ĐỀ THI VMEO IV THÁNG 10

Diễn đàn Toán học

Ngày 2 tháng 10 năm 2015

1 CẤP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài toán 1.1. *Cho α là số thực thỏa mãn $\alpha^3 = \alpha + 1$. Hãy xác định tất cả các bộ tứ hữu tỉ (a, b, c, d) thỏa mãn*

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = \sqrt{d}$$

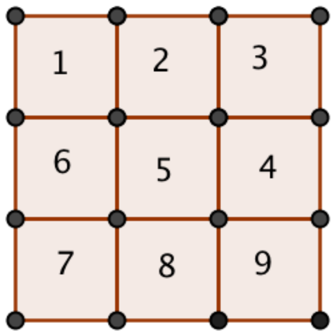
Bài toán 1.2. *Cho tam giác ABC có góc A tù và đường cao AH với H thuộc BC. Trên CA, AB lấy các điểm E, F sao cho $\angle BEH = \angle C$ và $\angle CFH = \angle B$. Gọi BE cắt CF tại D. Chứng minh rằng $DE = DF$.* $\triangle$

Bài toán 1.3. *Tìm tất cả các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3(ab + bc + ca)$.* $\triangle$

Bài toán 1.4. *Trong Vượt ngục 4, Michael Scofield phải đột nhập vào Tổ Chức để lấy mảnh cuối cùng của Scylla. Ở đây, anh bắt gặp một loại mã hoá bảo vệ Scylla khỏi bị đánh cắp. Loại mã này yêu cầu chọn ra tất cả các số thuộc bảng mã hoá 2015×2015 sao cho số này thoả mãn các điều kiện sau:*

- *Số nằm liền trên số này trong bảng mã hoá phải chia 2 dư 1.*
- *Số nằm bên phải số này trong bảng mã hoá phải chia 3 dư 2.*
- *Số nằm liền dưới số này trong bảng mã hoá phải chia 4 dư 3.*
- *Số nằm bên trái số này trong bảng mã hoá phải chia 5 dư 4.*

Hỏi Scofield đã phải chọn ra bao nhiêu số như thế ?
Ở đây, bảng mã hoá $n \times n$ là bảng gồm n^2 ô vuông, mỗi ô được đánh số từ 1 đến n^2. Số $1, 2, \cdots, n$ được đánh vào hàng thứ nhất theo thứ tự tăng dần. Số $n + 1, \cdots, 2n$ được đánh vào hàng thứ hai theo thứ tự giảm dần, ...
Ví dụ, bảng mã hoá 3×3 có dạng:



$\triangle$

Hết đề cấp THCS

2 CẤP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài toán 2.1. *Với n là một số nguyên dương, dãy số a_n được xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - \sqrt{2} \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy số S_n xác định bởi $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ △

Bài toán 2.2. *Cho tam giác ABC có P, Q là hai điểm đẳng giác nằm bên trong. Gọi AP, AQ lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QBC và PBC tại M, N (M, N nằm trong tam giác ABC).*

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (I).

b) Gọi MN cắt PQ tại J. Chứng minh rằng đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q thay đổi.

Chú thích: *P, Q được gọi là hai điểm đẳng giác của tam giác ABC nếu các đường thẳng AP, BP, CP lần lượt đối xứng với đường thẳng AQ, BQ, CQ qua các đường phân giác trong góc A, B, C của tam giác ABC.* △

Bài toán 2.3. *Cho trước số nguyên dương k. Tìm điều kiện của số nguyên dương m theo k sao cho tồn tại duy nhất một số nguyên dương n thoả mãn $n^m \mid 5^{n^k} + 1$.* △

Bài toán 2.4. *Cho n là một số nguyên dương. Xếp n bạn học sinh $A_1, A_2, .., A_n$ cách đều nhau trên một vòng tròn. Phát cho họ mỗi người một số kẹo với tổng là $m \geq n$ cây kẹo. Ta gọi một cấu hình là "cân bằng" nếu với mỗi bạn học sinh A_i bất kì, luôn tồn tại ít nhất một đa giác đều nhận A_i làm đỉnh, và tất cả các bạn học sinh là đỉnh của đa giác này đều có số kẹo bằng nhau.*

a) Với n cho trước tìm điều kiện tối thiểu của m để có thể phát kẹo cho các học sinh tạo ra cấu hình "cân bằng".

b) Giả sử các bạn học sinh có thể thực hiện các bước chuyền kẹo, mỗi bước một bạn có thể chuyền một viên kẹo cho một bạn kế bên (trái hoặc phải tùy ý) với điều kiện người nhận kẹo phải có ít kẹo hơn người cho. Chứng minh rằng nếu n là tích của nhiều nhất 2 số nguyên tố và m tương ứng thỏa mãn câu a, khi đó với bất kì cách phát kẹo ban đầu như thế nào, ta luôn có thể đưa về cấu hình "cân bằng" sau hữu hạn lần chuyển kẹo. △

Hết đề cấp THPT