

Ứng dụng đạo hàm chứng minh bất đẳng thức trong đề thi Đại Học

Trần Hoàng Anh, ngày 19-02-2014

Nick trên diễn đàn VMF : Toc Ngan

Bài viết tham dự Cuộc thi Viết bài kỉ niệm 10 năm Diễn đàn toán học
(2004-2014)

Lời mở đầu xin gửi lời chào, lời chúc đến các thành viên trong BQT diễn đàn, các Mod, các thành viên mạnh khỏe, thành công trong cuộc sống và mong diễn đàn ta sẽ càng ngày càng lớn mạnh, mình viết bài này cũng chỉ có tinh thần giao lưu, đóng góp cho phòng trào của diễn đàn. Một phần mình cũng đang trong quá trình ôn thi ĐH, thời gian gấp rút và khả năng bản thân cũng có hạn nên trong bài viết có điều gì hạn chế hay sai sót mong mọi người góp ý cho. Như mục đích đã nói ở trên, bài viết này chia sẻ 1 số kinh nghiệm của mình khi làm câu 6 trong đề thi ĐH, tuy chưa thật đầy đủ nhưng cũng khái quát phần nào ý tưởng ra đề và cách giải. Trong bài viết mình sử dụng phần lớn các ví dụ đã có trên diễn đàn và đề thi thử của các trường chuyên trang web <http://nguoithay.vn> và 1 số ví dụ trên www.moon.vn mà mình thấy phù hợp với tiêu chí bài viết

Bài viết được chia là các phần nhỏ sau :

Phần 1: Khái quát 3 câu bất đẳng thức trong đề thi năm 2013

Phần 2: Các bài toán 2 biết đối xứng và không đối xứng

Phần 3: Các bài toán 3 biến đổi xứng 2 biến, 3 biến dồn về 1 biến rồi sử dụng đạo hàm – các bài toán tổng hợp, UCT

Bây giờ mình xin bắt đầu với một số ví dụ sau :

VD1: Cho $a, b, c \in [1, 3], a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

Tìm GTLN của $P = (1 - \frac{b}{a})(2 + \frac{c}{a})$

VD2: Cho $a, b > 0$ và $a + 18b^2 = a^2 + 16b^3$

Tìm GTNN của $P = a + b + \frac{6}{ab}$

VD3: Cho $a, b, c > 0$ và $a^4 + b^4 + c^4 = 3$

Chúng minh rằng : $(ab)^5 + (bc)^5 + (ca)^5 \leq 3$

VD4: Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Tìm GTLN của $P = \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ac}$

Hai ví dụ đầu tiên được lấy từ đề thi thử của trang web www.onluyentoan.vn và hai bài sau là những bất đẳng thức hết sức quen thuộc. Chúng ta hãy thôi bàn về độ khó của từng bài mà các cần quan tâm là hứng thú của mọi người khi bắt tay vào giải quyết chúng. Và phần lớn người ta sẽ thấy hứng thú hơn khi làm VD3 và VD4 hơn là hai bài đầu, đơn giản đó là những bài toán được phát biểu đơn giản, các biến đối xứng nhau, còn ở VD2 thậm chí ta còn không tìm được ngay đẳng thức xảy ra khi nào ???

Phần I : Chúng ta hãy điểm lại 3 câu trong đề thi 2013, trước hết là đề khối A

VD5: Cho $a, b, c > 0$, và $(a+c)(b+c) = 4c$

Tìm GTNN của $P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

Bài làm :

Nhìn qua biểu thức và giả thiết thấy đây là biểu thức đối xứng giữa a, b nên có 2 hướng đi, sẽ dồn về theo c hoặc sử dụng bất đẳng thức cổ điển, dự đoán luôn đẳng thức khi $a = b = c$

Thấy biểu thức và giả thiết đồng bậc nên nếu ta chia cả tử và mẫu cho c , đặt

$\frac{a}{c} = x, \frac{b}{c} = y$ ta sẽ được biểu thức 2 biến đối xứng, khi đó bài toán có vẻ đơn giản đi khá nhiều. Ta bắt tay vào làm

Từ giả thiết $\Rightarrow (\frac{a}{c} + 1)(\frac{b}{c} + 1) = 4 \Rightarrow x + y + xy = 3$

Và $P = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2 + y^2}$

Áp dụng $u^3 + v^3 \geq \frac{(u+v)^3}{4} \Rightarrow P \geq 8(\frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3})^3 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Nhận thấy x, y nên khi ta đặt $\begin{cases} S = x + y \\ Q = xy \end{cases}$ thì $\begin{cases} S + Q = 3 \\ P \geq (S-1)^3 - \sqrt{S^2 + 2S - 6} \end{cases}$

Bây giờ ta chỉ cần đi tìm miền giá trị của S rồi khảo sát hàm số đã cho

Từ giả thiết, áp dụng AM-GM ta có $3 = x + y + xy \leq x + y + \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow S = x + y \geq 2$

Khảo sát $f(S)$ trên $[2, +\infty)$ ta có được $f(S) \geq f(2) = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow P \geq 1 - \sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c > 0$

Cùng ý tưởng trên ta có thể có nhiều bài toán tương tự trên như sau :

VD6: Người đưa đề : **Trauvang97**

Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + 6c^2 = 4c(a + b)$

Tìm GTNN của $P = \frac{a^3}{b(a+c)^2} + \frac{b^3}{a(b+c)^3} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$

Bài làm:

Ý tưởng không có gì khác, $P_{\min} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c > 0$

VD7: Đề **www.moon.vn**

Cho $a, b, c \in [1, 2]$.

Tìm GTNN của $P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab + bc + ca)}$

Bài làm

Trước hết ta dự đoán $P_{\min} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = b = 1 \end{cases}$ do a, b đối xứng và mẫu số có đại lượng c ,

khi đó nếu chia cả tử và mẫu cho c , đặt $\frac{a}{c} = x, \frac{b}{c} = y$

$$\Rightarrow P = \frac{(x+y)^2}{1+4(x+y+xy)}, x, y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $6(x+y)^2 \geq 1+4(xy+x+y)$

Vì đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$ nên ta có thể nhóm dễ dàng như sau

$$2(x+y)^2 + 2 \geq 4(x+y) \Rightarrow 2(x+y)^2 + 3 \geq 4(x+y) + 1$$

Do đó chỉ cần chứng minh $6(x+y)^2 + 8xy \geq 2(x+y)^2 + 3$, luôn đúng do $x, y \geq \frac{1}{2}$

VD8: Đề B-2013

Cho $a, b, c > 0$. Tìm GTLN của $P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$

Bài làm : Sử dụng AM-GM ta có được $P \leq \frac{4}{\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{3} + 4}} - \frac{9}{\frac{2(a+b+c)^2}{3}}$

Đến đây khảo sát $f(t), t = \frac{(a+b+c)^2}{3}$ ta có đpcm

Những bài toán kiểu thế ta sẽ xét ở phần sau

VD9: Đề D-2013

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $xy \leq y - 1$

Tìm GTLN của $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$

Bài làm

Nhận thấy P là biểu thức đồng bậc và khi nhìn P ta cũng khó có thể dung bất đẳng thức gì để đánh giá được, cũng khó dự đoán luôn đẳng thức xảy ra

Chia cả tử và mẫu cho y , đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow P = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)}$

Bây giờ sử dụng giả thiết tìm miền giá trị của t rồi khảo sát hàm số

Áp dụng AM-GM ta có $xy \leq y - 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow t \in (0, \frac{1}{4}]$

Đẳng thức xảy ra khi $y = 2$

Đến đây bài toán đã dần được giải quyết, công việc chỉ là khảo sát hàm số $f(t)$ trên $(0, \frac{1}{4}]$

Một số ví dụ tương tự sau :

VD10: Cho $x, y > 0$ và $2y^2(11x^2 + 1) = 8x^4 + 6y^4 + 1$

Tìm GTNN của $P = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)(\sqrt{4x^2 + y^2} + y)}$

Bài làm

Ý tưởng đồng bậc, sử dụng giả thiết để tìm miền giá trị của $t = \frac{x}{y}$

Từ giả thiết ta có $2y^2(11x^2 + 1) = 8x^4 + 6y^4 + 1 \Rightarrow 8t^4 - 22t^2 + 6 = \frac{2}{y^2} - \frac{1}{y^4} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq t^2 \leq \frac{5}{2}$

Xét $P = f(t) = \frac{t^2}{(t^2 + 1)(\sqrt{4t^2 + 1} + 1)}$, đặt $t^2 = a \Rightarrow \begin{cases} a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right] \\ f(t) = f(a) = \frac{a}{(a + 1)(\sqrt{4a^2 + 1} + 1)} \end{cases}$

Khảo sát ta có được $f(t) = f(a) \geq \frac{\sqrt{2} - 1}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

VD11: Nguồn : <http://nguoithay.vn>

Cho $a, b > 0$ và $a^2 + 3b^2 + 1 = b(3a + 2)$

Tìm GTNN của $P = \frac{a + 2b}{\sqrt{a^2 + 3b^2}} - \frac{2a^2 + ab + 8b^2}{2ab + b^2}$

VD12: Nguồn **VMF**

Cho $a, b > 0$ và $a \geq ab + 1$

Tìm GTLN của $P = \frac{3ab}{a^2 + b^2}$

Như đã thấy cả 3 bài thi ĐH năm vừa rồi đều có thể xử lý theo 1 phương pháp chung, đánh giá đưa về 1 biến, tìm miền giá trị rồi khảo sát hàm số tìm cực trị, và đây cũng là xu hướng ra đề thi thử của các trường, cũng như đề thi thật hằng năm, ngoài việc dùng các bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarz để đánh giá các biến, chúng ta cũng cần sử dụng 1 công cụ rất hữu hiệu trong chương trình THPT, đó chính là đạo hàm, và đây cũng là con đường chính trong lời giải ở các ví dụ trong bài viết.

Phần II : Các bài toán 2 biến đối xứng và không đối xứng

Ở các bài toán 2 biến đối xứng, ta có phương pháp dùng nhiều đó là đưa về dạng

$\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, do tính đối xứng nên ta luôn luôn đưa biểu thức về dạng biểu diễn như thế

Đến ngay với đề khối D-2012

VD12: Cho $x, y > 0$ và $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$

Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-1)$

Bài làm

Từ giả thiết $\Rightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Rightarrow x+y \leq 8$

Nhận thấy A không thể đạt GTNN tại tâm $x = y = 4$, ta viết lại như sau

$$A = (x+y)^3 - 3(x+y) - 3xy + 3$$

Áp dụng AM-GM ta có $3xy \leq \frac{3(x+y)^2}{4} \Rightarrow A \geq (x+y)^3 - 3(x+y) - \frac{3(x+y)^2}{4} + 3$

Đến đây mọi chuyện đã rõ, đặt $t = x+y \Rightarrow t \in (0, 8] \Rightarrow A \geq f(t) = t^3 - 3t - \frac{3t^2}{4} + 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dots$

VD13: Chuyên Lê Quý Đôn lần 2-2013

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $3xy = x + y + 1$.

Tìm GTLN của $A = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

Bài làm

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

Khi gặp những bài toán này, khi đọc xong giả thiết ta suy ra luôn điều kiện của S, P

Ta có $3xy = x + y + 1 \geq 2\sqrt{xy} + 1 \Rightarrow xy \geq 1$, hiển nhiên $x + y \geq 2$

Bây giờ ta sẽ đưa biểu thức về dạng hàm số chứa biến P (hoặc S), sử dụng giả thiết,

quy đồng ta được $A = \frac{5P-1}{4P^2} = f(P)$

Từ đó ta có được $A = f(P) \leq 1$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

VD14: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{6}{xy} = x^4 + y^4 + 4$

Tìm GTNN của $A = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{3-2xy}{5-x^2-y^2}$

Bài làm

Đổi xứng 2 biến, từ giả thiết ta có $\frac{6}{xy} = x^4 + y^4 + 4 \geq 2x^2y^2 + 4 \Rightarrow xy = P \leq 1$

Dự đoán luôn $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$

Đến đây ta có thể quy đồng, đưa về dạng tổng tích, từ giả thiết ta có

$$x^4 + y^4 + 4 = \frac{6}{xy} \Leftrightarrow (x+y)^4 - 6x^2y^2 - 4xy(x^2 + y^2) + 4 = \frac{6}{xy}$$

Đã đưa được dạng tổng tích nhưng nếu thế S theo P hay ngược lại ta sẽ được 1 biểu thức rất cồng kềnh, vì thế ta phải sử dụng các bất đẳng thức phụ để làm đơn giản biểu thức đã cho. Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau

$$\frac{1}{1+U^2} + \frac{1}{1+V^2} \geq \frac{2}{1+UV} \text{ với } UV \geq 1$$

Hoặc
$$\frac{1}{1+U^2} + \frac{1}{1+V^2} \leq \frac{2}{1+UV} \text{ với } UV \leq 1$$

Khi đó ta có 2 trường hợp sau :

TH1: $P = xy \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, khi đó $\sqrt{2x \cdot 2y} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức trên $\Rightarrow \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} \geq \frac{2}{1+2\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{3}$

Và
$$\frac{3-2xy}{5-x^2-y^2} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x-y)^2 + 4(1-xy) \geq 0 \Rightarrow P \geq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

TH2: $P = xy \in (0, \frac{1}{4}) \Rightarrow \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} > 1 \Rightarrow P > 1$

Kết hợp lại ta được $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$

Trở lại với bất đẳng thức phụ trên, đó là phát biểu khá đơn giản nhưng rất hay và quan trọng trong những bài đối xứng 2 biến, thậm chí 3 biến có dạng phân thức như trên. Ta có 1 số ví dụ áp dụng sau :

VD15: Cho $a, b, c \in [1, 9], a \geq b, a \geq c$

Tìm GTNN của $P = \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

VD16: ĐH Vinh lần 2-2013

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $3xy + 3 = x^4 + y^4 + \frac{2}{xy}$

Tìm GTLN của $P = x^2y^2 + \frac{16}{x^2 + y^2 + 2}$

VD17: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x^4 + y^4 + \frac{1}{xy} = xy + 2$

Tìm GTNN của $P = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+y^2} - \frac{3}{1+2xy}$

Xét đến dạng toán khác sau :

VD18: Người đăng: Ispectorgadet

Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $x + y = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} + 1$

Tìm GTNN và GTLN của $P = \frac{x}{2}(x-y) + \frac{y}{2}(y-x) + \frac{2(1+xy\sqrt{xy})}{\sqrt{x+y}}$

Bài làm

Viết $P = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{2}{\sqrt{x+y}}$

Bây giờ chỉ cần tìm miền giá trị của $t = x + y$ rồi khảo sát $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{\sqrt{t}}$

Sử dụng Cauchy-Schwarz ta có

$$x + y - 1 = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} \leq \sqrt{(2^2 + 1^2)(x-2 + y+1)} \Rightarrow 1 \leq t = x + y \leq \sqrt{6}$$

Khảo sát hàm số ta được $\begin{cases} P_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x, y) = (2, -1) \\ P_{\max} = 18 + \frac{2}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow (x, y) = (6, 0) \end{cases}$

VD19: Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $a + b - 1 = \sqrt{2a-4} + \sqrt{b+1}$

Tìm GTLN và GTNN của $P = (a+b)^2 - \sqrt{9-a-b} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}$

Bài làm

Ta cần tìm miền giá trị của $t = a+b$

Áp dụng Cauchy-Schwarz ta có

$$a+b-1 = \sqrt{2a-4} + \sqrt{b+1} = \sqrt{2}\sqrt{a-2} + \sqrt{b+1} \leq \sqrt{3(a+b-1)} \Rightarrow 1 \leq t = a+b \leq 4$$

Khảo sát hàm số

VD20: Onluyentoan lần 1-2012

Cho $x, y > 0, x^2 + y^2 = 2$

Chứng minh rằng $P = \frac{x^3}{y^2} + \frac{9y^2}{x+2y} \geq 4$

Bài làm

Cách 1: Theo **minhtuyb**

Áp dụng Cauchy-Schwarz ta có $P[x + (x+2y)] \geq (\frac{x^2}{y} + 3y)^2$

$$\text{Lại có } \frac{x^2}{y} + 3y = \frac{2-y^2}{y} + 3y = 2(y + \frac{1}{y}) \geq 4$$

$$x + (x+2y) = 2(x+y) \leq 2\sqrt{2(x^2+y^2)} = 4$$

Vậy ta có đpcm, đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

Cách 2: Bất đẳng thức tương đương $x^3(x+2y) + 9y^4 \geq 4y^2(x+2y)$

Ta sẽ tạo ra bất đẳng thức dưới dạng đồng bậc, hay viết lại thành

$$x^3(x+2y) + 9y^4 \geq 2y^2(x+2y)\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \Rightarrow (t-1)^2(t^6 + 6t^5 + 14t^4 + 12t^3 + 43t^2 + 66t + 49) \geq$$

Vậy ta cũng có đpcm

Rõ ràng cách số 2 không hay và tự nhiên bằng cách số 1 ☺

Ta có 1 số ví dụ áp dụng sau:

VD21:ĐH Vinh lần 4-2013

Cho $a, b > 0, a^2 + 2b = 12$.

Tìm GTNN của $P = \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{5}{8(a-b)^4}$

VD22: Cho $a, b > 0, a + 2b = ab$

Tìm GTNN của $P = \frac{a^2}{8b+4} + \frac{b^2}{a+1}$

VD23: Người đăng **quanghao98**

Cho $x, y \in \mathbb{R}, 2x + y = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2y+8}$

Tìm GTLN và GTNN của $P = 2x + y - 16$

Kết thúc phần 2, ta đến với phần 3, phần quan trọng nhất, trước hết xét 1 số ví dụ sau

VD24: Cho $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Tìm GTLN của $P = (1+2a)(1+bc)$

VD25: Cho $a, b, c \in [1, 4], a + b + 2c = 8$

Tìm GTLN của $P = a^3 + b^3 + 5c^3$

Bài làm: Nhìn 2 ví dụ trên, ta rút ngay được nhận xét: có 2 biến có vai trò như nhau (và dự đoán cực trị đạt được khi 2 biến đó bằng nhau) trong giả thiết và biểu thức, đúng như tiêu chí của phương pháp đạo hàm, ta sẽ tìm cách đưa biểu thức về dạng hàm số của biến còn lại rồi tiến hành khảo sát

Với ví dụ 24, chỉ cần áp dụng AM-GM ta có

$$P = (1+2a)(1+bc) \leq (1+2a)\left(1 + \frac{b^2+c^2}{4}\right) = (1+2a)\left(1 + \frac{1-a^2}{4}\right) = f(a)$$

Khảo sát với $a \in (0,1)$ ta có $f'(a) = \frac{-6a^2 - 2a + 6}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{37}-1}{6}$

Lập bảng biến thiên ta được $P \leq f(a) \leq f\left(\frac{\sqrt{37}-1}{6}\right) = \dots$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} a = \frac{\sqrt{37}-1}{6} \\ b = c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Ở ví dụ 25, dự đoán $P_{\max} = 137 \Leftrightarrow (a, b, c) = (1, 1, 3)$, và ta sẽ đưa về dạng $P \leq f(c)$

Xử lí đại lượng $a^3 + b^3$ như sau $P = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 2c^3 = (8-2c) - 3ab(8-2c) + 5c^3$

Đến đây ta không thể đánh giá $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(8-2c)^2}{4}$ vì khi đó

$P \geq (8-2c)^3 - \frac{3(8-2c)^2}{4}(8-2c) + 5c^3$, không thể tìm được GTLN

Để ý $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a+b-1 \Rightarrow -3ab \leq -3(a+b-1)$

$\Rightarrow P \leq (8-2c)^3 - 3(8-2c)(8-2c) + 5c^3 = f(c)$

Từ giả thiết ta có $c \in [1, 3]$, khảo sát ta được $f(c) \leq f(3) = 137 \Rightarrow P \leq 137$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1, c = 3$

VD26: Người đăng **phanquockhanh**

Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$.

Tìm GTNN của $P = \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{2}{(2c+1)\sqrt{6c+3}}$

Bài làm

Theo **daicahuyvn**

Nhìn P đối xứng a, b nên ta sẽ viết dưới dạng $P \geq f(c)$

Thấy đại lượng quen thuộc $\frac{1}{1+U^2} + \frac{1}{1+V^2}$ nên nếu

$$ab \geq \frac{1}{4} \Rightarrow 2a \cdot 2b \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} \geq \frac{2}{2\sqrt{ab}+1} = \frac{2\sqrt{c}}{2+\sqrt{c}} \geq \frac{c}{2c+1}$$

Khi đó $P \geq \frac{c}{2c+1} + \frac{2}{(2c+1)\sqrt{6c+3}}$, $P \geq \frac{8}{9} \Leftrightarrow (c-1)^2(6c-33) \leq 0$, luôn đúng

Bây giờ ta cần xét nốt trường hợp $ab \leq \frac{1}{4}$

Khi đó dễ thấy $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} > 1 > \frac{8}{9}$

Vậy $P_{\min} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Trong những bài toán 3 biến có 2 biến bằng nhau, công việc là dồn về biến còn lại, và khi đó việc sử dụng các bất đẳng thức phụ để đánh giá là 1 việc rất quan trọng, giúp ta dồn biến nhanh hơn và hiệu quả hơn. Chúng ta đến với ví dụ tiếp sau

VD27: Người đăng : **Trannhuphuc**

Cho $x, y, z \geq 0, \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} = 5$

Tìm GTLN của $P = 2x^3 + y^3 + z^3$

Bài làm

Ta sẽ dùng bất đẳng thức phụ sau $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b}$

Đẳng thức xảy ra khi $ab = 0$

Khi đó $\sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} \geq 1 + \sqrt{1+2y+2z}$, đẳng thức xảy ra khi $yz = 0$

$$\Rightarrow 5 = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} \geq 1 + \sqrt{1+2y+2z} + \sqrt{1+x^2} \geq 2 + \sqrt{1+x^2+2y+2z}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2(y+z) \leq 8$$

Ở trên ta đã sử dụng điều kiện $yz = 0$ nên khi đó $y^3 + z^3 = (y+z)^3$

$$\text{Xét } P = 2x^3 + y^3 + z^3 \leq 2x^3 + (y+z)^3 \leq 2x^3 + \left(\frac{8-x^2}{2}\right)^3 = f(x)$$

$$\text{Khảo sát hàm số với } x \in [0, 2\sqrt{2}] \Rightarrow f(x) \leq f(0) = 64 \Rightarrow P \leq 64$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x, y, z) = (0, 4, 0) = (0, 0, 4)$

Rõ ràng ví dụ 27 khó hơn 2 ví dụ đầu vì phải sử dụng bất đẳng thức phụ khá hay và dự đoán luôn được đẳng thức xảy ra khi nào ?

VD28: Chuyên **Vĩnh Phúc lần 1-2013**

Cho $x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Tìm GTLN của $P = \sqrt{3x^2+7y} + \sqrt{5y+5z} + \sqrt{3x^2+7z}$

Bài làm

Cách 1: Trước hết ta vẫn sẽ tìm cách đưa về dạng $P \leq f(x)$

Áp dụng AM-GM ta có ngay

$$P \leq 3\sqrt{\frac{6x^2 + 12(y+z)}{3}} \leq 3\sqrt{\frac{6x^2 + 12\sqrt{2(y^2 + z^2)}}{3}} = 3\sqrt{\frac{6x^2 + 12\sqrt{6-2x^2}}{3}} \leq 3\sqrt{10}$$

Cách 2: Viết $P \leq f(t)$ với $t = y + z$

Áp dụng AM-GM ta có

$$P \leq \sqrt{5(y+z)} + 2\sqrt{\frac{6x^2 + 7(y+z)}{2}} = \sqrt{5(y+z)} + \sqrt{14(y+z) + 2[18 - 6(y^2 + z^2)]}$$

Lại có $y^2 + z^2 \geq \frac{(y+z)^2}{2}$ nên viết theo t ta có

$$P \leq f(t) = \sqrt{5t} + \sqrt{-6t^2 + 14t + 36}, 0 \leq t = y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)} \leq \sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{t}} + \frac{7-6t}{\sqrt{-6t^2 + 14t + 36}} = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow f(t) \leq f(2) = 3\sqrt{10} \Rightarrow P \leq 3\sqrt{10}$

Đẳng thức xảy ra khi $(x, y, z) = (1, 1, 1) = (-1, 1, 1)$

VD29: Nguồn VMF

Cho $a, b, c > 0, a^3 + b^3 = c(c-1)$

Tìm GTNN và GTLN của $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2}$

Một số bài toán đối xứng 3 biến sử dụng đạo hàm

VD30: Đề Toán học tuổi trẻ

Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

Tìm GTNN và GTLN của $P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Bài làm

Trước hết dự đoán $P_{\min} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, 1, 3\right)$ và hoán vị

Viết $P = \frac{1}{1+\frac{b}{a}} + \frac{1}{1+\frac{c}{b}} + \frac{1}{1+\frac{a}{c}}$, có đại lượng $\frac{1}{1+U^2} + \frac{1}{1+V^2}$ nên nếu $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \geq 1 \Leftrightarrow c \geq a$

Thì $\frac{1}{1+\frac{b}{a}} + \frac{1}{1+\frac{c}{b}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\frac{c}{a}}} \Rightarrow P \geq \frac{1}{1+\frac{a}{c}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{c}{a}}}$, khi đó $P \geq f(t), t = \sqrt{\frac{c}{a}}$

Ta bắt đầu làm, do vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử $c = \max$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{1+t} + \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{2}{1+t} + \frac{t^2}{t^2+1}, t = \sqrt{\frac{c}{a}} \in [1, 3]$$

Khảo sát ta được $P \geq f(t) \geq f(3) = \frac{7}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right] \\ t = \sqrt{\frac{c}{a}} = 3 \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, 1, 3\right) \text{ và hoán vị} \\ \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \end{cases}$

Công việc tìm GTLN hoàn toàn tương tự khi giả sử $c = \min$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{b}{a}} + \frac{1}{1+\frac{c}{b}} \leq \frac{2}{1+\sqrt{\frac{c}{a}}}, \text{ do } \Rightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a} \leq 1$$

VD31: Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$

Chứng minh rằng $a(b-c)^4 + b(c-a)^4 + c(a-b)^4 \leq \frac{1}{12}$

Bài làm

Những bài toán kiểu này thường có đẳng thức khi 1 biến bằng 0

Ta làm như sau: Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$

$$\Rightarrow P \leq a(b+c)^4 + ba^4 + ca^4 = a(b+c)^4 + a^4(b+c)$$

$$\text{Đặt } t = b+c \Rightarrow a+t=1 \text{ và } P \leq at^4 + a^4t = at(a^3 + b^3) = at(1-3at)$$

Đặt $x = at \leq \frac{(a+t)^2}{4} \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], P \leq f(x) = x(1-3x)$

Ta có luôn $P \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}, 0\right)$

VD32: Chuyên Vĩnh Phúc lần 5

Cho $a, b, c > 0, a+b+c=3$

Tìm GTLN của $P = (a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)$

Bài làm

Do điều kiện bài toán nên ta dự đoán $P_{\max} = 12 \Leftrightarrow (a, b, c) = (2, 1, 0)$

Giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$, suy ra

$$P \leq (a^2 - ab + b^2)a^2b^2 = [(a+b)^2 - 3ab]a^2b^2 \leq [(a+b+c)^2 - 3ab](ab)^2 = (9-3ab)(ab)^2$$

$$\text{Đặt } t = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{(a+b+c)^2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow t \in \left[0, \frac{9}{4}\right]$$

Khảo sát hàm số $\Rightarrow f(t) \leq f(2) = 12 \Rightarrow P \leq 12$

Vậy ta có đpcm

VD33: Đề Toán học tuổi trẻ

Cho $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Tìm GTNN của $P = \frac{16}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + 1} + \frac{ab+bc+ca+1}{a+b+c}$

Gợi ý: Chứng minh $a+b+c \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

Một số bài tập khác

VD34: Cho $a, b, c \in [2, 4]$

Tìm GTLN của $P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 1}{abc(a+b+c)}$

VD35: Đề Toán học tuổi trẻ

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}, a+b+c=1$

Chứng minh rằng $-\frac{\sqrt{3}}{18} \leq (a-b)(b-c)(c-a) \leq \frac{\sqrt{3}}{18}$

Một số bài tập tổng hợp

VD36: Đề Toán học tuổi trẻ + Chuyên ĐH Vinh

Cho $x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3y$

Tìm GTNN của $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$

Bài làm

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức phụ sau $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$

Khi đó $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(\frac{y}{2}+1)^2} \geq \frac{8}{(x+\frac{y}{2}+2)^2}$

$\Rightarrow P \geq \frac{8}{(x+\frac{y}{2}+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \geq \frac{64}{(x+\frac{y}{2}+z+5)^2}$

Bây giờ ta cần tìm $x + \frac{y}{2} + z \leq A$ mà vẫn đảm bảo
$$\begin{cases} 1+x = \frac{y}{2}+1 \\ x + \frac{y}{2} + 2 = z+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=z=1 \\ y=2 \end{cases} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3y \end{cases}$$

Xét $2A = 2x + y + 2z \leq x^2 + 1 + y + z^2 + 1 \leq y - y^2 + 2 + y = -(y-2)^2 + 6 \leq 6$

$\Rightarrow P \geq \frac{64}{(3+5)^2} \geq 1$, đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=z=1 \\ y=2 \end{cases}$

Ta cũng tham khảo cách dồn về biến y rất hay sau

Cách 2: Theo **WhiteShadow**

Áp dụng AM-GM và Cacuchy-Schwarz ta có $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \geq \frac{27}{(x+z+4)^2}$

Từ giả thiết $3y \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 + \frac{(x+z)^2}{2}$

$\Rightarrow 3y+4 \geq y^2 + \frac{(x+z)^2}{2} + 4 \geq y^2 + \frac{(x+z+4)^2}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \geq \frac{9}{2(3y+4-y^2)} \Rightarrow P \geq f(y) = \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{9}{2(3y+4-y^2)}$

Xét $f'(y) = \frac{(y-2)(2y^3+181y^2+400y+236)}{2[(y-4)(y+1)(y+2)]^2}$

$\Rightarrow P \geq f(y) \geq f(2) = 1$

Cách 3: Theo **nguyenthehoan**

Sử dụng Cauchy-Schwarz ta có $(1+x)^2 \leq 2(1+x^2), (z+3)^2 \leq 4(z^2+3)$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \geq \frac{1}{2x^2+2} + \frac{2}{z^2+3} = \frac{1}{2x^2+2} + \frac{1}{z^2+3} + \frac{1}{z^2+3} \geq \frac{9}{2(x^2+z^2)+8}$

$\Rightarrow P \geq \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{9}{2(3y-y^2)+8}$

Ta có $P \geq 1 \Leftrightarrow (y-2)^2(2y^2+10y+9) \geq 0$

Vậy cả 3 cách làm đều cho ta đáp số đúng !!!

VD37: <http://nguoithay.vn>

Cho $a, b, c > 0$

Tìm GTNN của $P = \frac{1}{a+6\sqrt{ab}+4\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{a+b+c}}$

Bài làm

Nhìn biểu thức ta dự đoán ngay $P \geq (t), t = \sqrt{a+b+c}$

Do đó ta phải viết được $a + 6\sqrt{ab} + 4\sqrt{bc} \leq x(a+b+c)$, do các hạng tử đồng bậc

Áp dụng AM-GM ta có $6\sqrt{ab} = 2\sqrt{3a \cdot 3b} \leq 3a + 3b$

$4\sqrt{bc} = 2\sqrt{b \cdot 4c} \leq b + 4c$

Cộng 2 bất đẳng thức trên lại ta có đpcm

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{4(a+b+c)} - \frac{1}{\sqrt{a+b+c}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{a+b+c}} - 1\right)^2 - 1 \geq -1$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} 3a = 3b \\ b = 4c \\ t = \sqrt{a+b+c} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{36}\right)$$

VD38: <http://nguoithay.vn>

Cho $x, y, z > 0, x + y + 1 = z$

Tìm GTNN của $P = \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+xz} + \frac{z^3}{z+xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$

Bài làm

Dễ thấy vai trò x, y là như nhau nên ta sẽ viết $P \geq (z)$

Từ giả thiết, để ý $x + y + 1 = z \Rightarrow (x+1)(y+1) = z + xy \leq \frac{(x+y+2)^2}{4} = \frac{(z+1)^2}{4}$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+xz} + \frac{z^3}{\frac{(z+1)^2}{4}} + \frac{14}{(z+1) \cdot \frac{z+1}{2}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+xz} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} + \frac{28}{(z+1)^2}$$

Bây giờ cần đánh giá $\frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+xz}$ theo z

Áp dụng Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} = \frac{x^4}{x^2+xyz} + \frac{y^4}{y^2+xyz} \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz} \geq \frac{x^2+y^2}{1+z}$$

Mà $\frac{x^2+y^2}{1+z} \geq \frac{(x+y)^2}{2(1+z)} = \frac{(z-1)^2}{2(1+z)}$ nên $P \geq \frac{(z-1)^2}{2(1+z)} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} + \frac{28}{(z+1)^2} = \frac{9z^3 - z^2 - z + 57}{2(z+1)^2} = f(z)$

Đặt $g(z) = 2f(z) \Rightarrow g'(z) = \frac{(3z-5)(3z^3 + \frac{51z^2}{3} + 37z + 23)}{(z+1)^4}$

$\Rightarrow f(z) \geq f(\frac{5}{3}) = \frac{53}{8} \Rightarrow P \geq \frac{53}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

VD39: Chuyên Lê Hồng Phong

Cho $x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(x+y+z) - 2xy$

Tìm GTNN của $P = x^2 + y^2 + 2z + \frac{40}{\sqrt{y+z+1}} + \frac{40}{\sqrt{z+3}}$

Bài làm: Ta hi vọng $y+z+1 = x+3 \Leftrightarrow y+z = x+2$ và $y+z+1, x+3$ đều là số chính phương để P nhận giá trị hữu tỉ

Sử dụng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}, \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ ta có

$$\frac{40}{\sqrt{y+z+1}} + \frac{40}{\sqrt{x+3}} \geq \frac{160}{\sqrt{y+z+1} + \sqrt{x+3}} \geq \frac{160}{2\sqrt{\frac{y+z+1+x+3}{2}}} = \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{x+y+z+4}}$$

Đến đây ta có ý tưởng đưa về biến $t = x+y+z$

Chú ý giả thiết $2(x+y+z) \geq (x+y)^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{2} \Rightarrow x+y+z \leq 4$

Khi đó dự đoán dấu bằng $\begin{cases} x+2 = y+z \\ x+y+z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y+z=3 \end{cases}$

Giải quyết $x^2 + y^2 + 2z$ như sau $x^2 + y^2 + 2z = x^2 + 1 + y^2 + 1 + 2z - 2 \geq 2(x + y + z) - 2$

$$\Rightarrow P \geq 2(x + y + z) - 2 + \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{x + y + z + 4}} = 2(x + y + z + 4) - 10 + \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{x + y + z + 4}}$$

Đặt $t = \sqrt{x + y + z + 4} \Rightarrow t \in (2, 2\sqrt{2}]$

Khảo sát hàm số $\Rightarrow f(t) \geq f(2\sqrt{2}) = 46$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1, z = 2$

VD40: Đề Toán học tuổi trẻ

Cho $x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm GTNN của $P = (xy + yz + 2xz)^2 - \frac{8}{(x + y + z)^2 - xy - yz + 2}$

Bài làm

Viết lại $P = (xy + yz + 2xz)^2 - \frac{8}{3 + xy + yz + 2xz}$

Đặt $xy + yz + 2xz = t \Rightarrow P = f(t) = t^2 - \frac{8}{t + 3}$

Ta cần tìm miền giá trị của t

Do $(x + y + z)^2 + (x + z)^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + 2xz) \geq 0 \Rightarrow t \geq -1$

Và $(2 - \sqrt{3})x^2 + \frac{y^2}{2} \geq 2xy \cdot \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$

$(2 - \sqrt{3})z^2 + \frac{y^2}{2} \geq 2yz \cdot \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$

$(\sqrt{3} - 1)x^2 + (\sqrt{3} - 1)z^2 \geq 2xz \cdot (\sqrt{3} - 1)$

Cộng các bất đẳng thức trên lại ta được $t \leq \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$

Khảo sát hàm số ta được $P = f(t) \geq f(-1) = -3$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y+z=y=x+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = (\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\mp 1}{\sqrt{2}})$

Nhận xét: Việc tìm max của t ở trên là không cần thiết, nhưng để cho đầy đủ và chắc chắn ta nên tìm cả chặn trên và chặn dưới của biến

VD41: Đề www.moon.vn

Cho $a, b, c > 0, a+b+c=1$

Tìm GTNN của $P = \frac{1}{2(2a+1)^2} + \frac{1}{3+9b} + \frac{1}{6+36c}$

Bài làm

Ý tưởng đưa về biến a theo bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{3+9b} + \frac{1}{6+36c} = \frac{4}{12+36b} + \frac{1}{6+36c} \geq \frac{(2+1)^2}{12+36b+6+36c} = \frac{1}{6-4a}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{2}{12+36b} = \frac{1}{6+36c} \Leftrightarrow b=2c$

Khi đó $P \geq \frac{1}{2(2a+1)^2} + \frac{1}{6-4a} = f(a)$

Xét $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(a) \geq f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} \Rightarrow P \geq \frac{3}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

VD42: Đề chuyên Lào Cai

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x+y+1=z$

Tìm GTLN của $P = \frac{x^3 y^3}{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}$

Bài làm

Bất đẳng thức đối xứng x, y nên $P_{\max} \Leftrightarrow (x+yz)(y+xz)(z+xy)^2 \geq kx^3 y^3$

Sử dụng giả thiết ta có $P = \frac{x^3 y^3}{(x+y)^2 (x+1)^3 (y+1)^3}$

Sử dụng AM-GM ta có $P \leq \frac{x^3 y^3}{4xy.(x+1)^3 (y+1)^3} = \frac{x^2 y^2}{4(x+1)^3 (y+1)^3}$

Ta có $x+1 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}} \Rightarrow (x+1)^3 \geq \frac{27x^2}{4}$

Tương tự ta có được $(y+1)^3 \geq \frac{27y^2}{4}$

$P_{\min} = \frac{4}{729} \Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 2, 5)$

VD43: <http://nguoithay.vn>

Cho $x, y, z > 0, x + y + 2 = z$

Tìm GTLN của $P = \frac{x^3 y^3}{(2x + yz)(2y + xz)(2z + xy)^2}$

VD44: <http://nguoithay.vn>

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $3b^2 c^2 + a^2 = 2(a + bc)$

Tìm GTNN của $P = \frac{2a^2 - 2a + 5}{bc} + \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(a+c)^2}$

Bài làm

Ta sẽ viết $P \geq f(a)$

Từ giả thiết ta có $a^2 - 2a = 2bc - 3b^2 c^2 \leq -1 \Rightarrow bc \leq 1$

Bây giờ sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{4}{(a+\sqrt{bc})^2}$ theo bc, a

Nếu $b = c \Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{(a+c)^2} = \frac{1}{(a+\sqrt{bc})^2} \Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} = \frac{2}{(a+\sqrt{bc})^2}$, ta hi vọng

bất đẳng thức đó đúng, nhưng rất tiếc lại là 1 bất đẳng thức sai

Viết $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{b}{a})^2}$ và $\frac{1}{(a+c)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{c}{a})^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{(1+\frac{b}{a})^2} + \frac{1}{(1+\frac{c}{a})^2} \right]$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ $\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}, \forall x, y > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{(1+\frac{b}{a})^2} + \frac{1}{(1+\frac{c}{a})^2} \right] \geq \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{bc}{a^2}} = \frac{1}{a^2+bc}$$

Vậy $P \geq \frac{2a^2-2a+5}{bc} + \frac{4}{a^2+bc} \geq 2a^2-2a+5 + \frac{4}{a^2+1}$, do $bc \leq 1$

Đến đây ta có thể khảo sát hàm số hoặc làm như sau : để viết được như trên ta đã gián tiếp sử dụng điều kiện $a = bc = 1$, nên nếu cách làm đúng thì $f(a) \geq f(1) = 7$

Ta sẽ chứng minh $2a^2 - 2a + 5 + \frac{4}{a^2+1} \geq 7 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(a^2+a+1)}{a^2+1} \geq 0$

Vậy ta có đpcm

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

VD45: <http://nguoithay.vn>

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2 = 8$

Tìm GTLN của $P = \frac{a(b+c)^2}{a+c} + \frac{b(a+c)^2}{b+c} - \frac{1}{c}$

Bài làm: Ý tưởng dồn về khảo sát $P \leq f(c)$

Áp dụng bất đẳng thức sau $\frac{(x+y)^2}{u+v} \leq \frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{v}$

$$\Rightarrow \frac{(b+c)^2}{a+c} \leq \frac{b^2}{a} + c \Rightarrow \frac{a(b+c)^2}{a+c} \leq b^2 + ac$$

Tương tự ta có $\frac{a(b+c)^2}{a+c} \leq b^2 + ac$

$$\Rightarrow P \leq a^2 + b^2 + c(a+b) - \frac{1}{c} = 4 - c^2 - \frac{1}{c} = f(c), \text{ do giả thiết}$$

Đến đây có thể khảo sát hoặc áp dụng luôn AM-GM ta có

$$c^2 + \frac{1}{c} = c^2 + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \Rightarrow P \leq 4 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

Đẳng thức xảy ra khi

VD46: Cho $a, b, c > 0, a + b + c = 1$

Tìm GTNN của $P = \frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(c+a)(a+b)} + (c+1)(a+b+3)$

Bài làm

Bài này khá đơn giản như sau:

Sử dụng AM-GM ta có

$$P = \frac{1}{(a+b)} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) + (c+1)(a+b+3) \geq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{4}{a+c+b+c} + (c+1)(4-c) = \frac{4}{1-c^2} - c^2 + 3c + 4 = f(c)$$

Khảo sát ta có $f(c) \geq f(0) = 8 \Rightarrow P \geq 8$

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

VD47: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=10 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$

Tìm GTNN và GTLN của $P = a^2 + b^2 + c^2$

Bài làm

Đề ý $P = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 100 - 2abc$

Do đó ta chỉ cần tìm GTNN và GTLN của $Q = abc$

$$\text{Ta có } \frac{b+c}{bc} = 1 - \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{10-a}{bc} = \frac{a-1}{a} \Rightarrow Q = abc = \frac{a^2(10-a)}{a-1} = f(a)$$

Lập bảng biến thiên của hàm số ta không tìm được cực trị, do hàm số gián đoạn tại $a=1, a=8$

Vậy P không có GTNN, GTLN

Bài tập trên giống đề **B-2010**

$$\text{Cho } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ và } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Tìm GTLN của $P = a^5 + b^5 + c^5$

$$\textbf{VD48:} \text{ Cho } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Tìm GTLN của $P = (abc)^2$

Bài làm:

Với những bài toán đối xứng như thế, ta luôn viết được dưới dạng hàm số nào đó

$$\text{Ta có } a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 = (b+c)^2 \Rightarrow bc = \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{2} = a^2 - \frac{1}{2}$$

Đến đây ta cần xét 2 trường hợp

$$\text{TH1: } bc \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow P = a^2 \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{Đặt } t = a^2 \Rightarrow t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], P = t\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{Khảo sát hàm số ta có } P = f(t) \leq f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{54}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} t = a^2 = \frac{1}{6} \\ bc \leq \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

TH2: Tương tự ta cũng có $P = f(t) \leq \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{54}$

Kết thúc bài viết sẽ là phương pháp UCT (thường biết đến dưới dạng phương trình tiếp tuyến), dung cho những bài mà các biến độc lập với nhau, được viết dưới dạng hàm số $P = f(a) + f(b) + f(c)$

Tài liệu về vấn đề này có rất nhiều trên diễn đàn, có thể tham khảo tài liệu sau:

Phương pháp hệ số bất định

<http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?/topic/90839-ph%C6%B0%C6%A1ng-ph%C3%A1p-h%E1%BB%87-s%E1%BB%91-b%E1%BA%A5t-%C4%91%E1%BB%8Bnh-uct/>

Phương pháp UCT – Võ Quốc Bá Cẩn, Nguyễn Thúc Vũ Hoàng

<http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?/topic/76805-ph%C6%B0%C6%A1ng-phap-utc-vo-qu%E1%BB%91c-ba-c%E1%BA%A9n-nguy%E1%BB%85n-thuc-vu-hoang/>

Địa chỉ: Trường THPT chuyên KHTN

Số điện thoại : 0986504770

Trang web học tập:

[1] <http://diendantoanhoc.net/forum/>

[2] <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php>