5(A)	9(B)
	20. Vũ Thị Mỹ Linh	8(A)	8,5(B)
	21. Trần Đình Phú	8(A)	8(B)
	22. Bùi Quang Hà	8,5(A)	8,5(B)

1) Sử dụng ở chương trình Bồi dưỡng học sinh giỏi:

Chuyên đề này tác giả hằng năm vẫn sử dụng để dạy đội tuyển học sinh giỏi và bước đầu cũng cho thấy đã có được một số kết quả. Học sinh được bồi dưỡng đã cảm thấy tự tin hơn trong khi làm bài. Các em đã biết sử dụng số phức làm công cụ để giải các bài toán về hình học phẳng, số học, đa thức, lượng giác. Một số em cũng đã đạt được một số giải cấp Tỉnh.

Họ và tên học sinh	Tên giải thưởng
Nguyễn Thị Mỹ Thu	Lương Thế Vinh(giải II)
Nguyễn Viết Xuân	Lương Thế Vinh(giải II)
Đỗ Thị Trang	Lương Thế Vinh(giải II)
Lại Thị Anh Thư	Lương Thế Vinh(khuyến khích)
Trần Thị Như Xuân	Lương Thế Vinh (giải III)
Nguyễn Thị Thúy	Violympic(khuyến khích)
Hoàng Hải	Violympic(giải II)
Hoàng Hải	Giải toán Casio (giải II)

Sau khi áp dụng chuyên đề này vào giảng dạy , tôi nhận thấy rằng đối với học sinh khá giỏi đã giải các bài tập nhanh gọn hơn, có sự xử lý linh động trước các tình huống . Đã có sự kết hợp giữa các mảng toán học khác nhau. Các em đã tiếp cận và chứng minh bất đẳng thức chủ động hơn trước. Đối với bài toán hình học phẳng các

em có nhiều cách giải đa dạng. Nhiều em đã biết sử dụng linh hoạt các phương pháp để chứng minh những bài bất đẳng thức khó. Các dạng bài tập về số phức cũng được xử lý thành thạo hơn trước khi đề tài được triển khai. Các em đã cảm thấy được số phức cũng gần gũi và có tính ứng dụng cao như các phần toán học khác. Riêng chương trình luyện thi Đại học, các em đều giải được bài số phức.

Dù rất cố gắng triển khai tới học sinh, nhưng do nội dung kiến thức tương đối khó và mới lạ nên đối tượng học sinh nắm bắt được chưa nhiều. Tuy vậy, tác giả cũng mạnh dạn viết đề tài này giới thiệu với quý đồng nghiệp gần xa. Dù bản thân đã rất cố gắng tìm tòi trong quá trình viết, nhưng do năng lực và kinh nghiệm còn nhiều hạn chế nên đề tài sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Mong được sự thông cảm và chia sẻ để đề tài được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin được cảm ơn các đồng nghiệp bộ môn Toán, Ban giám hiệu trường THPT Bình An đã động viên, giúp đỡ tôi hoàn thành đề tài này.

Người viết đề tài

NGUYỄN THÀNH NHÂN

ĐÁNH GIÁ CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC NHÀ

TRƯỜNG

.....

.....

.....

.....

.....

ĐÁNH GIÁ CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC SỞ GIÁO DỤC .

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Trong chuyên đề này có sử dụng một số tài liệu tham khảo:

1. Chuyên đề Bất đẳng thức
(Võ Giang Giai- NXB ĐHQG Hà Nội)
2. Dùng Hình học giải tích để giải PT, BPT, HPT, BĐT
(Trần Đình Thi, NXB ĐHQG Hà Nội)
3. Phương pháp số phức và hình học phẳng
(Nguyễn Hữu Điển NXB ĐHQG Hà Nội)
4. Các chuyên đề nâng cao toán PTTH Đại số và giải tích
(Phạm Quốc Phong , NXB ĐHQG Hà Nội)
5. Chuyên đề chọn lọc Số phức và áp dụng
(Nguyễn Văn Mậu, NXBGD)
6. Bài giảng cho học sinh chuyên toán Các vấn đề về đa thức
(Lê Hoàn Phò , NXBGD)
7. Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi
(Nguyễn Văn Mậu, NXBGD)
8. Chuyên đề Bất đẳng thức
(Nguyễn Thành Nhân, SKKN năm 2013)
9. Chuyên đề Tích phân và Số Phức
(Phan Huy Khải, NXBGD)

PHỤ LỤC

STT	NỘI DUNG	TRANG
1	Phần thứ nhất- Phần mở đầu.	1
2	Phần thứ hai - Nội dung đề tài.	7
3	§1.Ứng dụng số phức để giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình.	7
4	§2 Ứng dụng số phức vào chứng minh bất đẳng thức.	12
5	§3. Ứng dụng số phức vào trong lượng giác.	19
6	§4.Ứng dụng số phức vào đa thức.	24
7	§5. Ứng dụng số phức vào nhị thức Niu-ton.	30
8	§6.Ứng dụng số phức vào hình học phẳng.	33
9	§7.Ứng dụng phương trình đường thẳng trong số phức .	38
10	§8 Ứng dụng của số phức vào đa giác đều.	43
11	Kết quả.	48
12	Tài liệu tham khảo.	52