SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH BÌNH	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2015 – 2016
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn: TOÁN – Ngày thi: 14/9/2015** Thời gian làm bài: **180** phút

Bài 1. *(5 điểm)* Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = 1; x_{n+1} = 3 + \frac{5}{x_n} \text{ với } n = 1, 2, \dots.$$

Tìm số thực dương *a* sao cho dãy số (y_n) xác định bởi:

$$y_n = \frac{a^n}{x_1.x_2 \dots x_n} \text{ với } n = 1, 2, \dots$$

có giới hạn hữu hạn và $\lim y_n \neq 0$.

Bài 2. *(5 điểm)* Cho tam giác *ABC* nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (*O*) có đường cao *AH* và tâm đường tròn nội tiếp là *I*. Gọi *M* là điểm chính giữa cung nhỏ *BC* của (*O*) và *D* là điểm đối xứng với *A* qua *O*. Đường thẳng *MD* cắt các đường thẳng *BC*, *AH* theo thứ tự tại *P* và *Q*.

a. Chứng minh rằng tam giác *IPQ* vuông.

b. Đường thẳng *DI* cắt (*O*) tại điểm *E* khác *D*. Hai đường thẳng *AE* và *BC* cắt nhau tại điểm *F*. Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì *I* là trọng tâm của tam giác *APF*.

Bài 3. *(5 điểm)* Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện:

$$(P(x))^3 - 3(P(x))^2 = P(x^3) - 3P(-x) \text{ với mọi } x \in R.$$

Bài 4. *(5 điểm)* Xác định tất cả các số nguyên dương *n* thỏa mãn tính chất: tồn tại một cách chia hình vuông có độ dài cạnh là *n* thành đúng năm hình chữ nhật sao cho độ dài các cạnh của năm hình chữ nhật đó là các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

—————— **HẾT** ——————

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

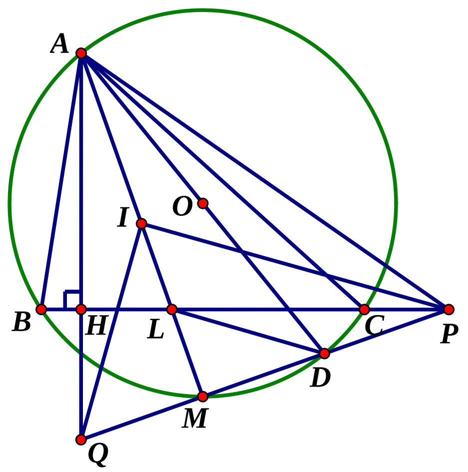
Họ và tên thí sinh: ....Số báo danh:........................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NINH BÌNH

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: TOÁN – Ngày thi thứ nhất

HƯỚNG DẪN CHẤM

Chú ý: Mọi cách giải khác đáp án, nếu đúng và ngắn gọn thì cho điểm tương ứng.

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1. **5điểm**	Ta có $x_{n+1}=3+\dfrac{5}{x_n}\Rightarrow x_nx_{n+1}=3x_n+5$ với $n=1,2,...$ Đặt $z_n=x_1x_2...x_n$ với $n=1,2,...$ thì ta có $z_{n+2}=x_1x_2...x_nx_{n+1}x_{n+2}=z_nx_{n+1}x_{n+2}$ $=z_n(3x_{n+1}+5)=3z_nx_{n+1}+5z_n=3z_{n+1}+5z_n$. Như vậy dãy (z_n) xác định bởi: $z_1=x_1=1,\ z_2=x_1x_2=1.8=8$ và $z_{n+2}=3z_{n+1}+5z_n$ với $n=1,2,...$	**2**
	Theo cách tìm công thức của dãy truy hồi tuyến tính cấp hai ta tính được: $z_n=A\left(\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^n+B\left(\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^n$ với $n=1,2,...$ trong đó $A=\dfrac{13+\sqrt{29}}{29+3\sqrt{29}}$ và $B=\dfrac{13-\sqrt{29}}{29-3\sqrt{29}}$.	**1**
	Do đó $y_n=\dfrac{a^n}{A\left(\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^n+B\left(\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^n}$ $=\dfrac{1}{A\left(\dfrac{3+\sqrt{29}}{2a}\right)^n+B\left(\dfrac{3-\sqrt{29}}{2a}\right)^n}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{3+\sqrt{29}}{2a}\right)^n\left[A+B\left(\dfrac{3-\sqrt{29}}{3+\sqrt{29}}\right)^n\right]}$. Từ đó suy ra chỉ có $a=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$ thì (y_n) có giới hạn hữu hạn khác không. Giới hạn khi đó là $\lim y_n=\dfrac{1}{A}=\dfrac{29+3\sqrt{29}}{13+\sqrt{29}}$. Vậy đáp số là $a=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.	**2**
Bài 2. **5điểm**	 Các hình vẽ sau cho trường hợp $AB < AC$. **a. (3 điểm)** Ta có: $\angle OAC = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle AOC$ $= 90^0 - \angle ABC = \angle BHA$ và AI là phân giác $\angle BAC$ nên $\angle HAI = \angle OAI$. Suy ra ΔAQD cân tại $A \Rightarrow MQ = MD$ (1). Gọi L là giao điểm AM và BC. Khi đó $\angle LPD = 90^0 - \angle HQP$ $= 90^0 - \angle ADM = \angle LAD$. Do đó tứ giác $ALDP$ nội tiếp được $\Rightarrow MD.MP = ML.MA$ (2).	**1**

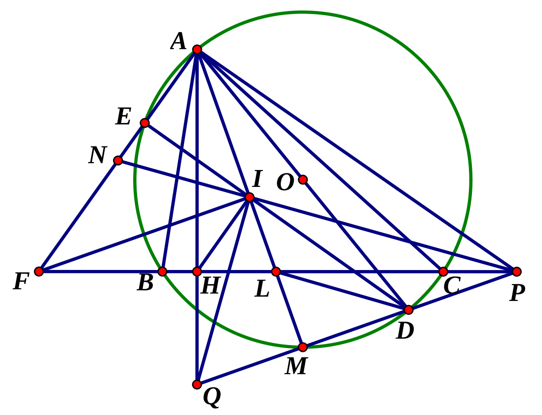
Ta có $\Delta MLC \sim \Delta MCA\ (g-g)$ nên $\dfrac{ML}{MC} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MC^2 = ML.MA$ (3).

Lại có $\angle MIC = \angle MCI = \dfrac{A+C}{2}$ nên ΔMIC cân tại $M \Rightarrow MC = MI$ (4).

1

Từ (1), (2), (3), (4) ta có: $MI^2 = MC^2 = ML.MA = MD.MP = MQ.MP$.
Suy ra tam giác IPQ vuông tại I.

1



b. (2 điểm)
Từ câu **a.** ta suy ra $HIPQ$ nội tiếp
$\Rightarrow \angle IHP = \angle IQP = \angle IDM = \angle EAM$
do đó tứ giác $AIHF$ nội tiếp
$\Rightarrow \angle AIF = \angle AHF = 90^0$.

Gọi N là trung điểm của đoạn FA.
Khi đó $\angle NIA = \angle NAI = \angle EDM$
$= \angle IQP = \angle MIP$
nên N, I, P thẳng hàng.

1

Theo tính chất phân giác và giả thiết thì

$$\frac{IA}{IL} = \frac{BA}{BL} = BA : \frac{AB.BC}{AB+AC} = BA : \frac{AB.BC}{2BC} = 2.$$

Áp dụng định lý Menelauyt cho tam giác AFL với cát tuyến NIP ta có

$$\frac{AN}{NF}.\frac{FP}{PL}.\frac{LI}{IA} = 1 \Leftrightarrow 1.\frac{FP}{PL}.\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow L \text{ là trung điểm của } PF.$$

Từ đó suy ra I là trọng tâm của tam giác APF.

1

Bài 3.
5điểm

Giả sử đa thức $P(x)$ thỏa mãn

$$(P(x))^3 - 3(P(x))^2 = P(x^3) - 3P(-x) \text{ (1) với mọi } x \in R.$$

Trường hợp 1. $P(x)$ là hằng số, đặt $P(x) = c$.

Thay vào (1) ta được $c^3 - 3c^2 = c - 3c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=1 \\ c=2 \end{array}\right.$

1

Trường hợp 2. $P(x)$ không phải là hằng số, đặt $n = \deg P(x), n \geq 1$ và $a \neq 0$ là hệ số bậc cao nhất của $P(x)$. Ta có thể viết $P(x) = ax^n + Q(x)$ trong đó $Q(x)$ là đa thức hệ số thực có $\deg Q(x) = k \leq n-1$.

Cân bằng hệ số của bậc cao nhất (bậc $3n$) trong (1) ta có $a^3 = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

+) ***Nếu*** $a=1$, ta có $P(x) = x^n + Q(x)$. Thay vào (1) ta được

$$(x^n + Q(x))^3 - 3(x^n + Q(x))^2 = x^{3n} + Q(x^3) - 3((-x)^n + Q(-x))$$

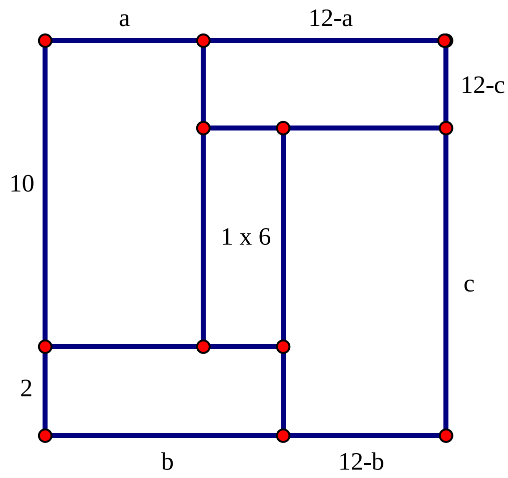
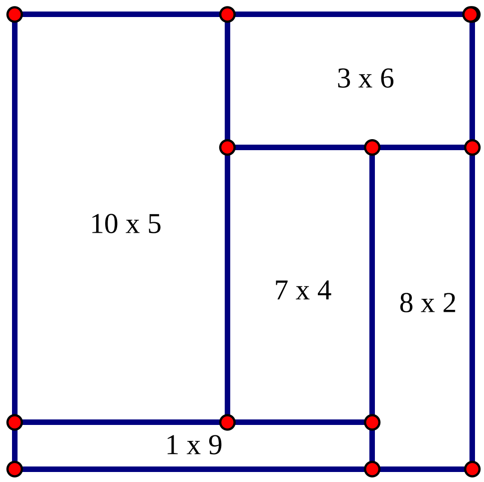
$$\Leftrightarrow 3x^{2n}Q(x) + 3x^n(Q(x))^2 + (Q(x))^3 - 3x^{2n} - 6x^nQ(x) - 3(Q(x))^2 =$$
$$Q(x^3) - 3Q(-x) - 3.(-1)^n.x^n \quad (2).$$

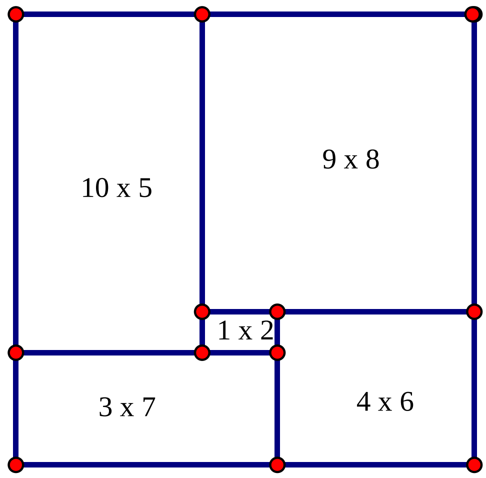
Trong (2), nếu $k > 0$ thì bậc của VT là $2n + k$, bậc của VP là $h \leq \max\{3k;n\}$ nên cân bằng bậc ta phải có $2n + k = h \leq \max\{3k;n\}$. Điều này vô lý vì $2n+k > 3k$ và $2n+k > n$. Do vậy $k = 0$, ta đặt $Q(x) = c$.
Thay vào (2) đi đến

$$3cx^{2n} + 3c^2x^n + c^3 - 3x^{2n} - 6cx^n - 3c^2 = c - 3c - 3.(-1)^n.x^n$$
$$\Leftrightarrow 3(c-1)x^{2n} + 3(c^2 - 2c + (-1)^n)x^n + c^3 - 3c^2 + 2c = 0 \text{ (3)}.$$

2

	Đẳng thức (3) đúng với mọi $x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} c-1=0 \\ c^2-2c+(-1)^n=0 \\ c^3-3c^2+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ n=2m\ (m\in N^*) \end{cases}$. Khi đó ta có $P(x)=x^{2m}+1$. Thử lại thỏa mãn.	
	+) Nếu $a=-1$**,** ta có $P(x)=-x^n+Q(x)$. Thay vào (1) ta được $\left(-x^n+Q(x)\right)^3-3\left(-x^n+Q(x)\right)^2=-x^{3n}+Q\left(x^3\right)-3\left(-(-x)^n+Q(-x)\right)$ $\Leftrightarrow 3x^{2n}Q(x)-3x^n\left(Q(x)\right)^2+\left(Q(x)\right)^3-3x^{2n}+6x^nQ(x)-3\left(Q(x)\right)^2$ $= Q\left(x^3\right)-3Q(-x)+3.(-1)^n.x^n$ (4). Trong (4), nếu $k>0$ thì bậc của VT là $2n + k$, bậc của VP là $h\le \max\{3k;n\}$ nên cân bằng bậc hai vế đi đến $2n+k=h\le\max\{3k;n\}$. Điều này vô lý vì $2n+k>3k$ và $2n+k>n$. Do đó $k = 0$, ta đặt $Q(x)=c$. Thay vào (4) đi đến $3cx^{2n}-3c^2x^n+c^3-3x^{2n}+6cx^n-3c^2 = c-3c+3.(-1)^n.x^n$ $\Leftrightarrow 3(c-1)x^{2n}-3\left(c^2-2c+(-1)^n\right)x^n+c^3-3c^2+2c=0$ (5) Đẳng thức (5) đúng với mọi $x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} c-1=0 \\ c^2-2c+(-1)^n=0 \\ c^3-3c^2+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ n=2m\ (m\in N^*) \end{cases}$. Khi đó ta có $P(x)=-x^{2m}+1$. Thử lại thỏa mãn. Đáp số: $P(x)=0; P(x)=1; P(x)=2; P(x)=x^{2m}+1; P(x)=-x^{2m}+1$.	**2**
Bài 4. **5điểm**	**Điều kiện cần:** Gọi $a_1,b_1;a_2,b_2;a_3,b_3;a_4,b_4;a_5,b_5$ là kích thước của 5 hình chữ nhật được chia ra, ta có: $\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,a_4,b_4,a_5,b_5\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Khi đó tổng diện tích của 5 hình chữ nhật là: S = $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5$ $= \dfrac{1}{2}\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5+b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+b_4a_4+b_5a_5\right)$.	**1**
	Theo bất đẳng thức sắp thứ tự thì ta có: $S\ge\dfrac{1}{2}(1.10+2.9+3.8+4.7+5.6+6.5+7.4+8.3+9.2+10.1)=110$ và $S\le\dfrac{1}{2}(1.1+2.2+3.3+4.4+5.5+6.6+7.7+8.8+9.9+10.10)=192,5$. Mặt khác $S=n^2$ nên ta có $110\le n^2\le 192.5 \Rightarrow n\in\{11,12,13\}$.	**1**
	Điều kiện đủ: Vì 5 hình chữ nhật được chia ra có kích thước khác nhau và đều nhỏ hơn 11 nên trên mỗi cạnh của hình vuông $n \times n$ phải có chứa cạnh của đúng hai hình chữ nhật. Như vậy có đúng 4 hình chữ nhật có các cạnh nằm trên cạnh của hình vuông còn 1 hình chữ nhật nằm hoàn toàn bên trong hình vuông.	**1**

<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td>
</td>
<td>***Với n = 12:*** Giả sử có cách chia được. Khi đó hình chữ nhật có cạnh là 1 hoặc 6 không thể nằm trên cạnh hình vuông vì cạnh hình chữ nhật còn lại là 11 hoặc 6 đều vô lý. Do đó phải có hình chữ nhật 1 × 6 và hình chữ nhật này nằm bên trong hình vuông.
Gọi a là kích thước còn lại của hình chữ nhật có cạnh 10, b là kích thước còn lại của hình chữ nhật có cạnh 2. Khi đó phải có hình chữ nhật cạnh là $12 - b$ và gọi c là kích thước còn lại, suy ra hình chữ nhật cuối có kích thước $(12 - a) \times (12 - c)$ trong đó a, b, c là các số phân biệt của tập $\{3,4,5,7,8,9\}$.</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Từ hình vẽ ta suy ra trong 3 số a, b, c có đúng một số là số chẵn (4 hoặc 8). Tính tổng diện tích 5 hình chữ nhật ta được
$$12^2 = 1.6 + 10.a + 2.b + (12-b).c + (12-a).(12-c) \Leftrightarrow (b-a)(c-2) = 6.$$
Điều này không thể nghiệm đúng được vì trong a, b, c có 1 số chẵn, 2 số lẻ nên $b-a$ và $c-2$ cùng tính chẵn lẻ. Do đó $n = 12$ không thỏa mãn</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Với n = 11 và n = 13:
Ta có các các chia như các hình sau thỏa mãn:


(n = 11)


(n = 13)
Vậy đáp số cần tìm là $n = 11$ và $n = 13$.</td>
<td>1</td>
</tr>
</table>

———————Hết———————