SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: TOÁN – Ngày thi: 15/9/2015
Thời gian làm bài: **180** phút

Bài 1. *(5 điểm)* Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn:

$$f(x^4+f(y))=y+f^4(x)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Bài 2. *(5 điểm)* Cho các số hữu tỉ a,b,c thoả mãn: $\begin{cases} a+b+c\in\mathbb{Z} \\ (2a-1)^2+(2b-1)^2+(2c-1)^2=3 \end{cases}$.

Chứng minh rằng tồn tại các nguyên *m, n* thoả mãn: $(m,n)=1$ và $abc=\dfrac{m^2}{n^3}$.

Bài 3. *(5 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (J) tiếp xúc ngoài với (O) tại D đồng thời tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{1+\cos C}{1+\cos B}$.

b) Giả sử AJ cắt (O) tại T khác A. Gọi P,Q lần lượt là các điểm di động trên cung nhỏ AB, AC của (O) sao cho PQ song song với BC. Các đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M. Gọi I,N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF, IM. Chứng minh rằng giao điểm của các đường thẳng NT và IQ luôn thuộc một đường cố định.

Câu 4. *(5 điểm)* Cho P là một đa giác lồi 2016 cạnh. Một cách chia P thành các tam giác bằng các đường chéo không cắt nhau bên trong P được gọi là một cách *chia đẹp* P.

a) Chứng minh rằng số đường chéo cần phải nối để *chia đẹp* P theo các cách khác nhau đều bằng nhau.

b) Một tam giác thu được từ phép *chia đẹp* P nói trên được gọi là một *tam giác trong* nếu cả 3 cạnh của nó đều là các đường chéo của P. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách *chia đẹp* P mà có đúng một *tam giác trong* biết rằng hai cách chia là khác nhau nếu có ít nhất một cặp tam giác không trùng nhau.

——————**HẾT**——————

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh…………………………………….Số báo danh……………

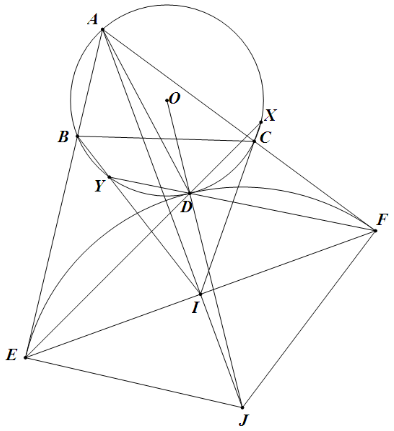
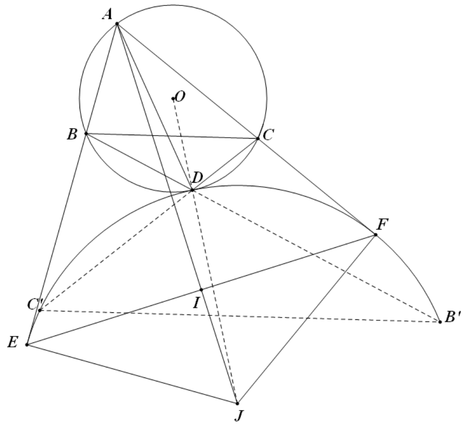
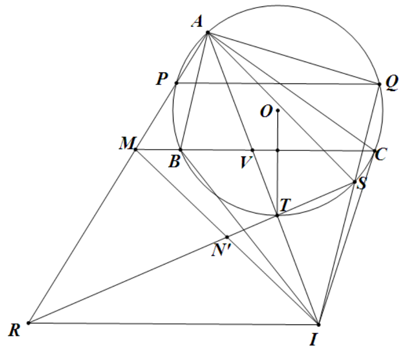
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NINH BÌNH

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: TOÁN – Ngày thi thứ hai

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 5điểm	$f(x^4+f(y))=y+f^4(x)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (1)$ Trước hết ta chứng minh: $f(0)=0$ Đặt $a=f(0)$. Cho $x=0$ ta có $f(f(y))=y+a^4\quad (2)$ Cho $y=0$ ta có $f(x^4+a)=f^4(x)\quad (3)$ Từ (2) suy ra f là song ánh, do đó tồn tại b để $f(b)=0$	**1**
	Cho $y=b$ vào (2) ta có $a=b+a^4$ Cho $x=b$ vào (2) ta có $f(b^4+a)=f^4(b)=0=f(b)$. Vì f song ánh nên $b^4+a=b$. Ta có hệ $\begin{cases} b^4+a=b \\ a^4+b=a \end{cases} \Rightarrow a^4+b^4=0 \Rightarrow a=b=0$ hay $f(0)=0$	**1**
	Do đó $f(f(y))=y; f(x^4)=f^4(x)$ $\Rightarrow f(x^4+f(y))=f(f(y))+f(x^4)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall x\in R, y\geq 0$	**1**
	Do $f(x^4)=f^4(x)\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq 0\ \forall x\geq 0$. Vì f song ánh nên $f(x)>0\ \forall x>0$. Với $x>y$ ta có $f(x)=f(x-y+y)=f(x-y)+f(y)>f(y)$ (1)	**1**
	Ta sẽ chứng minh $f(x)=x\ \forall x\in R$. Nếu $\exists x_0\in R$ sao cho $f(x_0)>x_0$ thì $x_0=f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$ (vô lý) Nếu $\exists x_0\in R$ sao cho $f(x_0)<x_0$ thì $x_0=f(f(x_0))<f(x_0)<x_0$ (vô lý) $\Rightarrow f(x))=x\ \forall x\in R$. Thử lại thấy đúng. Vậy $f(x)=x\ \forall x\in R$.	**1**
Bài 2 5điểm	Từ giả thiết suy ra $a^2+b^2+c^2=a+b+c \Rightarrow a+b+c\geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ $0\leq a+b+c\leq 3$. Vì $a+b+c\in Z$ nên $a+b+c\in\{0;1;2;3\}$	**0.5**
	Nếu $a+b+c=0$, kết hợp với giả thiết suy ra $a=b=c=0$. Lúc đó ta có $m=0;n=1$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Nếu $a+b+c=3$, kết hợp với giả thiết suy ra $a=b=c=1$. Lúc đó ta có $m=1;n=1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.	**0.5**

	Nếu $a+b+c=1$. Vì a,b,c là các số hữu tỉ nên luôn tồn tại các số $x,y,z\in Z;\ d\in N^*$ sao cho $a=\frac{x}{d};\ b=\frac{y}{d};\ c=\frac{z}{d}$. Lúc đó ta có $\begin{cases}x+y+z=d\\x^2+y^2+z^2=d^2\end{cases}\Rightarrow xy+yz+zx=0$ (1) Vì $d>0$, không mất tính tổng quát ta giả sử $z>0$	**0.5**
	Từ (1) ta có $(x+z)(y+z)=z^2=c^2d^2$ (1) lại có $x+z+y+z>0$ nên $x+z>0;\ y+z>0$ suy ra tồn tại $r,p,q\in N^*\ (p,q)=1$ thoả mãn: $\begin{cases}x+z=r.p^2\\y+z=r.q^2\end{cases}$ (2) Thay vào (1) suy ra $z=rpq$ vì $(z>0)$. Kết hợp với (2) ta có: $x=rp(p-q);\quad y=rq(q-p)$, do đó $d=r(p^2+q^2-pq)$ $\Rightarrow abc=\frac{xyz}{d^3}=\frac{p^2q^2(p-q)^2}{(p^2+q^2-pq)^3}$	**1**
	Chọn $m=pq(p-q);\ n=p^2+q^2-pq$ Ta chứng minh $(m,n)=1$ Giả sử $(m,n)=k\Rightarrow m,n\vdots k$ Vì $(p,q)=1$ nên $(p;p-q)=(q;p-q)=1$ (3) Ta có $m\vdots k\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p\vdots k\\q\vdots k\\p-q\vdots k\end{array}\right.$ - Nếu $p\vdots k\Rightarrow q^2\vdots k\Rightarrow k=1$. Vì nếu $k>1$, gọi h là ước số nguyên tố lớn nhất của k, ta có $q^2\vdots h\Rightarrow q\vdots h$, mà $p\vdots h$ suy ra vô lý. - Nếu $q\vdots k$, chứng minh tương tự suy ra k=1 - Nếu $p-q\vdots k\Rightarrow(p-q)^2-n\vdots k\Rightarrow pq\vdots k\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p\vdots k\\q\vdots k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}q\vdots k\\p\vdots k\end{array}\right.$ suy ra k = 1	**1**
	Nếu $\begin{cases}a+b+c=2\\a^2+b^2+c^2=2\end{cases}\Rightarrow ab+bc+ca=1\Rightarrow\begin{cases}(1-a)+(1-b)+(1-c)=1\\\left(2(1-a)-1\right)^2+\left(2(1-b)-1\right)^2+\left(2(1-c)-1\right)^2=3\\(1-a)(1-b)(1-c)=-abc\end{cases}$	**1**
	Tương tự trên thì tồn tại các nguyên m,n thoả mãn: $(m,n)=1$ và	**0.5**

	$(1-a)(1-b)(1-c)=\frac{m^2}{n^3}$ suy ra $abc=\frac{m^2}{(-n)^3}$. Do $(m,n)=1\Rightarrow(m,-n)=1$ suy ra đpcm.	
Bài 3a 2điểm	Giả sử vị trí các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.   **Bổ đề :** I là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC. Thật vậy, gọi X, Y lần lượt là giao điểm khác D của DE, DF với (O) và I' là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Dễ thấy $XO \parallel JE$ nên $XO\perp AB$. Suy ra X, C, I' thẳng hàng. Tương tự Y, B, I' thẳng hàng. Áp dụng Định lý Pascal cho lục giác $\begin{pmatrix} X & A & Y \\ B & D & C \end{pmatrix}$ ta có E, I', F thẳng hàng. Mặt khác AI' là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nên $I'\equiv I$ suy ra bổ đề được chứng minh.	1
	Trở lại bài toán : Ta có $AI=\frac{p}{\cos\frac{A}{2}}$ với $2p=a+b+c$ và $AE=AF=\frac{p}{\cos^2\frac{A}{2}}$. Gọi B', C' lần lượt là giao điểm của các đường thẳng DB, DC với (J), ta có $\Delta DBC\sim\Delta DB'C'(\text{g-g})\Rightarrow\frac{DB}{DC}=\frac{DB'}{DC'}=\frac{BB'}{CC'}$ Từ đó $\frac{DB}{DC}=\frac{\sqrt{BD.BB'}}{\sqrt{CD.CC'}}=\frac{BE}{CF}=\frac{AE-c}{AF-b}$. Thay $AE=AF=\frac{p}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{a+b+c}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{2bc}{b+c-a}$ vào biểu thức trên rồi biến đổi đại số ta thu được $\frac{DB}{DC}=\frac{c(a+b-c)}{b(c+a-b)}=\frac{1+\cos C}{1+\cos B}$, đpcm.	1
Bài 3b 3điểm	Giả sử vị trí các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.  	1

	Giả sử IQ cắt (O) tại S khác Q; ST lần lượt cắt các đường thẳng MI và AM tại N' và R. Ta sẽ chứng minh $N' \equiv N$. Thật vậy do tứ giác $ASIR$ nội tiếp (do $\widehat{RSI} = \widehat{TAQ} = \widehat{RAI}$) nên $\widehat{ARI} = \widehat{ASQ} = \widehat{AMC}$ hay $RI \parallel BC$.	
	Áp dụng Định lý Menelaus ta có $\frac{N'M}{N'I}.\frac{TI}{TA}.\frac{RA}{RM} = 1$. Để chứng minh $N' \equiv N$, ta sẽ chứng minh $\frac{TI}{TA} = \frac{RM}{RA}$ (1)	**1**
	Gọi $V = AT \cap BC$. Do T là tâm đường ngoại tiếp ΔIBC; $\Delta TBA \sim \Delta CVA$ nên $\frac{TI}{TA} = \frac{TB}{TA} = \frac{CV}{CA}$. Lại có $\frac{IV}{IA} = \frac{RM}{RA}$ và $\frac{CV}{CA} = \frac{IV}{IA}$ (do $\frac{CV}{IV} = \frac{CA}{IA} = \frac{\sin \widehat{AIC}}{\cos \frac{C}{2}}$) suy ra (1) đúng, do đó $N' \equiv N$. Vậy giao điểm của NT và IQ luôn di động trên một phần của đường tròn (O).	**1**
Bài 4a 2điểm	Nhận xét rằng phép *chia đẹp* P luôn tạo ra 2014 tam giác. Thật vậy, do tổng tất cả các góc của các tam giác thu được từ phép *chia đẹp* P luôn bằng tổng tất cả các góc của P nên gọi số tam giác thu được là T thì ta luôn có $T.180^\circ = (2016-2).180^\circ \Leftrightarrow T = 2014$.	**1**
	Theo Định lý về đặc số Euler của đa giác, nếu gọi C là số đường chéo cần phải nối để *chia đẹp* P ta luôn có : $2016-(2016+C)+(2014+1) = 2 \Leftrightarrow C = 2013$. Vậy số đường chéo cần phải nối để *chia đẹp* P theo các cánh khác nhau đều bằng nhau và bằng 2013.	**0.5**
Bài 4b 3điểm	Ta gọi một đa giác lồi có các đỉnh là đỉnh của P là *đa giác rìa* nếu nó có đúng 1 cạnh là đường chéo của P và các cạnh còn lại của nó là các cạnh của P. Ta định nghĩa phép *chia đẹp* một *đa giác rìa* tương tự như định nghĩa *chia đẹp* P. **Bổ đề:** Số các phép *chia đẹp* một *đa giác rìa k* đỉnh mà trong các tam giác được tạo ra không chứa *tam giác trong* của P nào là $S_k = 2^{k-3}, k \geq 4$. **Chứng minh:** Dễ thấy $S_4 = 2$. Ta sẽ chứng minh $S_k = 2S_{k-1}$. Thật vậy xét *đa giác rìa* $A_1A_2...A_k$ có k đỉnh và chứa cạnh A_1A_k là đường chéo của P. Do phép *chia đẹp* $A_1A_2...A_k$ không thu được *tam giác trong* nào nên tam giác chứa cạnh A_1A_k phải có đỉnh A_2 hoặc A_{k-1} (vì nếu ngược lại thì nó chứa *tam giác trong*). Khi đó các đa giác $A_1A_2...A_{k-1}$ và $A_2...A_{k-1}A_k$ là các *đa giác rìa* $k-1$ đỉnh, do vậy $S_k = 2S_{k-1}$.	**1.5**
	Xét phép *chia đẹp* P có chứa tam giác trong duy nhất là ABC. Khi đó, các cạnh AB, BC, CA trở thành các cạnh của 3 đa giác rìa có số đỉnh lần lượt là $a+2$, $b+2$ và $c+2$ trong đó $a,b,c \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $$a+b+c+3 = 2016 \Leftrightarrow a+b+c = 2013$$ Số nghiệm $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ của phương trình này là C_{2012}^2.	**1**
	Lấy A cố định, khi đó có C_{2012}^2 cách chọn *tam giác trong* ABC. Khi A chạy trên 2016 đỉnh thì mỗi tam giác được đếm 3 lần nên số cách chọn *tam giác trong* là $\frac{2016}{3}C_{2012}^2 = 672C_{2012}^2$. Với mỗi cách chọn tam giác trong ABC đó, theo bổ đề, số phép *chia đẹp* P nhận ABC làm *tam giác trong* duy nhất là $2^{a-1}.2^{b-1}.2^{c-1} = 2^{2010}$. Tóm lại đáp số của bài toán là $S = 672.2^{2010}.C_{2012}^2$.	**1**