LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI VMO 2016

Trần Nam Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quang Hùng – Lê Phúc Lữ

1. Đề thi

1.1. Ngày thi thứ nhất (06/01/2016)

Bài 1 (5.0 *điểm*)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x - y + z^2 = 3 \\ x^2 - y^2 - 2z = -1 \\ 6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2 = 0 \end{cases} \qquad (x,\ y,\ z \in \mathbb{R}).$$

Bài 2 (5.0 *điểm*)**.**

a) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+n+1)$, với $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng chỉ có hữu hạn số n sao cho $\{a_n\} < \frac{1}{2}$.

b) Cho dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = \ln(2n^2+1) + \ln(n^2+n+1)$, với $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số n sao cho $\{b_n\} < \frac{1}{2016}$.

Bài 3 (5.0 *điểm*)**.** Cho tam giác ABC có B, C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi D là trung điểm của BC và E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên các đường thẳng AB, AC.

a) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. EF cắt AO và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN đi qua một điểm cố định.

b) Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại E, F cắt nhau tại T. Chứng minh rằng T thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 4 (5.0 *điểm*)**.** Người ta trồng hai loại cây khác nhau trên một miếng đất hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông (mỗi ô trồng một cây). Một cách trồng cây được gọi là *ấn tượng* nếu như:

i) Số lượng cây được trồng của hai loại cây bằng nhau;

ii) Số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi cột không nhỏ hơn một nửa số ô của cột đó.

a) Hãy chỉ ra một cách trồng cây ấn tượng khi $m = n = 2016$.

b) Chứng minh nếu có một cách trồng cây ấn tượng thì cả m và n đều là bội của 4.

1.2. Ngày thi thứ hai (07/01/2016)

Bài 5 (6.0 *điểm*). Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

i) $f(1) = 2016$;

ii) $f\big(x + y + f(y)\big) = f(x) + ay$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 6 (7.0 *điểm*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) (với tâm O) có các góc ở đỉnh B và C đều nhọn. Lấy điểm M trên cung BC không chứa A sao cho AM không vuông góc với BC. AM cắt trung trực của BC tại T. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOT cắt (O) tại N $(N \neq A)$.

a) Chứng minh rằng $\angle BAM = \angle CAN$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và G là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. AI, MI, NI cắt (O) lần lượt tại D, E, F. Gọi P và Q tương ứng là giao điểm của DF với AM và DE với AN. Đường tròn đi qua P và tiếp xúc với AD tại I cắt DF tại H $(H \neq D)$, đường tròn đi qua Q và tiếp xúc với AD tại I cắt DE tại K $(K \neq D)$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác GHK tiếp xúc với BC.

Bài 7 (7.0 *điểm*). Số nguyên dương n được gọi là số hoàn chỉnh nếu n bằng tổng các ước số dương của nó (không kể chính nó).

a) Chứng minh rằng nếu n là số hoàn chỉnh lẻ thì nó có dạng

$$n = p^s m^2,$$

trong đó p là số nguyên tố có dạng $4k + 1$, s là số nguyên dương có dạng $4h + 1$ và m là số nguyên dương không chia hết cho p.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$ sao cho $n - 1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ đều là các số hoàn chỉnh.

2. Bình luận chung

Nếu chưa nói đến chuyện đẹp xấu, hay dở thì đề năm nay có vẻ vừa sức hơn đối với các thí sinh, đặc biệt là cấu trúc có vẻ khá đẹp với một bài giải tích, một bài tổ hợp, một bài số học, hai bài đại số và hai bài hình học.

Ngày thứ nhất có hai bài dễ là bài 1 và bài 3. Bài 2 cũng có thể coi là bài dễ nhưng trên thực tế thì nhiều thí sinh lại gặp khó ở câu 2b). Cách phát biểu hơi trệch đi một chút như thế đã làm khó những thí sinh không có nền tảng tốt về lý luận. Nếu nhìn kỹ, ta sẽ thấy rằng kết luận của bài toán chẳng qua là hệ quả của ba sự kiện:

1) $\lim b_n = +\infty$;

2) dãy b_n tăng;

3) $\lim(b_{n+1} - b_n) = 0$.

Tất cả các dãy số thỏa mãn ba điều kiện này đều có tính chất như vậy và số 2016 ở đây chỉ là số năm cho nó đẹp.

Trên phông nền ba bài toán dễ như vậy thì việc đặt một bài tổ hợp khó vào cũng có lý. Và cái hay của bài này là dù khó nhưng vẫn có chỗ để thí sinh kiếm điểm. Cụ thể là thí sinh có thể làm câu a) và qua đó chứng minh phần điều kiện đủ của câu b). Chúng tôi nghĩ rằng trong áp lực phòng thi và cũng phải tốn đôi chút công sức cho 3 bài đầu, số thí sinh làm trọn vẹn bài 4 là không nhiều, thậm chí có thể không có. Tuy nhiên, các bạn có thể kiếm điểm ở một số ý lặt vặt khác (ví dụ chứng minh m, n chẵn).

Ý tưởng chính khi giải bài này là dùng đánh giá bất đẳng thức và nhận xét hiển nhiên sau: Nếu trên một hàng có n cây và số cây loại A (gọi là a) nhiều hơn số cây loại B (gọi là b) thì $a \geq \frac{3n}{4}$ và $b \leq \frac{n}{4}$. Chặt chẽ hơn, nếu $n = 4k + r$ (với $r = 0, 1, 2, 3$) thì $a \geq 3k + r$ và $b \leq k$.

Bây giờ bình luận chi tiết hơn một chút về chất lượng của các bài toán của ngày 1. Thực tế là ngoài sự hài lòng về độ khó của các bài toán ngày 1, ta có thể đánh giá là các bài toán của ngày 1, trừ bài 4 đều chưa được đẹp và hay.

- **Bài 1** rõ ràng là một bài toán "ra cho có tụ", không có một ý tưởng gì mới ngoài cái ý tưởng vụn vặt là cộng trừ đại số để ra phương trình hệ quả $(x-1)^2 = (z-1)^2$, một tình huống được "cài đặt" một cách chủ quan. Những kiểu bài như thế sẽ không giúp ích gì cho học sinh trong việc học các giải hệ phương trình "thực thụ".

- **Bài 2** cũng có thú vị một chút về mặt học thuật, cụ thể là đặt ra một tình huống lạ cho học sinh (và quả là có khá nhiều bạn bị "gãy" ở câu này). Nhưng cách đặt vấn đề thực sự là không đẹp, khiên cưỡng (đặc biệt là ở câu a). Việc phần giải tích cứ loay hoay mãi ở chủ đề giới hạn dãy số khiến bộ phận ra đề có vẻ như quá bí ý tưởng. Theo chúng tôi, chúng ta nên mạnh dạn mở rộng chủ đề để có thể giới thiệu những ứng dụng đẹp đẽ khác của giải tích (như tính liên tục, đạo hàm và cực trị, đa thức và nghiệm, tính lồi lõm...).

- **Bài 3** thuộc dạng bài ta không khen được nhưng cũng khó chê. Có thể là việc ra một bài hình hơi dễ như vậy sẽ làm cho các đội mạnh về hình không hài lòng lắm vì không có lợi thế gì nhiều hơn so với các đội khác nhưng xét trong tình hình chung hiện nay, giải pháp ra một đề toán như vậy cũng là hợp lý. Vấn đề này thực ra tại các kỳ IMO cũng thường xuyên gặp phải (có những bài hình phải nói là quá dễ, ví dụ IMO 2003 bài 4 hay IMO 2007 bài 4, nhưng không có mấy bài đó thì học sinh một số nước kiếm đâu ra điểm để đoạt giải) và chúng ta phải đánh giá vấn đề dưới nhiều góc nhìn, từ nhiều đối tượng.

- **Bài 4** là một kết quả đẹp đẽ và bất ngờ. Không ngờ là từ một điều kiện xem chừng lỏng lẻo như vậy lại dẫn đến một cấu trúc rất hài hòa và đối xứng. Quả là rất ấn tượng. Cách phát biểu của bài toán cũng giúp thí sinh có cơ hội đào bới, kiếm điểm ở bài này. Tuy nhiên, như chúng tôi đã nói ở trên, có lẽ thời gian hạn hẹp sẽ là yếu tố quan trọng khiến các thí sinh giỏi nhất vẫn không thể kịp xử lý bài toán này. Nhân việc này chúng tôi kiến nghị ta nên học các nước và IMO, tăng thời lượng một buổi thi lên 270 phút, từ đó có điều kiện tăng chất lượng các bài toán.

Ngày thứ hai có ba bài toán về cơ bản là ngang nhau về độ khó nên thí sinh sẽ chọn giải theo sở trường của mình.

- Có thể là **bài 5** sẽ dễ hơn một chút do đây là một chủ đề quen thuộc và kỹ thuật sử dụng trong lời giải cũng quen thuộc với các phép thế và một số nhận xét cơ bản về f như nếu

$a \neq 0$ thì f là đơn ánh và toàn ánh. Bài toán này có cách phát biểu và cả dạng phương trình hàm hơi giống bài Vietnam TST 2004:

Tìm tất cả các số thực a sao cho phương trình hàm $f\left(x^2 + y + f(y)\right) = f^2(x) + ay$ có nghiệm hàm duy nhất $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tuy nhiên dễ hơn nhiều. Theo chúng tôi bài phương trình hàm này đặt ở vị trí bài đầu của ngày 2 là hợp lý.

- **Bài 6** là bài hình học tuy khó hơn bài 2 nhưng cũng không quá khó. Câu a) là một bài tập cơ bản có thể làm nhanh gọn bằng phép biến đổi góc. Câu b) tuy được phát biểu rắc rối nhưng lại có nhiều cách tiếp cận như dùng định lý Pascal, phép vị tự, phép nghịch đảo...
- **Bài 7** đề cập đến một vấn đề kinh điển trong số học là vấn đề về số hoàn hảo. Có hai định lý kinh điển về số hoàn hảo, đều gắn liền với tên tuổi của Euler, đó là:

Định lý 1 (Euclide – Euler). *Nếu n là số hoàn hảo chẵn thì $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$, trong đó k là số nguyên dương sao cho $2^k - 1$ là số nguyên tố.*

Định lý 2 (Euler). *Nếu n là số hoàn hảo lẻ thì n phải có dạng $n = p^{4t+1}m^2$, trong đó p là số nguyên tố dạng $4k + 1$, còn m là số nguyên dương không chia hết cho p.*

Cả hai định lý này đều có thể chứng minh khá ngắn gọn dựa vào định nghĩa số hoàn hảo, định lý cơ bản của số học và tính chất của hàm $\sigma(n)$. Các kết quả này có trong hầu hết các sách giáo khoa về lý thuyết số hay các bài viết về số hoàn hảo. Điều đáng chú ý là dù đến nay, với định lý thứ nhất nói trên, tất cả các số hoàn hảo chẵn đã được mô tả (và chúng liên quan đến số nguyên tố Mersenne) thì ta chưa biết gì về số hoàn hảo lẻ. Hiện nay chưa tìm được một số hoàn hảo lẻ nào và cũng chưa chứng minh được là chúng không tồn tại.

Định lý thứ hai chính là câu a) trong bài 7 của VMO 2016. Có lẽ câu này được ra với hàm ý gợi ý cho câu b). Sơ đồ chứng minh gồm các ý sau: Vì n lẻ và $\sigma(n) = 2n$ nên $\sigma(n)$ là một số chẵn và không chia hết cho 4. Từ đó, do $\sigma(p^k)$ sẽ lẻ nếu k chẵn và chẵn nếu k lẻ nên n phải có dạng $p^s m^2$ với s lẻ và m không chia hết cho p. Tiếp theo cần chứng minh $p \equiv 1 \pmod 4$, sử dụng $p + 1 \mid \sigma(p^s)$ với s lẻ, cuối cùng là chứng minh $s \equiv 1 \pmod 4$, sử dụng $\sigma(p^s) \equiv s + 1 \pmod 4$ khi $p \equiv 1 \pmod 4$.

Định lý thứ nhất cũng có thể chứng minh ngắn gọn như sau: Giả sử $n = 2^k m$ với m là số lẻ. Từ tính nhân tính ta có $\sigma(n) = (2^{k+1} - 1)\sigma(m) = 2^{k+1}m$. Từ đây suy ra $m = (2^{k+1} - 1)M$. Thay ngược lại phương trình, ta được $\sigma(m) = 2^{k+1}M$. Tiếp theo ta chứng minh $M = 1$ và m là số nguyên tố bằng phản chứng. Vì nếu ngược lại ta sẽ có $\sigma(m) > m + M$ và từ đó $m + M < \sigma(m) = 2^{k+1}M$, suy ra $m < (2^{k+1} - 1)M$, mâu thuẫn với sự kiện $m = (2^{k+1} - 1)M$.

Bây giờ câu b), nội dung chính của bài toán 7, có thể xử lý được không mấy khó khăn nếu dùng hai kết quả trên, và nghiệm duy nhất của bài toán là $n = 7$ ứng với hai số hoàn hảo đầu tiên là 6 và 28.

Điều thú vị là số 2016 cũng là số có dạng $2^{k-1}(2^k - 1)$ với $k = 6$. Điều đáng tiếc là $2^6 - 1 = 63$ không là số nguyên tố nên 2016 không phải là số hoàn hảo. Nhưng cũng có thể giải thích vui rằng đây là lý do để bài toán về số hoàn hảo, một chủ đề bị lãng quên lại được chọn trong đề thi năm nay.

Tóm tắt lại đề thi năm nay về cơ bản là tương đối ổn, cấu trúc phân môn là đẹp, không có bài nào quá khó hay phát biểu rối rắm, đặc biệt bài nào cũng có ý để kiếm điểm. Cũng vì thế mà năm nay công tác chấm thi sẽ vất vả hơn và cần phải được tổ chức cẩn thận hơn. Về chất lượng đề bài thì cũng có một số bài không được đẹp, đa số ở mức độ "tạm được" và đặc biệt có bài số 4 là đẹp đẽ và thú vị nhất. Có vẻ như các chủ đề về giải tích, số học và thậm chí là hình học và đại số đã cạn kiệt nên tính mới trong các phần này không nhiều.

Với những đánh giá về độ khó dễ của đề thi năm nay và qua tham khảo tình hình bài làm của một số đội tuyển, chúng tôi cho rằng năm nay sẽ có vài giải nhất chứ không chỉ là 1 như năm ngoái. Điểm chuẩn của các giải dự kiến cũng sẽ cao hơn năm ngoái và chúng tôi mạo muội đưa ra một bộ cut-off tròn trịa thế này 15-20-25-30. Hai bài toán "phải" làm được là 1 và 3, tiếp theo là các ý 2a, 4a, 5, 6a (dành cho giải khuyến khích và giải ba), 2b, 6b (giải nhì) và 7a, 7b, 4b (giải nhất).

3. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (5.0 *điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x - y + z^2 = 3 \\ x^2 - y^2 - 2z = -1 \\ 6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2 = 0 \end{cases} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Từ giả thiết, suy ra

$$(6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2) - 3(x^2 - y^2 - 2z + 1) - (6x - y + z^2 - 3) = 0.$$

Một cách tương đương, ta có $(x - z)(x + z - 2) = 0$. Từ đó suy ra $x = z$ hoặc $x + z = 2$.

- **Trường hợp 1: $x = z$.** Khi đó, hệ phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} x^2 + 6x - y = 3 \\ x^2 - 2x - y^2 = -1 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai, ta suy ra $y^2 = (x-1)^2$, tức $y = \pm(x-1)$. Thay trở lại phương trình đầu, ta dễ dàng tìm được các nghiệm (x, y, z) của hệ là

$$\left(\frac{-5-\sqrt{33}}{2}, \frac{-7-\sqrt{33}}{2}, \frac{-5-\sqrt{33}}{2}\right), \left(\frac{-5+\sqrt{33}}{2}, \frac{-7+\sqrt{33}}{2}, \frac{-5+\sqrt{33}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{-7-\sqrt{65}}{2}, \frac{9+\sqrt{65}}{2}, \frac{-7-\sqrt{65}}{2}\right), \left(\frac{-7+\sqrt{65}}{2}, \frac{9-\sqrt{65}}{2}, \frac{-7+\sqrt{65}}{2}\right).$$

- **Trường hợp 2: $x + z = 2$.** Thay $z = 2 - x$ vào, ta viết được hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - y = 0 \\ x^2 + 2x - y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Trừ tương ứng hai vế hai phương trình, ta được $y^2 - y + 4 = 0$. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra. Do đó, trường hợp này hệ vô nghiệm. □

Bình luận. Đây là kiểu bài quen thuộc của phương pháp cộng đại số. Điểm mấu chốt ở đây là lựa chọn các phép ghép tương ứng thật thích hợp để tìm quan hệ giữa các ẩn với nhau. Kiểu bài này đã từng xuất hiện nhiều lần trong các kỳ thi VMO trước đó:

1. (VMO, 2004-A) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}$$

2. (VMO, 2004-B) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

3. (VMO, 2010) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

4. (VMO, 2007) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases}$$

Có lẽ bài này được ra với mục đích "cho điểm" để khích lệ làm tăng thêm sự tự tin cho các thí sinh khi thử sức các bài phía sau. Tuy nhiên, những kiểu bài như thế này bản chất của chúng mang tính "gượng gạo", thiếu sự tự nhiên vì người ra đề thường phải xuất phát từ một đẳng thức liên hệ nào đó rồi đi ngược lên để ra bài toán. Mẹo càng khó thì bài toán càng khó nhưng lại không mang nhiều ý nghĩa khi giải. Thiết nghĩ những kiểu bài này nên hạn chế xuất hiện trong các kỳ thi Olympic chọn học sinh giỏi thì hơn.

Bài 2 (5.0 *điểm*).

a) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+n+1)$, với $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng chỉ có hữu hạn số n sao cho $\{a_n\} < \frac{1}{2}$.

b) Cho dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = \ln(2n^2+1) + \ln(n^2+n+1)$, với $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số n sao cho $\{b_n\} < \frac{1}{2016}$.

Lời giải. **a)** Dễ thấy $1 \le \frac{2n^2+1}{n^2+n+1} < 2$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Từ đó suy ra $0 \le a_n < \ln 2 < 1$ và $\lfloor a_n \rfloor = 0$. Với kết quả này, ta có $\{a_n\} = a_n$ và
$$\lim\{a_n\} = \lim a_n = \lim \ln \frac{2n^2+1}{n^2+n+1} = \ln 2.$$

Do đó, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ để $\{a_n\} > \ln 2 - \frac{1}{1992}$ với mọi $n \geq n_0$. Bây giờ, nếu có vô hạn số n để $\{a_n\} < \frac{1}{2}$, ta chọn $n_1 > n_0$ là một trong các số đó. Khi đó, theo các lý luận ở trên, ta có

$$\frac{1}{2} > \{a_{n_1}\} > \ln 2 - \frac{1}{1992},$$

hay

$$\frac{1}{1992} > \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Mâu thuẫn nhận được cho ta kết quả cần chứng minh.

b) Dễ thấy (b_n) tăng và $\lim b_n = +\infty$. Ngoài ra, ta cũng có

$$\lim(b_n - b_{n-1}) = \lim \ln \frac{(2n^2+1)(n^2+n+1)}{(2n^2-4n+3)(n^2-n+1)} = 0.$$

Trở lại bài toán, giả sử tồn tại hữu hạn n để $\{b_n\} < \frac{1}{2016}$. Khi đó, ta thấy tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ để

$$\{b_n\} \geq \frac{1}{2016}$$

với mọi $n \geq n_0$. Do $\lim(b_n - b_{n-1}) = 0$ nên tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn để

$$b_n - b_{n-1} < \frac{1}{2016}$$

với mọi $n \geq n_1$. Vì (b_n) tăng và dần về vô hạn nên ta thấy tồn tại vô số các số $n > \max\{n_0, n_1\}$ để $\lfloor b_n \rfloor - \lfloor b_{n-1} \rfloor = 1$. Xét các số n như thế, từ bất đẳng thức ở trên, ta suy ra

$$\lfloor b_n \rfloor - \lfloor b_{n-1} \lfloor + \{b_n\} - \{b_{n-1}\} < \frac{1}{2016},$$

hay

$$\{b_{n-1}\} > \{b_n\} + \frac{2015}{2016}.$$

Do $\{b_n\} \geq \frac{1}{2016}$ nên $\{b_{n-1}\} > 1$. Mâu thuẫn nhận được cho ta điều phải chứng minh. □

Bình luận. Bài toán này có cách phát biểu thú vị về tính chất của phần lẻ nhưng bản chất của nó vẫn là một bài toán về giới hạn dãy số. Tuy nhiên, có vẻ vì cách phát biểu lạ lẫm của nó nên ý b) đã gây khó khăn cho nhiều bạn thí sinh trong kỳ thi. Điểm mấu chốt của bài toán là để ý đến $\lim(b_{n+1} - b_n)$. Đây là một kỹ năng quan trọng cần có trong xử lý các bạn toán về giới hạn dãy số, đặc biệt là các bài toán liên quan đến định lý Stolz và trung bình Cesaro.

Xin nêu ra ở đây một số ví dụ:

1. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_0 = 1$ và $a_n = \sin a_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$. Xét dãy số (b_n) được xác định bởi $b_n = na_n^2$. Tìm $\lim b_n$.

2. Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ với mọi n nguyên dương. Tìm $\lim \frac{a_n}{n}$.

3. Cho dãy số thực (x_n) thỏa mãn $\lim x_n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = 1$. Chứng minh rằng

$$\lim \sqrt[3]{3n}x_n = 1.$$

Bài 3 (5.0 *điểm*). Cho tam giác ABC có B, C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi D là trung điểm của BC và E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên các đường thẳng AB, AC.

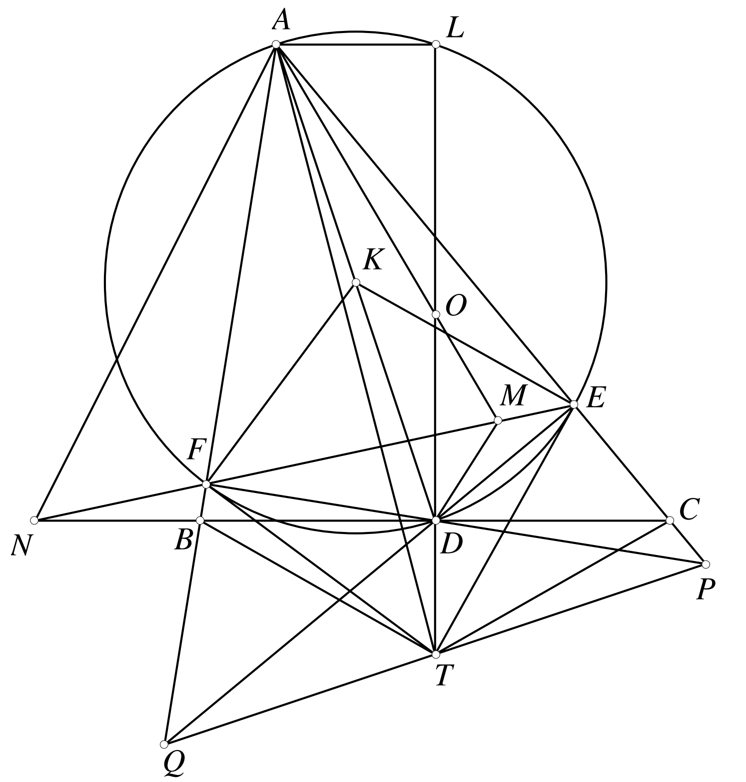
a) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AO và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN đi qua một điểm cố định.

b) Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại E, F cắt nhau tại T. Chứng minh rằng T thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải. a) Giả sử $AB < AC$, trường hợp còn lại ta làm tương tự. Khi đó N thuộc tia đối tia BC. Từ đó chú ý tứ giác $AEDF$ nội tiếp và $\angle OAC = 90^\circ - \angle ABC$. Ta có

$$\angle AMN = \angle MAE + \angle MEA = 90^\circ - \angle ABC + \angle ADF = \angle BDF + \angle ADF = \angle NDA,$$

suy ra tứ giác $AMDN$ nội tiếp. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN đi qua D cố định.



b) Xin giới thiệu hai cách chứng minh sau đây:

Cách 1. Gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF thì AD là đường kính của (K). Lấy L thuộc (K) sao cho $DL \perp BC$ thì $AL \perp DL$ nên $AL \parallel BC$. D lại là trung điểm BC nên chùm $A(BC, DL)$ điều hòa. Chiếu chùm này lên đường tròn (K) ta suy ra hàng (EF, DL) điều hòa hay tứ giác $LEDF$ điều hòa, điều này có nghĩa là DL đi qua T là giao các tiếp tuyến tại E, F của K. Dễ thấy DL là trung trực BC nên T thuộc trung trực BC cố định.

Cách 2. Gọi DF, DE lần lượt cắt CA, AB tại P, Q. Ta thấy D là trực tâm tam giác APQ. Dễ thấy các tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF đi qua trung điểm PQ

nên T là trung điểm PQ và cũng là tâm ngoại tiếp tứ giác $PEFQ$. Vì D là trung điểm PQ, áp dụng bài toán con bướm đảo cho tứ giác $PEFQ$ với tâm T ngoại tiếp ta suy ra $TD \perp BC$, vậy T thuộc trung trực BC cố định. □

Bình luận. Bài toán này không mới và hai câu a), b) hầu như không liên quan tới nhau. Câu a) nếu không sử dụng góc định hướng thì cần xét ba trường hợp $AB < AC$, $AB = AC$ và $AB > AC$. Tuy nhiên trên thực tế đề bài cũng chưa thật chặt chẽ khi không có câu "Giả sử EF cắt BC". Câu a) cũng có những phát triển và phát biểu cách khác thú vị hơn.

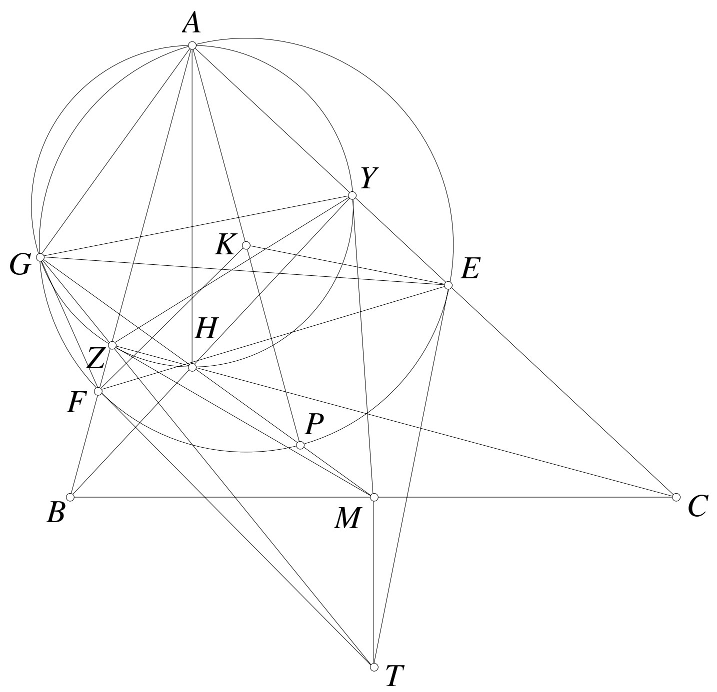
Câu b) là một bài toán cũ đã xuất hiện trong cuộc thi Kolmogorov của Nga xem [1]. Câu b) cũng có nhiều phát triển khác thú vị hơn các bạn có thể thấy trong [2]. Cách giải thứ nhất ở trên sử dụng tính chất cơ bản của hàng điểm điều hòa và khi chiếu lên đường tròn ta có tứ giác điều hòa. Đây là một lời giải khá đặc trưng cho bài toán, cách thứ hai sử dụng bài toán con bướm đảo làm bổ đề, đó cũng là cách tiếp cận ngắn gọn và dễ hiểu, phù hợp với các lớp THCS. Một số lời giải thuần túy hình học khác các bạn có thể thấy trong [1].

Các bạn có thể làm một số bài toán khác sau để luyện tập về hai cấu hình của bài này.

Bài 1. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. AP cắt BC tại D. EF cắt BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADN cắt EF tại M khác N. Chứng minh rằng M luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Một cách giải khác nữa cho câu b) là dùng phép đồng dạng, các bạn có thể thấy điều đó thể hiện qua lời giải bài toán tổng quát sau, tham khảo [2].

Bài 1. Cho tam giác ABC, trực tâm H và M là trung điểm BC. P là một điểm thuộc đường thẳng HM. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC.



Lời giải. Gọi BY, CZ là đường cao của tam giác ABC dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ đi qua H. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt (K) tại G khác A. Ta dễ thấy $HG \perp GA \perp PG$ từ đó P, H, G thẳng hàng. Ta cũng dễ thấy $\triangle GYE \sim \triangle GZF$ suy ra

$\triangle GYZ \sim \triangle GEF$. Dễ thấy M là giao hai tiếp tuyến tại Y, Z của đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ. Gọi hai tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Từ $\triangle GYZ \sim \triangle GEF$, suy ra $\triangle GFT \sim \triangle GZM$ hay $\triangle GZF \sim \triangle GMT$, suy ra

$$\angle GMT = \angle GZF = 180^\circ - \angle GZA = 180^\circ - \angle GHA = \angle AHP.$$

Do đó $TM \parallel AH \perp BC$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 3. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trên trung trực BC. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TB = TC$ khi và chỉ khi P là trung điểm BC.

Một bài toán rất đẹp và nhiều ứng dụng liên quan tới cấu hình này chính là bài toán thi vô địch Nga năm 2015:

Bài 4. Cho tam giác ABC đường cao AH và trung tuyến AD. Các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho $DE \perp AB$ và $DF \perp AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt BC tại K khác D. Chứng minh rằng D là trung điểm HK.

Nguồn trích dẫn của các bài toán đã nêu trong phần bình luận

[1] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h16779

[2] http://analgeomatica.blogspot.com/2014/06/ve-mot-bai-toan-hay-tren-thtt.html

Bài 4 (5.0 *điểm*). Người ta trồng hai loại cây khác nhau trên một miếng đất hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông (mỗi ô trồng một cây). Một cách trồng cây được gọi là *ấn tượng* nếu như:

i) Số lượng cây được trồng của hai loại cây bằng nhau;

ii) Số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi cột không nhỏ hơn một nửa số ô của cột đó.

a) Hãy chỉ ra một cách trồng cây ấn tượng khi $m = n = 2016$.

b) Chứng minh nếu có một cách trồng cây ấn tượng thì cả m và n đều là bội của 4.

Lời giải. Để thuận tiện trong lập luận, ta quy ước gọi hai loại cây là: cây xanh và cây đỏ. Ngoài ra, ký hiệu miếng đất (bảng) $a \times b$ là một hình chữ nhật có a hàng và b cột.

a) Câu này cũng là phần "khi" của câu hỏi trong câu b (điều kiện đủ). Xét cách trồng cây cho miếng đất 4×4 như sau:

A	A	A	B
A	A	B	A
A	B	B	B
B	A	B	B

Dễ thấy cách trồng này là ấn tượng. Tiếp theo, ta ghép các miếng đất 4×4 này lại tạo thành miếng đất lớn hơn có kích thước dạng $4a \times 4b$. Chẳng hạn trong hình bên dưới là kích thước 8×8:

A	A	A	B	A	A	A	B
A	A	B	A	A	A	B	A
A	B	B	B	A	B	B	B
B	A	B	B	B	A	B	B
A	A	A	B	A	A	A	B
A	A	B	A	A	A	B	A
A	B	B	B	A	B	B	B
B	A	B	B	B	A	B	B

Rõ ràng, ta thấy rằng:

- Vì tổng số cây trong các miếng đất nhỏ 4×4 là bằng nhau nên tổng số cây hai loại trên miếng đất ghép được vẫn bằng nhau.
- Chênh lệch giữa hai loại cây ở tất cả các hàng và cột vẫn đúng bằng nửa kích thước hàng, cột tương ứng.

Từ đó suy ra muốn có một cách trồng ấn tượng cho miếng đất 2016×2016, ta chỉ cần ghép 502^2 miếng đất ấn tượng 4×4 ở trên lại là được.

b) Xét miếng đất có kích thước $m \times n$ và giả sử có cách trồng cây ấn tượng trên đó. Ta sẽ chứng minh rằng m và n đều chia hết cho 4.

Giả sử ngược lại, có một trong hai số m, n không chia hết cho 4, chẳng hạn $m = 4k + r$ với $r \in \{1, 2, 3\}$ và $k \in \mathbb{N}$. Ta quy ước gọi:

- Một cột là xanh nếu trên cột đó số cây xanh nhiều hơn số cây đỏ.
- Một cột là đỏ trong trường hợp ngược lại.

Gọi x, y lần lượt là số cây xanh, đỏ trong cột xanh, ta thấy rằng:

$$\begin{cases} x + y = 4k + r \\ x - y \geq 2k + 2 \end{cases} \text{nếu } r = 3 \text{ và } \begin{cases} x + y = 4k + r \\ x - y \geq 2k \end{cases} \text{nếu } r = 1 \text{ hoặc } 2.$$

Từ đó dễ dàng suy ra $x \geq 3k + r$ và $y \leq k$. Tương tự, hàng xanh chứa tối thiểu $\frac{3n}{4}$ cây xanh, hàng đỏ chứa tối đa $\frac{n}{4}$ cây xanh.

Không mất tính tổng quát, giả sử có ít nhất $\frac{n}{2}$ cột xanh (trường hợp có ít nhất $\frac{n}{2}$ cột đỏ giải quyết tương tự) và xét miếng đất mới chỉ gồm đúng $\frac{n}{2}$ cột xanh lấy từ miếng đất cũ. Miếng đất mới có $m = 4k + r$ hàng và đúng $\frac{n}{2}$ cột.

Khi đó, trên miếng đất này, có ít nhất là $(3k + r)\frac{n}{2}$ cây xanh. Giả sử trên miếng đất mới, có p hàng đỏ với $0 \leq p \leq 4k + r$, khi đó:

- Trên p hàng đỏ, mỗi hàng có không quá $\frac{n}{4}$ cây xanh.
- Trên $4k + r - p$ hàng xanh, mỗi hàng sẽ có không quá $\frac{n}{2}$ cây xanh (độ dài tối đa của mỗi hàng lúc bấy giờ).

Suy ra số cây xanh tối đa của miếng đất mới, tính theo các hàng này là $p \cdot \frac{n}{4} + (4k + r - p) \cdot \frac{n}{2}$. Từ đây, ta có bất đẳng thức

$$p \cdot \frac{n}{4} + (4k + r - p) \cdot \frac{n}{2} \geq \frac{(3k + r)n}{2} \Leftrightarrow p + 2(4k + r - p) \geq 2(3k + r).$$

Suy ra $p \leq 2k$, tức là trong miếng đất mới, số các hàng đỏ không quá $2k$ và số hàng xanh ít nhất là $2k + r$.

Quay lại miếng đất ban đầu, khi xét $2k + r$ hàng xanh này, ta thấy chúng chứa ít nhất $(2k + r) \cdot \frac{3n}{4}$ cây xanh. Do đó, nếu bỏ đi những cây xanh thuộc $\frac{n}{2}$ cột xanh, miếng đất còn lại còn chứa thêm ít nhất $\frac{n(2k+r)}{4}$ cây xanh nữa. Suy ra, tổng số cây xanh trong miếng đất ban đầu sẽ không ít hơn

$$(2k + r) \cdot \frac{3n}{4} + \frac{n(2k + r)}{4} = \frac{n(8k + 3r)}{4} > \frac{mn}{2},$$

mâu thuẫn. Vậy miếng đất ấn tượng phải có hai kích thước đều chia hết cho 4. Ta có đpcm. □

Bình luận. Câu a) của bài toán là một bước đệm để tấn công vào câu b) nhưng kỳ thực lại được gợi ý từ câu b) với câu hỏi "nếu có cách trồng ấn tượng thì m và n đều là bội của 4". Điều này nghĩa là miếng đất ấn tượng nhỏ nhất sẽ có kích thước 4×4 và ta nên xây dựng cho nó trước, rồi biết đâu có thể dùng nó làm cơ sở để xây dựng cho miếng đất 2016×2016.

Câu b) của bài toán này là một bài tổ hợp khó, có thể nói là khó nhất của cả kỳ thi. Nhiều thí sinh sẽ dễ sa lầy vào các biến đổi, đánh giá liên quan đến số học khi thấy yếu tố chia hết cho 4 và gần như không thể dứt điểm được.

Nếu để ý rằng nếu tổng số cây trên một hàng/cột chia 4 dư 1, chẳng hạn là 5 thì các loại cây phải là $(1, 4)$, còn tổng số cây trên một hàng/cột chia 4 dư 2, chẳng hạn là 6 thì các loại cây phải là $(1, 5)$, tổng số cây trên một hàng/cột chia 4 dư 3, chẳng hạn là 7 thì các loại cây phải là $(1, 6)$, chênh lệch khá xa nhau. Trong khi đó, nếu nó chia vừa hết cho 4, chẳng hạn là 8 thì các loại cây có thể là $(2, 6)$, chênh lệch vừa đúng $\frac{1}{2}$ tổng số cây. Điều này dẫn ta đến ý tưởng chứng minh: cách trồng ấn tượng chỉ xảy ra khi bất đẳng thức "chênh lệch không nhỏ hơn một nửa số ô của hàng/cột" trong điều kiện đã cho trở thành đẳng thức, tức là kích thước chia hết cho 4.

Một bài toán tương tự trong đề thi VN TST 2012:

Trên một cánh đồng hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông gồm m hàng và n cột, người ta đặt một số máy bơm nước vào các ô vuông. Biết rằng mỗi máy bơm nước có thể tưới nước không những cho ô vuông chứa nó và các ô vuông có chung cạnh với ô đó mà còn có thể tưới cho các ô vuông cùng cột với nó và cách nó đúng một ô vuông. Tìm số nhỏ nhất các máy bơm nước cần đặt để các máy bơm đó có thể tưới hết cả cánh đồng trong hai trường hợp $m = 4$ và $m = 3$.

Ngoài cách làm trực tiếp như trên, bằng các đánh giá theo bất đẳng thức tương tự, ta có thể chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Với một miếng đất có hai kích thước đều chia hết cho 4 và một cách trồng cây ấn tượng trên đó thì hiệu số của hai loại cây trên mỗi hàng hoặc cột bằng đúng một nửa số lượng cây trên hàng hoặc cột tương ứng đó.

Từ đó, ta có thể giải quyết bài toán theo cách khá thú vị: Xét một miếng đất có kích thước $m \times n$ và tồn tại cách trồng ấn tượng. Ghép 16 miếng đất như thế lại với nhau, tạo thành miếng đất mới có kích thước $4m \times 4n$ thì rõ ràng miếng đất mới vẫn ấn tượng.

Theo bổ đề thì hiệu số cây giữa hai loại cây trên mỗi hàng phải là $\frac{4n}{2} = 2n$. Tuy nhiên, do các miếng đất đều giống nhau nên hiệu số cây ở mỗi hàng của miếng đất ban đầu là $\frac{2n}{4} = \frac{n}{2}$. Suy ra n chẵn. Nhưng tổng số cây trên hàng bằng n là chẵn nên hiệu của chúng cũng chẵn (vì cùng tính chẵn lẻ) nên suy ra $\frac{n}{2}$ chẵn, tức là n chia hết cho 4. Tương tự, ta cũng có m chia hết cho 4.

Ý tưởng này là của bạn Hoàng Đỗ Kiên, HCB IMO 2013.

Bài 5 (6.0 *điểm*). Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

i) $f(1) = 2016$;

ii) $f\big(x + y + f(y)\big) = f(x) + ay$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Với $a = 0$, có thể tìm được một hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = 2016$. Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp $a \neq 0$ là đủ. Thay $x = -f(y)$ vào điều kiện ii), ta được

$$f(y) = f\big(-f(y)\big) + ay$$

với mọi $y \in \mathbb{R}$. Từ đó ta thấy f là một đơn ánh. Tiếp tục, thay $y = 0$ vào điều kiện ii), ta được

$$f\big(x + f(0)\big) = f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(0) = 0$. Thay $y = -\frac{f(x)}{a}$ vào điều kiện ii) và kết hợp với tính đơn ánh của f (ở đây chú ý rằng 0 là số duy nhất để $f(x) = 0$), ta được

$$-\frac{f(x)}{a} + f\left(-\frac{f(x)}{a}\right) = -x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay y bởi $-\frac{f(y)}{a}$ vào ii) và sử dụng kết quả trên, ta được

$$f(x - y) = f(x) - f(y)$$

với mọi số thực x, y. Từ đây dễ dàng suy ra f cộng tính. Với các tính chất đã biết của hàm cộng tính, ta tính được $f(2016) = 2016f(1) = 2016^2$.

Mặt khác, do f cộng tính nên điều kiện ii) cũng có thể viết lại thành

$$f(y) + f\big(f(y)\big) = ay$$

với mọi $y \in \mathbb{R}$. Cho $y = 1$, ta tính được $a = 2016 \cdot 2017$. Thử lại, ta thấy với số a như trên thì hàm số $f(x) = 2016x$ thỏa mãn các điều kiện được cho.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn yêu cầu đề bài là $a = 0$ và $a = 2016 \cdot 2017$. $\square$

Bình luận. Đây là kiểu bài toán quen thuộc đã xuất hiện trong nhiều kỳ thi. Điểm mấu chốt để giải bài toán là nhận thấy f đơn ánh trong trường hợp $a \neq 0$, để từ đó tính được $f(0) = 0$ và chứng minh f cộng tính. Ngoài cách tiếp cận như trên, ta cũng có thể đi theo lối khác để chứng minh f cộng tính là nhận xét f cũng toàn ánh nên suy ra f song ánh.

Từ đó, sau khi chứng minh được $f(0) = 0$, bằng cách thay $x = 0$ vào điều kiện ii), ta thấy

$$f\big(y + f(y)\big) = ay$$

với mọi $y \in \mathbb{R}$. Suy ra $y + f(y)$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử có $b \in \mathbb{R}$ mà $y + f(y) \neq b$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Đặt $f(b) = c$ thì bằng cách thay y bởi $\frac{c}{a}$ vào đẳng thức trên, ta có $f\left(\frac{c}{a} + f\left(\frac{c}{a}\right)\right) = c = f(b)$. Suy ra $\frac{c}{a} + f\left(\frac{c}{a}\right) = b$, vô lý.

Đến đây, bằng cách viết lại điều kiện ii) dưới dạng

$$f\big(x + y + f(y)\big) = f(x) + f\big(y + f(y)\big),$$

ta cũng có f cộng tính và dễ dàng đi đến lời giải hoàn chỉnh cho bài toán.

Khi trao đổi với các bạn thí sinh tham gia kỳ thi, chúng tôi nhận thấy phần đông các bạn đều tiếp cận bài toán theo một trong hai lối nêu trên. Có một số bạn đã sử dụng tính chất của hàm tuần hoàn để giải, tuy nhiên lời giải tương đối dài dòng nên xin không giới thiệu ở đây.

Dưới đây xin được nêu thêm một số bài toán có cùng cấu trúc đã từng xuất hiện trong các kỳ thi và các sách báo tham khảo.

1. (IMO, 1992) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y + f^2(x)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. (Ở đây $f^2(x) = \big(f(x)\big)^2$.)

(Ý kiến chủ quan chúng tôi cho rằng bài toán này là bài toán gốc, gợi ý tưởng cho việc sáng tạo ra các bài toán bên dưới.)

2. (Tổng quát IMO 1992) Cho số nguyên dương n. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(x^n + f(y)\big) = y + f^n(x)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. (Ở đây $f^n(x) = \big(f(x)\big)^n$.)

3. (Bulgaria, 2003) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(x^2 + y + f(y)\big) = 2y + f^2(x)$$

với mọi cặp số thực x, y.

4. (Vietnam TST, 2003) Tìm tất cả các số thực a sao cho tồn tại duy nhất một hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình

$$f\big(x^2 + y + f(y)\big) = f^2(x) + ay$$

với mọi cặp số thực x, y.

5. (PTNK, 2013) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\big(x^3 + y + f(y)\big) = 2y + x^2 f(x)$$

với mọi cặp số thực x, y.

6. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ thỏa mãn

$$f\big(x + f(x) + 2y\big) = 2x + f\big(2f(y)\big)$$

với mọi $x, y \geq 0$. (Ở đây $R_{\geq 0}$ là tập các số thực không âm.)

Bài 6 (7.0 *điểm*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) (với tâm O) có các góc ở đỉnh B và C đều nhọn. Lấy điểm M trên cung BC không chứa A sao cho AM không vuông góc với BC. AM cắt trung trực của BC tại T. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOT cắt (O) tại N $(N \neq A)$.

a) Chứng minh rằng $\angle BAM = \angle CAN$.

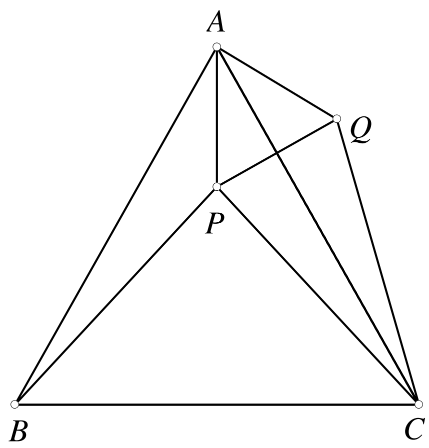
b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và G là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. AI, MI, NI cắt (O) lần lượt tại D, E, F. Gọi P và Q tương ứng là giao điểm của DF với AM và DE với AN. Đường tròn đi qua P và tiếp xúc với AD tại I cắt DF tại H $(H \neq D)$, đường tròn đi qua Q và tiếp xúc với AD tại I cắt DE tại K $(K \neq D)$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác GHK tiếp xúc với BC.

Lời giải. **a)** Ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề. Cho tam giác ABC cân tại A. Giả sử có điểm P sao cho

$$(PA, PB) = (PC, PA) \pmod{\pi}.$$

Khi đó, ta có $PB = PC$.



Chứng minh. Dựng tam giác AQC bằng và cùng hướng với tam giác APB thì

$$(PA, PB) = (QA, QC) \pmod{\pi}.$$

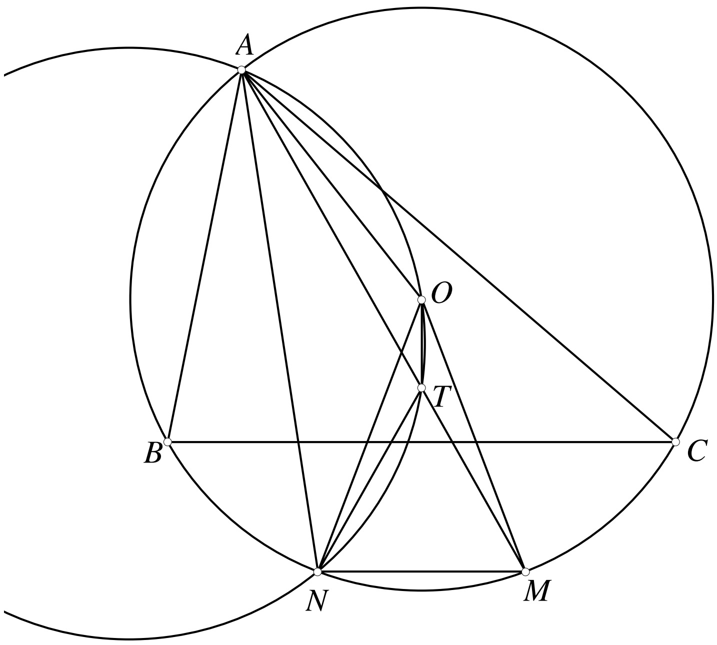
Ta cũng có $AP = AQ$ vậy $(PA, PQ) = (PQ, QA) \pmod{\pi}$. Từ đó

$$\begin{aligned}(PC, PQ) &= (PC, PA) + (PA, PQ) = (PA, PB) + (PQ, QA)\\ &= (QA, QC) + (PQ, QA) = (QP, QC) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

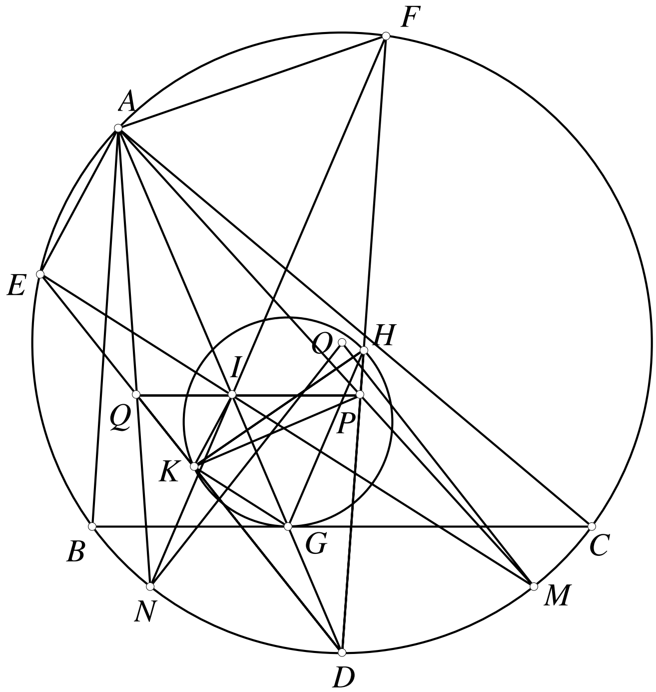
Vậy tam giác CPQ cân tại C. Ta suy ra $PB = CQ = PC$. Ta có điều phải chứng minh. □

Trở lại bài toán, theo đề bài bốn điểm A, O, T, N thuộc một đường tròn và tam giác OAN cân. Ta có biến đổi góc

$$(TO, TM) = (TO, TA) = (NO, NA) = (AN, AO) = (TN, TO) \pmod{\pi}.$$



Từ đó chú ý tam giác OMN cân tại O nên theo bổ đề $TM = TN$. Từ đó $MN \perp OT \perp BC$ nên $MN \parallel BC$, ta suy ra $\angle BAM = \angle CAN$.



b) Ta chú ý D là trung điểm cung BC không chứa A và cũng là trung điểm cung MN không chứa A. Ta có biến đổi góc

$$(EQ, EI) = (ED, EM) = (EN, ED) = (AN, AD) = (AQ, AI) \pmod{\pi},$$

suy ra bốn điểm A, E, Q, I thuộc một đường tròn. Tương tự bốn điểm A, F, P, I thuộc một đường tròn. Từ đó

$$\begin{aligned}(IQ, IP) &= (IQ, IA) + (IA, IP) = (EQ, EA) + (FP, FA)\\ &= (ED, EA) + (FA, FD) = 0 \pmod{\pi},\end{aligned}$$

vậy P, I, Q thẳng hàng. Theo tính chất tiếp xúc đề bài thì $\overline{DK} \cdot \overline{DQ} = DI^2 = \overline{DP} \cdot \overline{DH}$, suy ra bốn điểm P, Q, K, H thuộc một đường tròn.

Cũng chú ý $\overline{DP} \cdot \overline{DH} = DI^2 = DB^2 = \overline{DG} \cdot \overline{DA}$, lại từ bốn điểm A, F, P, I thuộc một đường tròn nên $\overline{DP} \cdot \overline{DF} = \overline{DI} \cdot \overline{DA}$. Chia hai đẳng thức trên, ta được $\frac{DF}{DH} = \frac{DI}{DG}$ hay $GH \parallel IF$, tương tự $GK \parallel IE$. Từ đó ta có các biến đổi góc

$$\begin{aligned}(HK, HG) &= (HK, HP) + (HP, HG) = (QK, QP) + (FP, FI)\\ &= (QE, QI) + (FD, FN) = (AE, AI) + (AI, AQ)\\ &= (AE, AQ) = (IE, IQ) = (GK, GB) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Đẳng thức này thể hiện BC tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác GHK tại G. □

Bình luận. Thực chất toàn bộ mục đích câu a) là để $MN \parallel BC$ do đó chúng tôi tách hình vẽ câu b) riêng. Lời giải câu a) nếu không dùng góc định hướng sẽ phải xét nhiều trường hợp. Mặt khác theo chúng tôi việc sử dụng bổ đề trong câu a) là cần thiết, trong một số lời giải khác trên mạng sau khi chỉ ra $\angle OTM = \angle OTN$ vội kết luận M, N đối xứng qua OT, điều này là ngộ nhận. Mặt khác một số lời giải dùng đẳng thức góc $\angle MON = 2\angle MAN$, đẳng thức này cũng chưa thật sự đúng vì chú ý với các giả thiết trong đề bài thì góc $\angle BAC$ có thể là góc tù.

Trong câu b) việc sử dụng độ dài đại số và góc định hướng cũng là rất cần thiết vì không sẽ phải xét nhiều trường hợp. Lời giải trong câu b) thuần túy biến đổi góc, câu b) có thể có được phát biểu lại hay hơn và có nhiều khai thác trên cấu hình đó. Các bạn hãy làm các bài tập ở dưới đây để luyện tập thêm.

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P thuộc (O) và T thuộc OP. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOT cắt (O) tại N khác A. Chứng minh rằng AP là phân giác của góc TAN.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm nội tiếp I. IB, IC cắt (O) tại E, F khác B, C. Đường thẳng qua I song song BC cắt CA, AB tại P, Q. PE cắt đường tròn qua I, P tiếp xúc AI tại H khác P. QF cắt đường tròn qua I, Q tiếp xúc AI tại K khác Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK tiếp xúc (O).

3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm nội tiếp I. M, N thuộc (O) sao cho $MN \parallel BC$. IM, IN cắt (O) tại E, F khác M, N. Đường thẳng qua I song song BC cắt AN, AM tại P, Q. PE cắt đường tròn qua I, P tiếp xúc AI tại H khác P. QF cắt đường tròn qua I, Q tiếp xúc AI tại K khác Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK tiếp xúc (O).

4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm nội tiếp I. M, N thuộc (O) sao cho $MN \parallel BC$. IM, IN cắt (O) tại E, F khác M, N. Đường thẳng qua I song song BC cắt AN, AM tại P, Q. PE cắt đường tròn qua I, P tiếp xúc AI tại H khác P. QF cắt đường tròn qua I, Q tiếp xúc AI tại K khác Q. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua điểm cố định khi M, N thay đổi.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm nội tiếp I. M, N thuộc (O) sao cho $MN \parallel BC$. IM, IN cắt (O) tại E, F khác M, N. Đường thẳng qua I song song BC cắt AN, AM tại P, Q. PE cắt đường tròn qua I, P tiếp xúc AI tại H khác P. QF cắt đường tròn qua I, Q tiếp xúc AI tại K khác Q. IA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF tại S khác I.

   a) Chứng minh rằng đường thẳng qua H song song với SE và đường thẳng qua K song song SF cắt tại tại T thuộc AD

   b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác THK tiếp xúc BC.

   Tất cả các bài trên đều là hệ quả của bài tổng quát dưới đây.

6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có I, J là hai điểm đẳng giác trên phân giác góc A. M, N thuộc (O) sao cho $MN \parallel BC$. IM, IN cắt (O) tại E, F khác M, N. Đường thẳng qua I song song BC cắt AN, AM tại P, Q. PE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PIJ tại H khác P. QF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QIJ tại K khác Q.

   a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác JHK tiếp xúc (O).

   b) Giả sử I, J cố định và M, N thay đổi. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.

   c) Gọi IA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF tại R khác I. Đường thẳng qua H song song với SE và đường thẳng qua K song song SF cắt nhau tại L. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác LHK tiếp xúc BC.

Bài 7 (7.0 *điểm*). Số nguyên dương n được gọi là số hoàn chỉnh nếu n bằng tổng các ước số dương của nó (không kể chính nó).

a) Chứng minh rằng nếu n là số hoàn chỉnh lẻ thì nó có dạng

$$n = p^s m^2,$$

trong đó p là số nguyên tố có dạng $4k+1$, s là số nguyên dương có dạng $4h+1$ và m là số nguyên dương không chia hết cho p.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$ sao cho $n-1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ đều là các số hoàn chỉnh.

Lời giải. Ký hiệu hàm tổng tất cả các ước số dương của một số nguyên dương x là $\sigma(x)$.

a) Xét dạng phân tích tiêu chuẩn của số n lẻ là

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là các số nguyên tố lẻ phân biệt và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các số mũ nguyên dương tương ứng. Theo công thức tính $\sigma(n)$, ta có

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Suy ra

$$2n = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Chú ý rằng $\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1} = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i} \equiv 1 + \alpha_i \pmod 2$ nên thừa số này lẻ khi và chỉ khi số mũ α_i chẵn.

Vì n lẻ nên ở vế phải chẵn và không chia hết cho 4, tức là trong vế phải, chỉ có đúng một thừa số là chẵn, còn lại đều lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử thừa số $\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$, $1 \le i \le k$ chẵn. Khi đó, các số mũ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k$ đều chẵn, dẫn đến tích của các ước nguyên tố với mũ tương ứng này sẽ tạo thành một số chính phương, đặt là m^2 với $m \in \mathbb{N}^*$. Do đó $n = p_i^{\alpha_i} m^2$ với p_i là số nguyên tố đã nêu ở trên.

Ta chỉ cần chứng minh p_i, α_i đều là các số chia 4 dư 1. Thật vậy, nếu số nguyên tố p_i có dạng $p_i = 4k + 3$ với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$\sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j = \sum_{j=0}^{\alpha_i} (4k+3)^j \equiv \sum_{j=0}^{\alpha_i} 3^j = \frac{3^{\alpha_i+1}-1}{2} \pmod 4.$$

Ta biết rằng lũy thừa của 3 chia 4 dư 1 hoặc dư 3 nên biểu thức trên đồng dư với 0 hoặc 1 theo modulo 4, không thỏa (vì ta cần đồng dư với 2 theo modulo 4).

Do đó p_i có dạng $4k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$. Từ đó, suy ra

$$\sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j = \sum_{j=0}^{\alpha_i} (4k+1)^j \equiv \alpha_i + 1 \pmod 4.$$

Do $\alpha_i + 1$ phải chia 4 dư 2 nên α_i chia 4 dư 1, tức là cũng có dạng $4h + 1$. Ta có đpcm.

b) Trước tiên ta chứng minh n là số lẻ. Thật vậy, giả sử n chẵn, khi đó $n-1$ là số hoàn chỉnh lẻ. Dựa theo phần a), ta có tất cả các số hoàn chỉnh lẻ đều có dạng $4k+1$, suy ra n có dạng $4k+2$. Do đó, $\frac{n(n+1)}{2}$ là số hoàn chỉnh lẻ. Kết hợp với phần a), ta suy ra

$$\frac{n(n+1)}{2} = p_1^{s_1} m_1^2,$$

với p_1 là số nguyên tố chia 4 dư 1, s_1 nguyên dương chia 4 dư 1, và m_1 nguyên dương lẻ không chia hết cho p_1.

Bây giờ, vì $\left(\frac{n}{2}, n+1\right) = 1$ nên từ đẳng thức trên, $n+1$ có dạng $p_1^{s_1}a^2$ hoặc a^2 trong đó a lẻ không chia hết cho p. Tuy nhiên, vì

$$p_1^{s_1}a^2 \equiv a^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

nên ta có n chia hết cho 4, vô lý vì n chia 4 dư 2. Vậy n phải lẻ.

Tiếp theo ta sử dụng bổ đề sau, chứng minh bổ đề sẽ có ở bên dưới.

Bổ đề. Mọi số hoàn chỉnh chẵn có dạng $2^s(2^{s+1}-1)$, trong đó $2^{s+1}-1$ là số nguyên tố.

Bằng cách áp dụng bổ đề, ta thấy rằng tồn tại $s \in \mathbb{N}$ sao cho $2^{s+1}-1$ nguyên tố và $n = 2^s(2^{s+1}-1)+1$. Suy ra

$$\frac{n(n+1)}{2} = \left[2^s(2^{s+1}-1)+1\right]\left[2^{s-1}(2^{s+1}-1)+1\right]$$

là một số hoàn chỉnh lẻ, hay là

$$\left[2^s(2^{s+1}-1)+1\right]\left[2^{s-1}(2^{s+1}-1)+1\right] = \frac{n(n+1)}{2} = p_2^{s_2}m_2^2,$$

với p_2 là số nguyên tố chia 4 dư 1, s_2 nguyên dương chia 4 dư 1, và m_2 nguyên dương lẻ không chia hết cho p_2. Vì $\left(2^s(2^{s+1}-1)+1,\ 2^{s-1}(2^{s+1}-1)+1\right) = 1$ nên một trong hai số $2^s(2^{s+1}-1)+1$, $2^{s-1}(2^{s+1}-1)+1$ phải là số chính phương.

Ta sẽ chứng minh rằng cả hai số này đều không thể chính phương nếu $s \geq 2$. Thật vậy, nếu $s \geq 2$, thì cả hai số này đều lẻ. Giả sử $2^s(2^{s+1}-1)+1 = b^2$, với $b > 1$ lẻ. Ta có

$$2^s(2^{s+1}-1) = (b-1)(b+1),$$

và $2^{s+1}-1$ nguyên tố, nên $2(2^{s+1}-1)$ là ước của $b-1$ hoặc $b+1$. Vì $2(b-1) \geq b+1$, nên $(b-1)(b+1) \geq 2(2^{s+1}-1)^2 > 2^s(2^{s+1}-1) = (b-1)(b+1)$, vô lý.

Trường hợp $2^{s-1}(2^{s+1}-1)$ chứng minh tương tự.

Vậy ta phải có $s = 1$, khi đó $n = 7$. Thử lại thấy thỏa mãn. Đây là giá trị duy nhất cần tìm.

Cuối cùng ta sẽ chứng minh bổ đề. Ta có hai nhận xét cơ bản sau.

Nhận xét 1. Nếu x, y là các số nguyên tố cùng nhau thì $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.

Nhận xét 2. Một số là hoàn chỉnh khi và chỉ khi hai lần số đó bằng hàm σ của chính nó.

Xét số hoàn chỉnh chẵn có dạng $2^s \cdot t$ với t lẻ. Theo hai nhận xét trên, ta thấy

$$2^{s+1}\cdot t = \sigma(2^s\cdot t) = \sigma(2^s)\sigma(t) = (2^{s+1}-1)\sigma(t),$$

suy ra $2^{s+1}-1 \mid t$. Đặt $u = \frac{t}{2^{s+1}-1} \in N$ thì u là một ước dương của t, và ta có bất đẳng thức

$$2^{s+1}\cdot u = 2^{s+1}\cdot\frac{t}{2^{s+1}-1} = \sigma(t) \geq t+u = (2^{s+1}-1)u+u = 2^{s+1}u.$$

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên phải xảy ra, tức là t và u là hai ước dương duy nhất của t ,suy ra t nguyên tố và $u = 1$, hay $2^{s+1}-1 = t$ nguyên tố. Bổ đề được chứng minh. □

Bình luận. Ý thứ nhất của bài toán này quả thật khá cơ bản, là một kết quả quen thuộc khi nhắc đến số hoàn chỉnh. Tuy nhiên, ta cũng chỉ cần dựa trên định nghĩa của nó, kết hợp với công thức tính tổng các ước của một số nguyên dương (đây là một trong các hàm số học nhân tính quan trọng) là có thể xử lý được. Điểm quan trọng nhất là nhận xét được trong tích của công thức tính tổng các ước, có đúng một thừa số là chẵn và không chia hết cho 4. Ngoài ra, nếu nắm vững về $v_p(n)$ cũng như định lý LTE, bài toán có thể được giải quyết nhanh gọn hơn.

Ở ý thứ hai, cũng là ý khó nhất của ngày thứ 2, điểm mấu chốt là bổ đề bên trên. Trên thực tế, nó là một chiều khẳng định của định lý rất nổi tiếng dưới đây về số hoàn chỉnh (perfect number), có tên là định lý Euclid-Euler:

Số n chẵn là hoàn chỉnh nếu và chỉ nếu nó có dạng $2^s(2^{s+1}-1)$, trong đó s nguyên dương và $2^{s+1}-1$ là số nguyên tố.

Chứng minh định lý có trong các sách tham khảo về số học như các cuốn Số học của thầy Hà Huy Khoái, hay Các bài giảng Số học của thầy Đặng Hùng Thắng. Điều này, một mặt, tạo ra nhiều thuận lợi cho các thí sinh "biết đúng chỗ", nhưng mặt khác, có thể dễ dàng hạ gục những bạn còn lại chưa biết đến hoặc không nhớ đến kết quả của định lý. Một bài toán khác liên quan chặt chẽ đến chứng minh của định lý này là bài B6 trong kỳ thi Putnam 1976:

Chứng minh nếu $\sigma(N) = 2N + 1$ thì N là bình phương của một số nguyên lẻ.

Số nguyên tố có dạng $2^s - 1$ còn được gọi là số nguyên tố Mersenne, và là một trường hợp riêng của số Mersenne $M_n = 2^n - 1$ với n nguyên dương. Cho đến nay người ta chưa biết có tồn tại vô hạn các số nguyên tố Mersenne hay không. Do đó, câu hỏi về sự tồn tại vô hạn các số hoàn chỉnh chẵn vẫn còn mở. Ngoài ra, chưa có số hoàn chỉnh lẻ nào được tìm ra, và người ta đã đặt ra câu hỏi phải chăng không tồn tại số hoàn chỉnh lẻ, song chưa có lời giải đáp.

Các tài liệu và mệnh đề xung quanh số nguyên tố Mersenne và số hoàn chỉnh bạn đọc có thể truy cập trang web: `https://primes.utm.edu/mersenne/`.

Lời giải và bình luận bài 7b ở trên là của bạn Nguyễn Huy Tùng, HCĐ IMO 2014.