MOON.VN

CỔNG LUYỆN THI TRỰC TUYẾN SỐ 1 VIỆT NAM

Thầy ĐẶNG VIỆT HÙNG

TUYỂN CHỌN

CÁC BÀI TOÁN ĐẶC SẮC

HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HÌNH PHẲNG OXY

ĐVH

(Sách quý, chỉ bán chứ không tặng)

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN ĐẶC SẮC VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Thầy Đặng Việt Hùng [ĐVH]

Câu 1. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=(x+y)(xy+2)-1 \\ x+\sqrt{2(x^2+y)}=1+\sqrt{1-y} \end{cases}$

Lời giải

ĐK: $\begin{cases} x^2+y\ge 0 \\ y\le 1 \end{cases}$. Ta có: $PT(1)\Leftrightarrow (x+y)^2+xy=(x+y)xy+2(x+y)-1$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-2(x+y)+1=xy(x+y-1)\Leftrightarrow (x+y-1)^2=xy(x+y-1)$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(x+y-1-xy)=0\Leftrightarrow (x+y-1)(x-1)(y-1)=0$

• Với $x=1\Rightarrow \sqrt{2+2y}=\sqrt{1-y}\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}$

• Với $y=1\Rightarrow x+\sqrt{2x^2+2}=1\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=-1$

• Với $x+y=1\Rightarrow x+\sqrt{2(x^2-x+1)}=\sqrt{x}+1\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)}=(1-x)+\sqrt{x}$

Đặt $a=1-x;b=\sqrt{x}$ ta có: $\sqrt{2(a^2+b^2)}=a+b\Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ (a-b)^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow a=b\ge 0$.

Khi đó $1-x=\sqrt{x}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Vậy HPT có 3 nghiệm $(x;y)=\left\{(-1;1);\left(1;-\dfrac{1}{3}\right);\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

Câu 2. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}=\sqrt{(x+3y)(y-1)} \\ \sqrt{6y-7}+\sqrt{4-2x}=\sqrt{\dfrac{9x^2+16}{8}} \end{cases}$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} y\ge \dfrac{7}{6};x\le 2 \\ x+3y\ge 0 \end{cases}$. Khi đó: $PT(1)\Leftrightarrow x+3y-3(y-1)=2\sqrt{(x+3y)(y-1)}$.

Đặt $u=\sqrt{x+3y};v=\sqrt{y-1}\ (u;v\ge 0)$

Ta có: $u^2-2uv-3v^2=0\Leftrightarrow (u+v)(u-3v)=0\Rightarrow u=3v\Leftrightarrow x+3y=9y-9\Leftrightarrow x=6y-9$

Thay vào (2) ta có: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}\Leftrightarrow 4(2x+4)+16-16x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2+16$

$\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x$. Đặt $t=\sqrt{2(4-x^2)}\ge 0$ ta có: $4t^2+16t=x^2+8x$

$\Leftrightarrow (2t-x)(2t+x+8)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t=x \\ 2t=-x-8\ (loai) \end{array}\right.$

Với $2t=x\Rightarrow\sqrt{2\left(4-x^2\right)}=\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\9x^2=32\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{4\sqrt{2}+27}{18}$

Câu 3. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-2\sqrt{x}+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{y^2}{3}\\\sqrt{x\left(x^2+y^2\right)}=\dfrac{2y^2}{3}\end{cases}$

Lời giải:

ĐK: $x\ge 0$. Thế PT(2) vào PT(1) ta có: $x-2\sqrt{x}+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{\sqrt{x\left(x^2+y^2\right)}}{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)+\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\left(2-\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x^2+y^2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\4x=x^2+y^2\end{array}\right.$

Với $x=4\Rightarrow\sqrt{\left(16+y^2\right)}=\dfrac{y^2}{3}\Leftrightarrow 9\left(16+y^2\right)=y^4\Leftrightarrow y^4-9y^2-144=0\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{657}}{2}}$

Với $4x=x^2+y^2\Rightarrow\begin{cases}4x=x^2+y^2\\2x=\dfrac{2y^2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{4y^2}{3}\\x=\dfrac{y^2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{y^2}{3}\\x=\dfrac{y^2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;y=0\\x=1;y=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Kết luận: Vậy HPT có nghiệm $(x;y)=\left\{(0;0);\left(1;\pm\sqrt{3}\right);\left(4;\pm\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{657}}{2}}\right)\right\}$

Câu 4. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+3y+1)\sqrt{2xy+2y}=y(3x+4y+3) & (1)\\\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2y-2}\right)\left(x-3+\sqrt{x^2+x+2y-4}\right)=4 & (2)\end{cases}$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases}x\ge -1\\y\ge 1\\x^2+x+2y-4\ge 0\end{cases}$ (*). Khi đó $(1)\Leftrightarrow(x+3y+1)\sqrt{y}.\sqrt{2(x+1)}=y(3x+4y+3)$

Đặt $\sqrt{2(x+1)}=a;\ \sqrt{y}=b\ (a,b\ge 0)\Rightarrow\left(\dfrac{a^2}{2}+3b^2\right)ab=b^2\left(\dfrac{3a^2}{2}+4b^2\right)$

$\Leftrightarrow ab\left(a^2+6b^2\right)=b^2\left(3a^2+8b^2\right)\Leftrightarrow b\left(a^3+6ab^2-3a^2b-8b^3\right)=0$

$\Leftrightarrow b(a-2b)\left(a^2-ab+4b^2\right)=0$ (3)

Vì $y\ge 1\Rightarrow b=\sqrt{y}>0$ và $a^2-ab+4b^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{15b^2}{4}>0.$

Do đó $(3)\Leftrightarrow a-2b=0\Leftrightarrow a=2b\Rightarrow\sqrt{2(x+1)}=2\sqrt{y}\Rightarrow x+1=2y.$

Thế $2y=x+1$ vào (2) ta được $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1-2}\right)\left(x-3+\sqrt{x^2+x+x+1-4}\right)=4$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(x-3+\sqrt{x^2+2x-3}\right)=4$ (4)

Do $x\ge 1\Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}>0$ nên (4) $\Leftrightarrow \left(x+3-x+1\right)\left(x-3+\sqrt{x^2+2x-3}\right)=4\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)$

$\Leftrightarrow x-3+\sqrt{x^2+2x-4}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$ (5)

Đặt $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=t\ \left(t\ge 0\right)\Rightarrow t^2=2x+2+2\sqrt{x+3}.\sqrt{x-1}=2x+2+2\sqrt{x^2+2x-3}$

$\Rightarrow x+\sqrt{x^2+2x-3}=\dfrac{t^2-2}{2}$. Khi đó (5) trở thành $\dfrac{t^2-2}{2}-3=t\Leftrightarrow t^2-2t-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2\\ t=4\end{array}\right.$

Do $t\ge 0$ nên chỉ có $t=4$ thỏa mãn $\Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=4\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=4-\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-\sqrt{x-1}\ge 0\\ x+3=x+15-8\sqrt{x-1}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}\le 4\\ 2\sqrt{x-1}=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 17\\ 4\left(x-1\right)=9\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 17\\ x=\dfrac{13}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{13}{4}$

$\Rightarrow 2y=\dfrac{13}{4}+1=\dfrac{17}{4}\Rightarrow y=\dfrac{17}{8}$. Thử lại $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{13}{4};\dfrac{17}{8}\right)$ thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{13}{4};\dfrac{17}{8}\right)$.

Câu 5. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1+4\left(x-y+1\right)^2}{\sqrt{2\left(x-y+2\right)}}=1+\dfrac{3}{2\left(x-y+1\right)} & (1)\\ \left(x+2\right)\left(\sqrt{x+y+3}-2\sqrt{y+1}\right)=1-\sqrt{x^2+y^2+5x+3} & (2)\end{cases}$

Lời giải:

ĐK: $x-y+2>0;\ x+y+3\ge 0;\ y+1\ge 0;\ x^2+y^2+5x+3\ge 0$ (*).

Đặt $\sqrt{2\left(x-y+2\right)}=t\ge 0$. Khi đó (1) trở thành

$$\frac{1+\left(t^2-2\right)^2}{t}=1+\frac{3}{t^2-2}\Leftrightarrow \left(t^2-2\right)^3+t^2-2=t^3+t\Leftrightarrow f\left(t^2-2\right)=f\left(t\right) \qquad (3)$$

Xét hàm số $g\left(u\right)=u^3+u$ với $u\in\mathbb{R}$ có $g'\left(u\right)=3u^2+1>0,\ \forall u\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow g\left(u\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (3) $\Leftrightarrow t^2-2=t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\\ t=2\end{array}\right.$

Kết hợp với $t\ge 0\Rightarrow$ chỉ có $t=2$ thỏa mãn $\Rightarrow \sqrt{2\left(x-y+2\right)}=2\Leftrightarrow 2\left(x-y+2\right)=4\Leftrightarrow x=y$.

Thế $y=x$ vào (2) ta được $\left(x+2\right)\left(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\right)=1-\sqrt{2x^2+5x+3}$

$\Leftrightarrow \left(x+2\right)\left(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\right)=1-\sqrt{\left(x+1\right)\left(2x+3\right)}$ (4)

Đặt $\sqrt{2x+3}=a;\ \sqrt{x+1}=b\ \left(a,b\ge 0\right)$. Khi đó (4) trở thành

$\left(a^2-b^2\right)\left(a-2b\right)=a^2-2b^2-ab\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a-b\right)\left(a-2b\right)-\left(a+b\right)\left(a-2b\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a-2b\right)\left(a-b-1\right)=0$ (5)

Với $x\ge -1\Rightarrow a+b=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}>0$. Do đó $(5)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=b+1 \end{array}\right.$

- $a=2b\Rightarrow \sqrt{2x+3}=2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ 2x+3=4(x+1) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$. Thử lại $x=y=-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn hệ đã cho.

- $a=b+1\Rightarrow \sqrt{2x+3}=\sqrt{x+1}+1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 2x+3=x+2+2\sqrt{x+1} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 2\sqrt{x+1}=x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=0 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=-1\Rightarrow (x;y)=(-1;-1) \\ x=3\Rightarrow y=3\Rightarrow (x;y)=(3;3) \end{array}\right.$

Thử lại $(x;y)=\{(-1;-1),\ (3;3)\}$ thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: $(x;y)=\left\{(-1;-1),\ (3;3),\ \left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Câu 6. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y & (1) \\ 3\sqrt{6xy-x-1}=5-8y+\sqrt{2x-1}+4\sqrt{x+2y+1} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải:

ĐK: $2x-1\ge 0;\ x+2y+1\ge 0;\ 6xy-x-1\ge 0$ (*). Khi đó có

$$2(x^2+y^2)-(x+y)^2=x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\ge 0\Rightarrow 2(x^2+y^2)\ge (x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2}\ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\ge 0\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge \frac{1}{2}|x+y|\ge \frac{1}{2}(x+y) \quad (3)$$

$$4(x^2+xy+y^2)-3(x+y)^2=x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\ge 0\Rightarrow 4(x^2+xy+y^2)\ge 3(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+xy+y^2}{3}\ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\ge 0\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}\ge \frac{1}{2}|x+y|\ge \frac{1}{2}(x+y) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}\ge x+y$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y\ge 0$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x=y\ge 0$. Thế $y=x$ vào (2) ta được $3\sqrt{6x^2-x-1}=5-8x+\sqrt{2x-1}+4\sqrt{3x+1}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1}.\sqrt{3x+1}=5-8x+\sqrt{2x-1}+4\sqrt{3x+1} \quad (5)$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x+1}=a\ge 0 \\ \sqrt{2x-1}=b\ge 0 \end{cases}\Rightarrow 8x-5=2a^2+b^2-6$. Khi đó (5) trở thành $3ab=-2a^2-b^2+6+b+4a$

$\Leftrightarrow b^2+(3a-1)b+2a^2-4a-6=0$. Coi đây là phương trình bậc hai ẩn b với a là tham số.

Xét $\Delta=(3a-1)^2-4(2a^2-4a-6)=a^2+10a+25=(a+5)^2\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} b=\dfrac{1-3a+a+5}{2}=-a+3\\ b=\dfrac{1-3a-a-5}{2}=-2a-2\end{array}\right.$

- $b=-a+3\Rightarrow\sqrt{2x-1}=3-\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}=3$ (6)

Với $x>1\Rightarrow \text{VT (6)}>\sqrt{2.1-1}+\sqrt{3.1+1}=3\Rightarrow$ Loại.

Với $\frac{1}{2}\le x<1\Rightarrow \text{VT (6)}<\sqrt{2.1-1}+\sqrt{3.1+1}=3\Rightarrow$ Loại.

Với $x=1$ thế vào (6) ta thấy thỏa mãn. Do đó $(6)\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1.$ Đã thỏa mãn (*).

- $b=-2a-2\Leftrightarrow 2a+b+2=0\Rightarrow 2\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}+2=0.$ Phương trình vô nghiệm.

Đ/s: $(x;y)=(1;1).$

Câu 7. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x^2+x)\sqrt{x-y+8}=3x^2+2x+y+1 & (1)\\ (x-2)\sqrt{x^2+x+1}+(y+2)\sqrt{y^2+y+2}=x+y & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R}).$

Lời giải:

ĐK: $x-y+8\ge 0$ (*). Khi đó $(1)\Leftrightarrow(x^2+x)\sqrt{x-y+8}-3(x^2+x)+(x-y-1)=0$

$$\Leftrightarrow(x^2+x)\left(\sqrt{x-y+8}-3\right)+(x-y-1)=0\Leftrightarrow(x^2+x).\frac{(x-y+8)-9}{\sqrt{x-y+8}+3}+(x-y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y-1)\left(\frac{x^2+x}{3+\sqrt{x-y+8}}+1\right)=0\Leftrightarrow(x-y-1)\left(x^2+x+3+\sqrt{x-y+8}\right)=0\qquad(3)$$

Ta có $x^2+x+3+\sqrt{x-y+8}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}+\sqrt{x-y+8}>0.$

Do đó $(3)\Leftrightarrow x-y-1=0\Leftrightarrow y=x-1.$

Thế $y=x-1$ vào (2) ta được $(x-2)\sqrt{x^2+x+1}+(x-1+2)\sqrt{(x-1)^2+(x-1)+2}=x+(x-1)$

$$\Leftrightarrow(x-2)\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)\sqrt{x^2-x+2}=2x-1\qquad(4)$$

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=a;\ \sqrt{x^2-x+2}=b\ (a,b\ge 0).$

Khi đó (4) trở thành $a\left(\frac{a^2+1-b^2}{2}-2\right)+b\left(\frac{a^2+1-b^2}{2}+1\right)=a^2-b^2$

$$\Leftrightarrow a(a^2-b^2-3)+b(a^2-b^2+3)=2(a^2-b^2)$$

$$\Leftrightarrow(a^3-b^3)+ab(a-b)-3(a-b)-2(a^2-b^2)=0$$

$$\Leftrightarrow(a-b)(a^2+ab+b^2+ab-3-2a-2b)=0$$

$$\Leftrightarrow(a-b)\left[(a+b)^2-2(a+b)-3\right]=0$$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+1)(a+b-3)=0$ (5)

Do $a,b\ge 0\Rightarrow a+b+1>0$ nên $(5)\Leftrightarrow (a-b)(a+b-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=3-b \end{array}\right.$

- $a=b\Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+2}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1\ge 0 \\ x^2+x+1=x^2-x+2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1\ge 0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$. Thử lại $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ thỏa mãn hệ đã cho.

- $a=3-b\Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}=3-\sqrt{x^2-x+2}\Rightarrow x^2+x+1=x^2-x+11-6\sqrt{x^2-x+2}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-x+2}=5-x\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x\ge 0 \\ 9(x^2-x+2)=(5-x)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ 8x^2+x-7=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{7}{8} \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=-1-1=-2\Rightarrow (x;y)=(-1;-2) \\ x=\dfrac{7}{8}\Rightarrow y=\dfrac{7}{8}-1=-\dfrac{1}{8}\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{7}{8};-\dfrac{1}{8}\right) \end{array}\right.$

Thử lại $(x;y)=\left\{(-1;-2),\ \left(\dfrac{7}{8};-\dfrac{1}{8}\right)\right\}$ thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: $(x;y)=\left\{(-1;-2),\ \left(\dfrac{7}{8};-\dfrac{1}{8}\right),\ \left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Câu 8. **[ĐVH]:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+(x+y)\sqrt{x+2y-1}=y\left(y+2\sqrt{3y-1}\right) & (1) \\ (y^3+6x^2+4)\sqrt{y^3+y^2+4}=2x(2y^3+3x^2+8) & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} x+2y-1\ge 0 \\ 3y-1\ge 0 \\ y^3+y^2+4\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y\ge 1 \\ y\ge \dfrac{1}{3} \end{cases}$ (*) $\Rightarrow y^3+6x^2+4>0;\ 2y^3+3x^2+8>0;\ \sqrt{y^3+y^2+4}>0.$

Khi đó từ $(2)\Rightarrow x>0.$ Xét phương trình (1) ta có

Với $x>y\ge \dfrac{1}{3}\Rightarrow$ VT (1) $> y^2+(y+y)\sqrt{y+2y-1}=y\left(y+2\sqrt{3y-1}\right)=$ VP (1) $\Rightarrow$ Loại.

Với $0<x<y\Rightarrow$ VT (1) $< y^2+(y+y)\sqrt{y+2y-1}=y\left(y+2\sqrt{3y-1}\right)=$ VP (1) $\Rightarrow$ Loại.

Với $x=y$ thế vào (1) ta thấy đã thỏa mãn. Do đó $(1)\Leftrightarrow x=y.$

Thế $y=x$ vào (2) ta được $(x^3+6x^2+4)\sqrt{x^3+x^2+4}=2x(2x^3+3x^2+8)$ (3)

Đặt $\sqrt{x^3+x^2+4}=a>0\Rightarrow \begin{cases} x^3+6x^2+4=a^2+5x^2 \\ 2x(2x^3+3x^2+8)=2x(2a^2+x^2) \end{cases}$

Khi đó (3) trở thành $a\left(a^2+5x^2\right)=2x\left(2a^2+x^2\right)\Leftrightarrow 2x^3-5ax^2+4a^2x-a^3=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2(2x-a)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ 2x=a \end{array}\right.$

- $x=a\Rightarrow x=\sqrt{x^3+x^2+4}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=x^3+x^2+4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^3+4=0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$

- $2x=a\Rightarrow 2x=\sqrt{x^3+x^2+4}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4x^2=x^3+x^2+4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ (x-2)^2(x+1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

$\Rightarrow y=2\Rightarrow (x;y)=(2;2)$. Thử lại $x=y=2$ thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: $(x;y)=(2;2)$.

Câu 9. **[ĐVH]:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+xy^2-y=x^2y+y^3-x, \\ \sqrt{x+\dfrac{3}{y}}=\dfrac{2x^2-y^2+7}{2(x+1)}. \end{cases}$

Lời giải.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$x^3+xy^2+x-x^2y-y^3-y=0\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+y^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=y$.

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{x^2+7}{2(x+1)}\Leftrightarrow (2x+2)\sqrt{x^2+3}=\left(x^2+7\right)\sqrt{x}$.

Đặt $\sqrt{x^2+3}=u;\sqrt{x}=v\ \ (u>0;v>0)$ ta thu được

$$\left(2v^2+2\right)u=\left(u^2+4\right)v\Leftrightarrow uv(2v-u)=2(2v-u)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} uv=2 \\ 2v=u \end{array}\right.$$

- $uv=2\Leftrightarrow \sqrt{x^3+3x}=2\Leftrightarrow x^3+3x-4=0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+4\right)=0\Leftrightarrow x=1$.
- $2v=u\Leftrightarrow x^2+3=4x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Phương trình ẩn x có nghiệm $S=\{1;3\}$ dẫn đến $(x;y)=(1;1),(3;3)$. Thử lại nghiệm đúng hệ ban đầu.

Câu 10. **[ĐVH]:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2+4xy+y^2+2x+y=2, \\ 8\sqrt{1-2x}+y^2=9. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x\le\dfrac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(2x+y)^2+2x+y-2=0\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=t \\ t^2+t-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=t \\ t\in\{-2;1\} \end{cases}$$

▪ Xét $t=1\Rightarrow 8\sqrt{y}+y^2=9\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}=u;u\ge 0 \\ 8u+u^4=9 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}=u;u\ge 0 \\ (u-1)\left(u^3+u^2+u+9\right)=0 \end{cases}\Leftrightarrow u=1\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

▪ Xét $t=-2\Rightarrow 2x+y=-2\Leftrightarrow 1-2x=y+3\Rightarrow y+3\ge 0$.

Ta có $8\sqrt{y+3}+y^2-9=0\Leftrightarrow 8\sqrt{y+3}+(y+3)(y-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ 8+(y-3)\sqrt{y+3}=0 \end{array}\right.$

Đặt $\sqrt{y+3}=v, v\ge 0 \Rightarrow v^3-6v+8=0$ (1).

Xét hàm số $f(v)=v^3-6v+8; v\ge 0 \Rightarrow f'(v)=3v^2-6$.

Ta có $f'(v)=0 \Leftrightarrow v=\pm\sqrt{2}$. Khảo sát hàm số có $f(0)<f(\sqrt{2}) \Rightarrow f(v)>f(0)=8-4\sqrt{2}>0$.

Do đó (1) vô nghiệm. Kết luận hệ có nghiệm $(x;y)=(0;1),\left(\frac{1}{2};-3\right)$.

Câu 11. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy^2-2y^3+3x=3y, \\ 2\sqrt{2y-3}+\sqrt{x^2+3y-4}=\sqrt{y^2+19x-28}. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.
Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2xy^2+3x-2y^3-3y=0 \Leftrightarrow (x-y)(2y^2+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2y^2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{x^2+19x-28}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{8(2x-3)+x^2+3x-4}$

Đặt $\sqrt{2x-3}=a;\sqrt{x^2+3x-4}=b$ $(a\ge 0;b>0)$ ta thu được

$$2a+b=\sqrt{8a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2+4ab+b^2=8a^2+b^2 \Leftrightarrow a(a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=b \end{array}\right.$$

- $a=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.
- $a=b \Leftrightarrow \sqrt{2x-3}=\sqrt{x^2+3x-4} \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện và thử trực tiếp suy ra nghiệm duy nhất $x=y=\frac{3}{2}$.

Câu 12. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y+1)\sqrt{2y-1}+xy+x+1=y^2 \\ 9(y-1)^2-5x=(3-y)\sqrt{3x^2-8x+3} \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $y\ge\frac{1}{2};3x^2-8x+3\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$(x-y+1)\sqrt{2y-1}+xy+x=y^2-1 \Leftrightarrow (x-y+1)\sqrt{2y-1}+(x-y+1)(y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(\sqrt{2y-1}+y+1\right)=0 \Leftrightarrow y=x+1$$

Phương trình thứ hai khi đó trở thành

$9x^2-5x=(2-x)\sqrt{3x^2-8x+3} \Leftrightarrow (3x-1)^2+x-1=(2-x)\sqrt{(2-x)(1-3x)-(x-1)}$.

Đặt $1-3x=t;\sqrt{3x^2-8x+3}=y$ $(y\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2+x-1=(2-x)y \\ y^2+x-1=(2-x)t \end{cases} \Rightarrow t^2-y^2=(2-x)(y-t) \Leftrightarrow (t-y)(t+y+2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=y \\ t+y=x-2 \end{array}\right.$$

- $t=y \Leftrightarrow 1-3x=\sqrt{3x^2-8x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le\frac{1}{3} \\ 3x^2-8x+3=9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le\frac{1}{3} \\ 3x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

- $t+y=x-2\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-8x+3}=4x-3\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{3}{4} \\ 13x^2-16x+6=0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=-\dfrac{\sqrt{13}+1}{6};y=\dfrac{-\sqrt{13}+5}{6}$.

Câu 13. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y+2)\sqrt{x+y+1}+x(4+x)=y^2-4, \\ \sqrt[4]{x+y-3}+\sqrt[4]{15x+1}=3\sqrt[4]{y-2}. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x+y\ge 3;y\ge 2;x\ge -\dfrac{1}{15}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$(x-y+2)\sqrt{x+y+1}+x^2+4x+4-y^2=0\Leftrightarrow (x-y+2)\sqrt{x+y+1}+(x+2)^2-y^2=0$

$\Leftrightarrow (x-y+2)\sqrt{x+y+1}+(x+y+2)(x-y+2)=0\Leftrightarrow (x-y+2)\left(\sqrt{x+y+1}+x+y+2\right)=0\Leftrightarrow y=x+2$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[4]{15x+1}=3\sqrt[4]{x}$. Điều kiện $x\ge \dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{\sqrt[4]{2x-1}}{\sqrt[4]{x}}+\dfrac{\sqrt[4]{15x+1}}{\sqrt[4]{x}}=3\Leftrightarrow \sqrt[4]{2-\dfrac{1}{x}}+\sqrt[4]{15+\dfrac{1}{x}}=3$.

Đặt $\sqrt[4]{2-\dfrac{1}{x}}=a;\sqrt[4]{15+\dfrac{1}{x}}=b\ (a\ge 0;b\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^4+b^4=17 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ a^4+(a-3)^4=17 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ a^4-6a^3+27a^2-54a+32=0\quad (*) \end{cases}$$

Ta có $(*)\Leftrightarrow a^4-6a^3+9a^2+18a^2-54a+32=0\Leftrightarrow \left(a^2-3a\right)^2+18\left(a^3-3a\right)+32=0$

$\Leftrightarrow \left(a^2-3a+2\right)\left(a^2-3a+16\right)=0\Leftrightarrow (a-1)(a-2)\left(a^2-3a+16\right)=0\Rightarrow a\in\{1;2\}\Rightarrow \dfrac{1}{x}\in\{-14;1\}\Rightarrow x=1$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=1;y=3$.

Câu 14. [ĐVH]: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)^2+\dfrac{4xy}{x+y}=1 \\ 4x+\sqrt{3x+y}=(3x+y-6)^2+4\sqrt{x+y} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+y>0 \\ 3x+y\ge 0 \end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow (x+y)^2-1+\dfrac{4xy}{x+y}-(x+y)=0\Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x-y)^2+x+y\right]=0\Leftrightarrow x+y=1$ (Do $x+y>0$)

Thay vào (2) ta được

$\sqrt{2x+1}=4x^2-24x+29\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-2=4x^2-24x+27\Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2}=(2x-3)(2x-9)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+2}=2x-9\,(*) \end{array}\right.$$

Xét (*) : Đặt $t=\sqrt{2x+1}\,(t\ge 0)$ ta được $\frac{1}{t+2}=t^2-10\Leftrightarrow t^3+2t^2-10t-21=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\ t=\frac{1+\sqrt{29}}{2}\\ t=\frac{1-\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.$

Do $t\ge 0$ nên $t=\frac{1+\sqrt{29}}{2}\Rightarrow x=\frac{13+\sqrt{29}}{4}\Rightarrow y=\frac{-9-\sqrt{29}}{4}$

Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{13+\sqrt{29}}{4},-\frac{9+\sqrt{29}}{4}\right)$.

Câu 15. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y}=2+\sqrt[3]{1-x}\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -1, y\ge 2$

$(2)\Leftrightarrow x+1+\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}-2(y-2)-\sqrt{y-2}=0$

Đặt $a=\sqrt{x+1}, b=\sqrt{y-2}\,(a,b\ge 0)$ ta được $a^2+a+ab-2b^2-b=0\Leftrightarrow(a-b)(a+2b+1)=0$

$\Leftrightarrow a=b$ (Do $a,b\ge 0$)

Với $a=b\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\sqrt{y-2}\Leftrightarrow x+1=y-2\Leftrightarrow y=x+3$ thay vào (1) được $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{1-x}=2$

Đặt $u=\sqrt{x+3}, v=\sqrt[3]{1-x}$ với $u\ge 0$ ta có $\begin{cases}u-v=2\\ u^2+v^3=4\end{cases}$

$\Rightarrow v^3+(v+2)^2=4\Leftrightarrow v^3+v^2+4v=0\Leftrightarrow v=0\Leftrightarrow x=1\Leftrightarrow y=4$ (thỏa mãn)

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x,y)=(1;4)$.

Câu 16. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)^2+1-x-y=\frac{1-4xy}{x+y}\\ 2x^2+y-2x=(x-y)\sqrt{y^2+2}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x+y\ne 0$

$(1)\Leftrightarrow(x+y)^2-4xy+1-(x+y)=\frac{1-4xy}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2-(x+y)+(1-4xy)\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=0$

$\Leftrightarrow(x+y-1)(x+y)+\frac{(1-4xy)(x+y-1)}{x+y}=0\Leftrightarrow(x+y-1)\left(x+y+\frac{1-4xy}{x+y}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=1\\ (x+y)^2+1-4xy=0\Leftrightarrow(x-y)^2+1=0\,(loai)\end{array}\right.$

Với $x+y=1$ thay vào (2) ta được $2x^2-3x+1=(2x-1)\sqrt{x^2-2x+3}$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+3}$ ta được $t^2-(2x-1)t+x^2-x-2=0$

Ta có $\Delta=(2x-1)^2-4(x^2-x-2)=9$ nên $\left[\begin{array}{l}t=\frac{2x-1+3}{2}=x+1\\ t=\frac{2x-1-3}{2}=x-2\end{array}\right.$

▪ Với $t=x+1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+3}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2-2x+3=x^2+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}$

▪ Với $t=x-2\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+3}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x^2-2x+3=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 17. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-xy-y^2-2x-y=0 & (1)\\\sqrt{x-2}+\sqrt{y+2}=3 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x-2\ge 0\\y+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\y\ge -2\end{cases}$

Phương trình (1) của hệ phương trình tương đương

$(2x+y)(x-y)-(2x+y)=0\Leftrightarrow(2x+y)(x-y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+y=0\\x-y-1=0\end{array}\right.$

Vì $x\ge 2,y\ge -2\Rightarrow 2x+y\ge 2.2-2=2>0$

Với $x-y-1=0\Rightarrow y=x-1$ thay vào phương trình (2) ta được

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{(x-2)(x+1)}=3\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-2}=2-x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\x^2-x-2=x^2-4x+4\end{cases}\Rightarrow x=3\Rightarrow y=2$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;2)$

Câu 18. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=x^2+y^2+(x-y)^2 & (1)\\\dfrac{x^2-3y+10}{x+1}=2\sqrt{5-y} & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}5-y\ge 0\\x+1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le 5\\x\ne -1\end{cases}$

Phương trình (1) của hệ phương trình tương đương

$x^3+y^3=2x^2+2y^2-2xy\Leftrightarrow(x+y)^3-3xy(x+y)=2(x+y)^2-6xy$

$\Leftrightarrow(x+y)^2(x+y-2)-3xy(x+y-2)=0\Leftrightarrow(x+y-2)(x^2-xy+y^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y-2=0\\x^2-xy+y^2=0\end{array}\right.$

Ta có $x^2-xy+y^2=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}>0$

Với $x+y-2=0\Rightarrow y=2-x$ thay vào phương trình (2) ta được

$\dfrac{x^2+3x+4}{x+1}=2\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x^2+3x+4=2(x+1)\sqrt{x+3}\Leftrightarrow(x+1)^2-2(x+1)\sqrt{x+3}+\left(\sqrt{x+3}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x+1-\sqrt{x+3}\right)^2=0\Leftrightarrow x+1=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\(x+1)^2=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2+x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\x=-2\ (loai)\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1)$

Câu 19. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2(x-y)=xy+\sqrt{y}\left(3x^2-y\sqrt{y}-y\right) & (1) \\ 3x^2+x=\sqrt{y}+y & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y\ge 0$

Phương trình (1) của hệ phương trình tương đương

$3x^2(x-y)=xy+3x^2\sqrt{y}-y^2-y\sqrt{y} \Leftrightarrow 3x^2\left(x-y-\sqrt{y}\right)-y\left(x-y-\sqrt{y}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-y-\sqrt{y}\right)\left(3x^2-y\right)=0$

- Với $x-y-\sqrt{y}=0 \Rightarrow x=y+\sqrt{y}$ thay vào phương trình (2) ta được

$3x^2+y+\sqrt{y}=y+\sqrt{y} \Leftrightarrow 3x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

- Với $3x^2-y=0 \Rightarrow y=3x^2$ thay vào phương trình (2) ta được

$3x^2+x=\sqrt{3x^2}+3x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}|x| \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(0;0)$

Câu 20. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+x}+x+1=\sqrt{xy}+y \\ \dfrac{y^2-5x}{y-2}=\sqrt{-x^2+2x+1} \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+x\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -1 \end{array}\right. \\ -x^2+2x+1\ge 0 \\ xy\ge 0 \\ y\ge 2 \end{cases}$ và $x^2+x+\left(-x^2+2x+1\right)\ge 0 \Rightarrow x\ge -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x\ge 0$

Nếu $x=0 \Rightarrow y=1$ không thỏa mãn hệ.

Nếu $x\ne 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}-\sqrt{xy}+x+1-y=0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x+1-y)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{xy}}+(x+1-y)=0$

$\Leftrightarrow x+1-y=0$ (do $x>0$) thay vào (2) được

$\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}=\sqrt{-x^2+2x+1} \Leftrightarrow x^2-3x+1-(x-1)\sqrt{-x^2+2x+1}=0$

Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+1}$ ta được $x^2-3x+1=x^2-2x-1-(x-2)$

Ta được $-t^2-(x-1)t-(x-2)=0 \Leftrightarrow t^2+(x-1)t+(x-2)=0 \Leftrightarrow (t-1)(t-x+2)=0$

Với $t=1 \Leftrightarrow x=2$ (do $x>0$)

Với $t=x-2 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2};\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Câu 21. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{y}+\sqrt{y}\right)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{y^2} \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}+x+2}+2=\sqrt[3]{x^2+\dfrac{1}{y}-8} \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ y>0 \\ \dfrac{x}{y}+x+2\ge 0 \end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{y^2}+x\sqrt{y}-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow \dfrac{xy-1}{y^2}+\dfrac{x(xy-1)}{x\sqrt{y}+\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow (xy-1)\left(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{x\sqrt{y}+\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow xy=1$

Thay vào (2) được $\sqrt{x^2+x+2}+2=\sqrt[3]{x^2+x-8}\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{x^2+x-8}=-2$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2+x+2} \\ b=\sqrt[3]{x^2+x-8} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^3=10 \\ a-b=-2 \end{cases}\Rightarrow (b-2)^2-b^3=0\Leftrightarrow (b+1)(b^2-2b+6)=0\Leftrightarrow b=-1$

Với $b=-1\Leftrightarrow x^2+x-8=-1\Leftrightarrow x^2+x-7=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{29}-1}{2}\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{29}-1}$ (do $x,y\ge 0$)

Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=\left(\dfrac{\sqrt{29}-1}{2},\dfrac{2}{\sqrt{29}-1}\right)$.

Câu 22. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{2y^2+1}=\sqrt{y+1}, \\ \sqrt{x+8}+\dfrac{9x}{\sqrt{2x-y+8}}-5\sqrt{y}=\sqrt{x}. \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\dfrac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2+1}+\sqrt{2y^2+1}}$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\dfrac{(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2+1}+\sqrt{2y^2+1}}\right]=0\Rightarrow x=y$

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{x+8}+\dfrac{9x}{\sqrt{x+8}}-6\sqrt{x}=0$

$\Leftrightarrow x+8+9x-6\sqrt{x^2+8x}=0\Leftrightarrow 5x+4=3\sqrt{x^2+8x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4\ge 0 \\ 25x^2+40x+16=9(x^2+8x) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{4}{5} \\ 16x^2-32x+16=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{4}{5} \\ (x-1)^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Câu 23. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)\left(\sqrt{2y+3}+1\right)+\sqrt{x+y+4}+1=0, \\ 2x^3+5x^2+4x+1=x(x+y+4)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}. \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện căn thức xác định.

$$(1) \Leftrightarrow x-y+1+\sqrt{x+y+4}+(x-y)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1+\sqrt{x+y+4}-\sqrt{2y+3}+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1+\frac{x-y+1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+\sqrt{2y+3}\right)=0 \Rightarrow y=x+1$$

$$(2) \Leftrightarrow 2x^3+5x^2+4x+1=x(2x+5)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2x^2+\frac{1}{x}+5x+4=(2x+5)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x}-2x\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}+x^2-5\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}+5x+4=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-x\right)^2-5\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-x\right)+4=0$$

Câu 24. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y+1+(4x-2y+5)\sqrt{3x+y+1}=3\sqrt{x+2y}, \\ \dfrac{2}{3\sqrt{-9x^2+y+9x-3}}=\dfrac{y+2}{19x+6}. \end{cases}$

Lời giải:

$$(1) \Leftrightarrow 2x-y+1+3\left(\sqrt{3x+y+1}-\sqrt{x+2y}\right)+2(2x-y+1)\sqrt{3x+y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-y+1+\frac{3(2x-y+1)}{\sqrt{3x+y+1}+\sqrt{x+2y}}+2(2x-y+1)\sqrt{3x+y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y+1)\left(1+\frac{3}{\sqrt{3x+y+1}+\sqrt{x+2y}}+2\sqrt{3x+y+1}\right)=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{-9x^2+11x-2}}=\frac{2x+3}{19x+6} \Leftrightarrow 38x+12=(6x+9)\sqrt{-9x^2+11x-2}$$

$$\Leftrightarrow -9x^2+11x-2-6x\sqrt{-9x^2+11x-2}+9x^2-9\sqrt{-9x^2+11x-2}+27x+14=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-9x^2+11x-2}-3x\right)^2-9\left(\sqrt{-9x^2+11x-2}-3x\right)+14=0$$

Câu 25. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-2)(x-y)}+\sqrt{xy}=2y & (1) \\ \sqrt{xy+x+5}-\dfrac{6x-5}{4}=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2y+1}-2\right)^2 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} xy \ge 0 \\ y \ge -\dfrac{1}{2} \\ x^2+(y-2)(x-y) \ge 0 \end{cases}$ (*).

Khi đó từ (1) $\Rightarrow y\ge 0$. Kết hợp với $xy\ge 0\Rightarrow x\ge 0$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)(x-y)}-y+\sqrt{xy}-y=0\Rightarrow \dfrac{x^2-y^2+(y-2)(x-y)}{\sqrt{x^2+(y-2)(x-y)}+y}+\dfrac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-y)(x+y+y-2)}{\sqrt{x^2+(y-2)(x-y)}+y}+\dfrac{y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0\Leftrightarrow (x-y)\left(\dfrac{x+2y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)(x-y)}+y}+\dfrac{y}{\sqrt{xy}+y}\right)=0$ (3)

Lại có (2) $\Leftrightarrow \sqrt{xy+x+5}-\dfrac{6x-5}{4}=\dfrac{1}{4}\left(2y+5-4\sqrt{2y+1}\right)\Leftrightarrow \sqrt{2y+1}+\sqrt{xy+x+5}=\dfrac{1}{2}(3x+y)$ (4)

Do $x,y\ge 0\Rightarrow \dfrac{1}{2}(3x+y)=\sqrt{2y+1}+\sqrt{xy+x+5}\ge 1+\sqrt{5}\Rightarrow x+\dfrac{y}{3}\ge \dfrac{2+2\sqrt{5}}{3}$.

Với $x,y\ge 0\Rightarrow x+2y\ge x+\dfrac{y}{3}\Rightarrow x+2y\ge \dfrac{2+2\sqrt{5}}{3}>2\Rightarrow x+2y-2>0$.

Do đó $\dfrac{x+2y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)(x-y)}+y}+\dfrac{y}{\sqrt{xy}+y}>0$ với $\forall x,y\ge 0$. Khi đó (3) $\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow y=x$.

Thế vào (4) ta được $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x^2+x+5}=2x\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}+\sqrt{\dfrac{1}{4}(2x+1)^2+\dfrac{19}{4}}=(2x+1)-1$

Đặt $\sqrt{2x+1}=t\ (t\ge 0)$. Phương trình mới $t+\sqrt{\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{19}{4}}=t^2-1$

$\Leftrightarrow 2t+\sqrt{t^4+19}=2\left(t^2-1\right)\Leftrightarrow \sqrt{t^4+19}=2\left(t^2-t-1\right)\Rightarrow t^4+19=4\left(t^2-t-1\right)^2$

$\Leftrightarrow 4\left(t^4-2t^3-t^2+2t+1\right)-t^4-19=0\Leftrightarrow 3t^4-8t^3-4t^2+8t-15=0$

$\Leftrightarrow 3t^3(t-3)+t^2(t-3)-t(t-3)+5(t-3)=0\Leftrightarrow (t-3)\left(3t^3+t^2-t+5\right)=0$ (5)

Với $x\ge 0$ có $t=\sqrt{2x+1}\ge 1\Rightarrow 3t^3+t^2-t+5=3t^3+5+t(t-1)>0$.

Khi đó (5) $\Leftrightarrow t-3=0\Leftrightarrow t=3\Rightarrow \sqrt{2x+1}=3\Leftrightarrow x=4\Rightarrow y=4$.

Thử lại $x=y=4$ thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: Hệ có nghiệm là $(x;y)=(4;4)$.

Câu 26. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+2y)(x-y-1)+\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}=0 & (1)\\ 3\sqrt{3x-2}+4\sqrt{2x+y-2}=5\sqrt[3]{x+5y+2}-3 & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} 2x^2+3xy+4y^2 \ge 0 \\ x \ge \dfrac{2}{3} \\ 2x+y \ge 2 \end{cases}$ (*)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (x+2y)(x-y)+\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}-(x+2y)=0$

$$\Rightarrow (x-y)(x+2y)+\frac{2x^2+3xy+4y^2-x^2-4y^2-4xy}{\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y)+\frac{x(x-y)}{\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x+2y+\frac{x}{\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+x+2y}\right)=0 \qquad (3)$$

Từ (2) $\Rightarrow 5\sqrt[3]{x+5y+2}-3 \ge 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x+5y+2} \ge \dfrac{3}{5} > 0 \Rightarrow x+5y+2>0.$

Kết hợp với $2x+y \ge 2 \Rightarrow (x+5y+2)+(2x+y)>2 \Rightarrow 3(x+2y)>0 \Rightarrow x+2y>0.$

Mặt khác $x \ge \dfrac{2}{3} > 0 \Rightarrow x+2y+\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+x+2y}>0.$

Do đó (3) $\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow y=x.$

Thế $y=x$ vào (2) ta được $3\sqrt{3x-2}+4\sqrt{3x-2}=5\sqrt[3]{6x+2}-3 \Leftrightarrow 5\sqrt[3]{6x+2}-7\sqrt{3x-2}-3=0.$

Đặt $\sqrt[3]{6x+2}=a;\ \sqrt{3x-2}=b \Rightarrow \begin{cases} 5a-7b-3=0 \\ a^3-2b^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5a-3}{7} \\ a^3-2\left(\dfrac{5a-3}{7}\right)^2-6=0 \end{cases}$

Ta có $a^3-2\left(\dfrac{5a-3}{7}\right)^2-6=0 \Leftrightarrow 49a^3-2(25a^2-30a+9)-294=0$

$$\Leftrightarrow 49a^3-50a^2+60a-312=0 \Leftrightarrow (a-2)(49a^2+48a+156)=0 \qquad (4)$$

Với $x \ge \dfrac{2}{3} \Rightarrow a=\sqrt[3]{6x+2}>0 \Rightarrow 49a^2+48a+156>0.$ Khi đó (4) $\Leftrightarrow a-2=0 \Leftrightarrow a=2$

$\Rightarrow \sqrt[3]{6x+2}=2 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1.$ Thử lại $x=y=1$ đã thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: Hệ có nghiệm là $(x;y)=(1;1).$

Câu 27. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2+x^2-y^2}=2x-y+1 & (1) \\ 1+\sqrt{x-y}+2\sqrt{x+2y-2}=3\sqrt[3]{x+3y-3} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R}).$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} (x+1)^2 + x^2 - y^2 \ge 0 \\ x + 2y - 2 \ge 0 \\ x - y \ge 0 \end{cases}$ (*).

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 - y^2 + x^2} - x = x - y + 1$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2 + x^2 - y^2 - x^2}{\sqrt{(x+1)^2 + x^2 - y^2} + x} = x - y + 1 \Leftrightarrow \frac{(x-y+1)(x+y+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + x^2 - y^2} + x} = x - y + 1 \quad (3)$$

Do $x - y \ge 0 \Rightarrow x - y + 1 \ge 1 > 0$ nên (3) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + x^2 - y^2} + x = x + y + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 \ge 0 \\ (x+1)^2 + x^2 - y^2 = (y+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -1 \\ 2x^2 + 2x = 2y^2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -1 \\ (x-y)(x+y+1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} 2x - y + 1 \ge 0 \\ x + 2y - 2 \ge 0 \\ \sqrt[3]{x + 3y - 3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 \ge 0 \\ x + 2y - 2 \ge 0 \\ x + 3y - 3 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (2x - y + 1) + (x + 2y - 2) + (x + 3y - 3) > 0 \Rightarrow 4(x+y) > 4 \Rightarrow x + y + 1 > 2 > 0.$

Do đó (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -1 \\ y = x \end{cases}$

Thế $y = x$ vào (2) ta được $1 + 2\sqrt{3x-2} = 3\sqrt[3]{4x-3}.$

Đặt $a = \sqrt{3x-2} \ge 0;\ b = \sqrt[3]{4x-3} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2a = 3b \\ 4a^2 - 3b^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3b-1}{2} \\ 4\left(\dfrac{3b-1}{2}\right)^2 - 3b^3 = 1 \end{cases}$

Ta có $4\left(\dfrac{3b-1}{2}\right)^2 - 3b^3 \Leftrightarrow 13b^3 - 9b^2 + 6b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$

▪ Với $b = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Loại vì $a \ge 0.$

▪ Với $b = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{4x-3} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$ Với $b = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{4x-3} = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{4} \Rightarrow y = \dfrac{11}{4}.$

Thử lại $(x;y) = \left\{(1;1),\ \left(\dfrac{11}{4}; \dfrac{11}{4}\right)\right\}$ đều thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: Hệ có nghiệm là $(x;y) = \left\{(1;1),\ \left(\dfrac{11}{4}; \dfrac{11}{4}\right)\right\}.$

Câu 28. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+3x-2y}=\sqrt{x+y^2}+\dfrac{x+1}{2} \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}=1+\sqrt{xy-5y+1} \end{cases}$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} x\ge 1; y\ge 2 \\ xy-5x+1\ge 0 \end{cases}$.

Khi đó:

$$PT(1)\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x-2y}=2\sqrt{x+y^2}+x+1\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x-2y}-2\sqrt{x+y^2}+\sqrt{x^2+3x-2y}-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2y-4y^2}{\sqrt{x^2+3x-2y}+2\sqrt{x+y^2}}+\frac{x-2y}{\sqrt{x^2+3x-2y}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left[\frac{x+2y-1}{\sqrt{x^2+3x-2y}+2\sqrt{x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x-2y}+x+1}\right]=0\ (1)$$

Do $x\ge 1; y\ge 2$: $(1)\Leftrightarrow x=2y$ thế vào PT (2) ta có: $\sqrt{2y-1}+\sqrt{y-2}=1+\sqrt{2y^2-5y+1}$

Đặt $a=\sqrt{2y-1}; b=\sqrt{y-2}\Rightarrow a+b=1+ab\Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2y-1}=1 \\ \sqrt{y-2}=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\ (loai) \\ y=3; x=6 \end{array}\right.$

Vậy $x=6; y=3$ là nghiệm của PT đã cho

Câu 29. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+3}=3y \\ 2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+3}=2x \end{cases}$

Lời giải:

Ta có: $PT(2)\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}-2x=\sqrt{y^2+3}\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\sqrt{y^2+3}\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}+2x=\dfrac{4}{\sqrt{y^2+3}}$

$\Rightarrow 4\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+3}+\dfrac{4}{\sqrt{y^2+3}}$ thế vào PT(1) ta có: $\dfrac{5\sqrt{y^2+3}}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2+3}}=3y$

$\Leftrightarrow 5(y^2+3)+4=8y\sqrt{y^2+3}\Leftrightarrow 5y^2+19=12y\sqrt{y^2+3}\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ 25y^4+190y^2+361=144y^4+432y^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=0$ là nghiệm của HPT đã cho.

Câu 30. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-4y+3\sqrt{y}=\sqrt{2x+y} \\ \sqrt{y-1}+\sqrt{x+1}+y^2+y=10 \end{cases}$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} y\ge 1; x\ge -1 \\ 2x+y\ge 0 \end{cases}$. Khi đó: $PT(1)\Leftrightarrow (x-4y)+\dfrac{8y-2x}{3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}}=0\Leftrightarrow (x-4y)\left(1-\dfrac{2}{3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}}\right)=0$

Do $y\ge 1\Rightarrow \dfrac{1}{3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}}\le \dfrac{1}{3+0}=\dfrac{1}{3}$ nên $PT(1)\Leftrightarrow x=4y$ thế vào PT(2) ta có:

$$\sqrt{y-1}+\sqrt{4y+1}+y^2+y=10\Leftrightarrow \sqrt{y-1}-1+\sqrt{4y+1}-3+y^2+y-6=0$$

$\Leftrightarrow (y-2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{4y+1}+3}+y+3\right)=0\Leftrightarrow y=2\Rightarrow x=8$ là nghiệm của PT

Vậy hệ có nghiệm là $(x;y)=(8;2)$

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN ĐẶC SẮC VỀ HÌNH PHẲNG OXY

Thầy Đặng Việt Hùng [ĐVH]

Câu 1. [ĐVH]: Trong mặt phẳng cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y=0$ và điểm *A*(–1; 3). Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật *ABCD* nội tiếp trong đường tròn (*C*) và có diện tích bằng 10.

Lời giải:

Tâm $I(1;2); R=\sqrt{5}$.

Do hình chữ nhật *ABCD* nội tiếp (C) tâm I nên I cũng là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD.

Suy ra *C*(3;1).

Gọi α là góc hợp bởi 2 đường chéo AC và BD suy ra $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha=10$

$\leftrightarrow \frac{1}{2}.2\sqrt{5}.2\sqrt{5}.\sin\alpha=10 \leftrightarrow \sin\alpha=1 \leftrightarrow \alpha=90^\circ$.

Nên ABCD là hình vuông. Phương trình AC : x + 2y – 5 = 0.

Suy ra phương trình BD là 2x – y = 0.

Tọa độ của B và D là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=0\\x^2+y^2-2x-4y=0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\5x^2-10x=0\end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật ABCD là (3 ;1) ; (0 ;0) và (2 ;4).

Câu 2. [ĐVH]: Cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x-2y-14=0, (C_2): x^2+y^2-4x+2y-20=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C_1) tại *A*, *B* cắt (C_2) tại *C*, *D* sao cho $AB=2\sqrt{7}; CD=8$

Lời giải:

Xét đường tròn (C_1) và (C_2) ta dễ dàng tìm được $d(I_1;\Delta)=d(I_2;\Delta)=3$ nên có các trường hợp về (Δ) như sau:

TH1: đường thẳng (Δ) song song với I_1I_2 và cách I_1I_2 1 khoảng =3.

Phương trình I_1I_2 là 2x + y – 3 = 0

Suy ra phương trình (Δ) 2x + y + m = 0

$d(\Delta; I_1I_2)=\frac{|m+3|}{\sqrt{5}}=3 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\sqrt{5}-3 \Rightarrow (\Delta): 2x+y+3\sqrt{5}-3=0\\m=-3\sqrt{5}-3 \Rightarrow (\Delta): 2x+y-3\sqrt{5}-3=0\end{array}\right.$.

TH2 : đường thẳng Δ qua trung điểm của I_1I_2 và khoảng cách từ I_1 và I_2 đến Δ =3

$M\left(\frac{3}{2};0\right)$ là trung điểm của I_1I_2.

Phương trình (Δ) qua M là : $a\left(x-\frac{3}{2}\right)+by=0$.

$d(I_1;\Delta)=\frac{\left|-\frac{a}{2}+b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\leftrightarrow\frac{35}{4}a^2+ab+8b^2=0$ (vô nghiệm do a và b không đồng thời =0)

Vậy có 2 đường thẳng Δ thỏa mãn là $2x+y+3\sqrt{5}-3=0$ và $2x+y-3\sqrt{5}-3=0$.

Đ/s: $2x+y+3\sqrt{5}-3=0;\ 2x+y-3\sqrt{5}-3=0$

Câu 3. [ĐVH]: Cho tam giác *ABC* biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ *A* lần lượt là 6*x* – 5*y* – 7 = 0 và *x* – 4*y* + 2 = 0. Tính diện tích tam giác *ABC* biết trọng tâm tam giác thuộc trục hoành và đường cao từ đỉnh *B* đi qua *E*(1; –4)

Lời giải:

Dễ dàng tìm được tọa độ điểm $A(2;1)$

$G(x_G;0)$ là trọng tâm tam giác, mà *G* thuộc trung tuyến suy ra tọa độ $G(-2;0)$

Gọi *M* là trung điểm của *BC* ta có: $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}\Rightarrow$ tọa độ $M\left(-4;-\frac{1}{2}\right)$

Ta có: $\begin{cases}M\left(-4;-\frac{1}{2}\right)\in BC\\ BC\perp AH:6x-5y-7=0\end{cases}\Rightarrow BC:5x+6y+23=0$

Giả sử: $B(6t-1;-3-5t),\ C(-7-6t;5t+2)\Rightarrow\overrightarrow{BE}=(2-6t;5t-1),\ \overrightarrow{AC}=(-9-6t;5t+1)$

Mà $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(2-6t)(-9-6t)+(5t-1)(5t+1)=0\Leftrightarrow 61t^2+42-19=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\frac{19}{61}\end{array}\right.$

+) Với $t=-1\Rightarrow B(-7;2),C(-1;-3)\Rightarrow BC=\sqrt{61}$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}d(A,BC).BC=\frac{1}{2}.\frac{|5.2+6.1+23|}{\sqrt{61}}.\sqrt{61}=\frac{39}{2}$

+) Với $t=\frac{19}{61}\Rightarrow B\left(\frac{53}{61};-\frac{278}{61}\right),C\left(-\frac{541}{61};\frac{217}{61}\right)\Rightarrow BC=\frac{99}{\sqrt{61}}$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}d(A,BC).BC=\frac{1}{2}.\frac{|5.2+6.1+23|}{\sqrt{61}}.\frac{99}{\sqrt{61}}=\frac{3861}{122}$

Đáp số: $S_{ABC(1)}=\frac{39}{2};\ S_{ABC(2)}=\frac{3861}{122}$

Câu 4. [ĐVH]: Cho tam giác *ABC* có *M*(1; –2) là trung điểm *AB*, trục *Ox* là phân giác góc *A*, đỉnh *B*, C thuộc đường thẳng đi qua *N*(–3; 0) và *P*(0; 2). Tìm *A*, *B*, *C* và diện tích tam giác.

Lời giải:

Điểm *A* thuộc *Ox*, gọi tọa độ $A(a;0)$

B, *C* thuộc đường thẳng qua $N(-3;0)$ & $(0;2) \to pt\ \ BC: 2x-3y+6=0$

Giả sử tọa độ $B(3b;2b+2)$, mà $M(1;-2)$ là trung điểm *AB* nên ta có hệ:

$$\leftrightarrow \begin{cases} a+3b=2 \\ 2b+2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow A(11;0)\ \ \&\ \ B(-9;-4)$$

Gọi phân giác góc *A* là *AD*, từ *M* kẻ đường thẳng d cắt *AD* và *AC* lần lượt tại *E* và *F*:

$\Rightarrow pt\ (d): x=1,\ E=(d)\cap AD \to E(1;0) \Rightarrow F(1;2)$ (do *M* và *F* đối xứng nhau qua *E*)

Suy ra phương trình *AC* là: $x+5y-11=0\ (do\ \ A,F\in AC)$.

Từ đây ta xác định được tọa độ điểm *C* là nghiệm của *AC* và *BC*: $C\left(\frac{3}{13};\frac{28}{13}\right)$

Diện tích tam giác *ABC* là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}.d(A;BC).BC=\frac{1}{2}.\frac{|2.11-3.0+6|}{\sqrt{13}}.\frac{40}{\sqrt{13}}=\frac{560}{13}$

Đáp số: $A(11;0),\ B(-9;-4),\ C\left(\frac{3}{13};\frac{28}{13}\right),\ S_{ABC}=\frac{560}{13}$

Câu 5. [ĐVH]: Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $d_1: 2x+y-4=0$ qua điểm *M*(1; –1) cắt đường thẳng $(d_2): x-y-1=0$ tại *A*, *B* sao cho $AB=2\sqrt{7}$.

Lời giải:

Gọi *I* là tâm đường tròn (C) cần tìm, $I\in(d_1)\Rightarrow I(t;4-2t)$

Vì đường tròn (C) cắt $(d_2): x-y-1=0$ theo dây cung $AB=2\sqrt{7}$. nên ta có:

$$\left(d_{(I/(d_2))}\right)^2=R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2=\frac{9t^2-30t+39}{2}\quad (*)$$

Mặt khác đường tròn (C) qua $M(1;-1)\to(1-t)^2+(2t-5)^2=R^2 \leftrightarrow 5t^2-22t+26=R^2\ (**)$

Từ $(*)\ \&\ (**)\Rightarrow \frac{9t^2-30t+39}{2}=5t^2-22t+26 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=13 \end{array}\right.$

Vậy có 2 đường tròn thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $(x-1)^2+(y-2)^2=9\,/\,(x-13)^2+(y+22)^2=585$

Câu 6. [ĐVH]: Viết phương trình đường thẳng *d* qua M(1; -1) cắt đường tròn tâm *I*(4; 0) bán kính *R* = 5 tại *A*, *B* sao cho *MA* = 3*MB*.

Lời giải:

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là VTPT của đường thẳng *d* qua $M(1;-1)$

$\Rightarrow pt(d): a(x-1)+b(y+1)=0 \leftrightarrow ax+by-a+b=0$

Vì $P_{(M/(C))}=IM^2-R^2=-15<0 \Rightarrow$ điểm *M* nằm trong đường tròn.

Mà: $P_{(M/(C))}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-15\Rightarrow -MA.MB=-15\Leftrightarrow 3MB.MB=15\Leftrightarrow MB=\sqrt{5}\Rightarrow MA=3\sqrt{5}$

$\Rightarrow AB=MA+MB=4\sqrt{5}$.

Vậy ta đi viết phương trình đường thẳng d qua M cắt đường tròn tâm $I(4;0)$ & $R=5$ đã cho theo dây cung $AB=4\sqrt{5}$

Do $AB=4\sqrt{5}\Rightarrow d_{(I/(d))}=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow \frac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2b \\ b=2a \end{array}\right.$

+) Với $a=-2b$, chọn $b=-1\to a=2\Rightarrow pt\ (d):2x-y-3=0$

+) Với $b=2a$, chọn $a=1\to b=2\Rightarrow pt\ (d):x+2y+1=0$

Đáp số: $(d_{1/2})$: $2x-y-3=0;x+2y+1=0$

Câu 7. [ĐVH]: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A* ngoại tiếp $(C):x^2+y^2=2$. Tìm tọa độ 3 đỉnh của tam giác biết điểm *A* thuộc tia *Ox*.

Lời giải:

(C) có $O(0;0)$, $r=\sqrt{2}$. Điểm *A* thuộc tia *Ox* suy ra $A(a;0)$, $a>0$.

Từ *O* hạ *OI* vuông góc *AB*, ta tính được: $OA=\frac{OI}{\sin 45^o}=\frac{r}{\sin 45^o}=2$

Ta có: $OA^2=1\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2\Rightarrow A(2;0)$

AB/AC qua $A(2;0)$ nên *AB/AC* có dạng: $a(x-2)+by=0$, $a^2+b^2\neq 0$.

Mặt khác: $\cos(AB/AC,Ox)=\cos 45^o=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\pm b$

Nên giả sử: $AB:x+y-2=0;\ AC:x-y-2=0$

Kẻ *OA* cắt *BC* tại $H(k,0)$ khi đó $OH=r\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{2}$

Mà $AH\perp BC=\{H\}\Rightarrow B,C\in x=\pm\sqrt{2}$

+) TH1: $B,C\in x=\sqrt{2}$ khi đó suy ra: $B\left(\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)$, $C\left(\sqrt{2};\sqrt{2}-2\right)$

+) TH2: $B,\ C\in x=-\sqrt{2}\Rightarrow B\left(-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$, $C\left(-\sqrt{2};-2-\sqrt{2}\right)$

Vậy có 2 bộ tọa độ 3 đỉnh tam giác *ABC* thỏa mãn yêu cầu là:

$$\boxed{A(2;0),\ B\left(\pm\sqrt{2};2\mp\sqrt{2}\right),\ C\left(\pm\sqrt{2};-2\pm\sqrt{2}\right)}$$

Câu 8. [ĐVH]: Cho hai đương tròn $\begin{cases}(C_1):x^2+y^2-4x+2y-4=0\\(C_2):x^2+y^2-10x-6y+30=0\end{cases}$ có tâm là *I* và *J*. Gọi *H* là tiếp điểm của (C_1) và (C_2). Gọi *d* là tiếp tuyến chung ngoài không qua *H* của (C_1) và (C_2). Tìm giao điểm *K* của *d* và *IJ*. Viết phương trình đường tròn qua *K* tiếp xúc với (C_1) và (C_2) tại *H*.

Lời giải:

Nhận xét: (C_1) có tâm $I(2;-1)$ & $R_1=3$ và (C_2) có tâm $J(5;3)$ & $R_1=2$

Ta có: $IJ=5=R_1+R_2$. Suy ra (C_1) & (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau. Mà H là tiếp điểm của 2 đường tròn:

$$\leftrightarrow 2\overrightarrow{HI}=-3\overrightarrow{HJ}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x_I-x_H)=-3(x_J-x_H)\\2(y_I-y_H)=-3(y_J-y_H)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=\dfrac{19}{5}\\y_H=\dfrac{7}{5}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{7}{5}\right)$$

K là giao của tiếp tuyến chung d và IJ nên ta có:

$$\Leftrightarrow 2KI=3KJ\leftrightarrow\begin{cases}2(x_I-x_K)=3(x_J-x_K)\\2(y_I-y_K)=3(y_J-y_K)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K=11\\y_K=11\end{cases}\Rightarrow K(11;11)$$

K thuộc đường tròn (C) và (C) tiếp xúc (C_1) & (C_2) tại H nên tâm M của (C) là trung điểm KH

$$\Rightarrow M\left(\dfrac{37}{5};\dfrac{31}{5}\right),\ R_{(C)}=MH=6\Rightarrow pt\ (C):\left(x-\dfrac{37}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{31}{5}\right)^2=36$$

Đáp số: $K(11;11)$, $(C):\left(x-\dfrac{37}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{31}{5}\right)^2=36$

Câu 9. [ĐVH]: Trong mặt phẳng *Oxy*, cho điểm *A*(1; 3) nằm ngoài $(C):x^2+y^2-6x+2y+6=0$. Viết phương trình đường thẳng *d* qua *A* cắt (*C*) tại hai điểm *B* và *C* sao cho *AB* = *BC*.

Lời giải:

Gọi *B(m, n)*

Do *A* nằm ngoài *(C)* và *AB* = *BC* nên dễ thấy *B* là trung điểm của *AC*

Ta có: $(C):x^2+y^2-6x+2y+6=0$ hay $(x-3)^2+(y+1)^2=4\Rightarrow I(3,-1),R=2$

$$\Rightarrow\overrightarrow{IA}=(-2,4)=2(-1,2)\Rightarrow\overrightarrow{n_{IA}}=(2,1)\Rightarrow(IA):2(x-1)+y-3=0:2x+y-5=0$$

Gọi M, N là giao điểm của IA với (C). Hoành độ giao điểm của M,N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x+y-5=0\\(x-3)^2+(y+1)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2x\\(x-3)^2+(6-2x)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2x\\5x^2-30x+41=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{15+2\sqrt5}{5},y=-\dfrac{5+4\sqrt5}{5}\\x=\dfrac{15-2\sqrt5}{5},y=\dfrac{-5+4\sqrt5}{5}\end{array}\right.\Rightarrow M\left(\dfrac{15+2\sqrt5}{5},-\dfrac{5+4\sqrt5}{5}\right);N\left(\dfrac{15-2\sqrt5}{5},\dfrac{-5+4\sqrt5}{5}\right)$$

Ta có:

$$AB.AC=AM.AN=16\Rightarrow 2AB^2=16\Rightarrow AB^2=8\Rightarrow(m-1)^2+(n-3)^2=8\Rightarrow m^2+n^2-2m-6n+2=0$$

Mà B nằm trên (C) nên ta có hệ

$$\begin{cases} m^2+n^2-2m-6n+2=0 \\ m^2+n^2-6m+2n+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2n+1 \\ 5n^2-6n+1=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=1, m=3 \\ n=\dfrac{1}{5}, m=\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(3,1) \Rightarrow C(5,-1) \Rightarrow d: x+y-4=0 \\ B\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{1}{5}\right) \Rightarrow C\left(\dfrac{9}{5},-\dfrac{13}{5}\right) \Rightarrow d: 7x+y-10=0 \end{array}\right.$$

Vậy đường thẳng cần tìm: $x+y-4=0$, $7x+y-10=0$

Câu 10. [ĐVH]: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho đường tròn (*T*) có phương trình: $x^2+y^2-8x+12=0$ và *I*(8; 5). Tìm tọa độ điểm *M* thuộc trục tung sao cho qua *M* kẻ được hai tiếp tuyến *MA*, *MB* đến đường tròn (*T*) đồng thời đường thẳng *AB* đi qua *I* (*A*, *B* là hai tiếp điểm).

Lời giải:

$(T): x^2+y^2-8x+12=0 \Rightarrow J(4,0), R=2$

Gọi $M(0,m) \Rightarrow \overrightarrow{MJ}=(4,-m) \Rightarrow (AB): 4(x-8)-m(y-5)=0$

Ta có: $\dfrac{|-16+5m|}{\sqrt{16+m^2}}=d(J/(AB))=\dfrac{R^2}{IM}=\dfrac{4}{\sqrt{16+m^2}} \Leftrightarrow |-16+5m|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=\dfrac{12}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M(0,4) \\ M\left(0,\dfrac{12}{5}\right) \end{array}\right.$

- $M(0,4) \Rightarrow \begin{cases} IM=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2} \\ (AB): x-y-3=0 \Rightarrow MH=d(M/(AB))=\dfrac{|-7|}{\sqrt{2}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}<IM \end{cases} \Rightarrow$ thỏa mãn
- $M\left(0,\dfrac{12}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} IM=\sqrt{4^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{34}}{5} \\ (AB)=4x-\dfrac{12}{5}y-20=0 \Rightarrow MH=d(M/(AB))=\dfrac{\left|\left(\dfrac{12}{5}\right)^2+20\right|}{\sqrt{4^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}}=\dfrac{161}{5\sqrt{34}}>MI \end{cases} \Rightarrow$ l

  oại

Đ/s: *M*(0; 4)

Câu 11. [ĐVH]: Cho 3 đường thẳng $\begin{cases} d_1: x+y+3=0 \\ d_2: x-y+4=0 \\ d_3: x-2y=0 \end{cases}$. Viết phương trình đường tròn có tâm *I* là giao điểm của d_1 và d_2 đồng thời cắt d_3 tại *AB* sao cho *AB* = 2.

Lời giải:

- $I=d_1\cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} x_I+y_I+3=0 \\ x_I-y_I+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I=-\dfrac{7}{2} \\ y_I=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

- $d(I/d_3)=\dfrac{\left|-\frac{7}{2}-2.\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1+2^2}}=\dfrac{9}{2\sqrt{5}}\Rightarrow R^2=\left(d(I/d_3)\right)^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=\dfrac{101}{20}$

Suy ra phương trình đường tròn cần tìm là: $\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{101}{20}$.

Đ/s: $\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{101}{20}$.

Câu 12. [ĐVH]: Cho các đường tròn $\begin{cases}(C_1):(x-1)^2+y^2=\dfrac{1}{2}\\(C_2):(x-2)^2+(y-2)^2=4\end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn (C_1) cắt đường tròn (C_2) theo dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

$$\begin{cases}(C_1):(x-1)^2+y^2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow I(1,0),R_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\(C_2):(x-2)^2+(y-2)^2=4\Rightarrow J(2,2),R_2=2\end{cases}$$

Gọi $(d):ax+by+c=0$

- $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=R_1=d(I/d)=\dfrac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow a^2+b^2=2(a+c)^2\,(1)$
- $\sqrt{R_2{}^2-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}=d(J/d)=\dfrac{|2a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Suy ra $d(J/d)=2d(I/d)\Rightarrow\dfrac{|2a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\dfrac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow|2a+2b+c|=2|a+c|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a+2b+c=2a+2c\\2a+2b+c=-2a-2c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2b=c\\4a+2b+3c=0\end{array}\right.$$

- $2b=c\Rightarrow(1):a^2+b^2=2(a+2b)^2\Leftrightarrow a^2+8ab+7b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\a=-7b\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b,c=2b\\a=-7b,c=2b\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(d):-x+y+2=0\\(d):-7x+y+2=0\end{array}\right.$

- $4a+2b+3c=0\Rightarrow(1):4a^2+(4a+3c)^2=8(a+c)^2\Leftrightarrow12a^2+8ac+c^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=-2a\\c=-6a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=-2a,b=a\\c=-6a,b=7a\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(d):x+y-2=0\\(d):x+7y-6=0\end{array}\right.$$

Vậy $(d):-x+y+2=0$; $-7x+y+2=0$; $x+y-2=0$; $x+7y-6=0$

Câu 13. [ĐVH]: Trong mặt phẳng *Oxy* cho ba đường thẳng $d_1:x-3y=0;d_2:2x+y-5=0;d_3:x-y=0$

Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông *ABCD* biết rằng $A\in d_1;C\in d_2;B,D\in d_3$.

Lời giải:

Gọi $A(3a,a),C(c,5-2c)$, I là tâm hình vuông ⇒ I là trung điểm của AC và thuộc BD

$$\Rightarrow \begin{cases} I\left(\dfrac{3a+c}{2},\dfrac{a+5-2c}{2}\right) \\ x_I=y_I \end{cases} \Rightarrow 3a+c=a+5-2c \Leftrightarrow 2a+3c=5(1)$$

Ta có: $\Rightarrow \begin{cases} I\left(\dfrac{3a+c}{2},\dfrac{a+5-2c}{2}\right) \\ x_I=y_I \end{cases} \Rightarrow 3a+c=a+5-2c \Leftrightarrow 2a+3c=5(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $a=1,c=1 \Leftrightarrow A(3,1);C(1,3) \Rightarrow I(2,2) \Rightarrow IA=\sqrt{2} \Rightarrow (I):(x-2)^2+(y-2)^2=2$

Tọa độ giao điểm của B,D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ (I):(x-2)^2+(y-2)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ (x-2)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=3 \\ x=y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(3,3),D(1,1) \\ B(1,1),D(3,3) \end{array}\right.$$

Vậy $A(3,1);C(1,3),B(3,3),D(1,1)$ hoặc $A(3,1);C(1,3);\ B(1,1),D(3,3)$

Câu 14. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông *ABCD* có các đỉnh $A(-1;2)$; $C(3;-2)$. Gọi *E* là trung điểm của cạnh *AD*, *BM* là đường thẳng vuông góc với *CE* tại *M* ; *N* là trung điểm của của *BM* và *P* là giao điểm của *AN* với *DM*. Biết phương trình đường thẳng *BM*: $2x-y-4=0$. Tìm tọa độ điểm *P*

Lời giải.

Gọi *I* là tâm hình vuông ta có $I(1;0)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-4)$ suy ra phương trình *BD*: $x-y-1=0$.

Do $IA=IB=IC=ID=\dfrac{AC}{2}=2\sqrt{2} \Rightarrow B,D\in(C):(x-1)^2+y^2=8$.

Tọa độ *B*, *D* thỏa mãn $\begin{cases} x=y+1 \\ (x-1)^2+y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(-1;-2),(3;2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-1;-2),D(3;2) \\ D(-1;-2),B(3;2) \end{array}\right.$

Lại có *BM*: $2x-y-4=0$ nên chọn $B(3;2),D(-1;-2)$; *N* là trung điểm *BM* nên *AN* song song với *CE*.

Tọa độ trung điểm $E(-1;0) \Rightarrow (CE):x+2y+1=0$; (*AN*): $x+2y-3=0$ và $M\in(CE):M(-2m-1;m)$.

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CE}=0 \Leftrightarrow m=-\frac{6}{5} \Rightarrow M\left(\frac{7}{5};-\frac{6}{5}\right) \Rightarrow DM:x-3y-5=0.$$

Tọa độ điểm *P* thỏa mãn $\begin{cases} x-3y-5=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\dfrac{19}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

Câu 15. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC* vuông tại *A* ngoại tiếp hình chữ nhật *MNPQ*. Biết các điểm *M*(–3; –1) và *N*(2; –1) thuộc cạnh *BC*, *Q* thuộc cạnh *AB*, *P* thuộc cạnh *AC*, đường thẳng *AB* có phương trình $x-y+5=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(5;0) \Rightarrow (BC)\equiv(MN):y=-1$, suy ra (*MQ*) qua *M* và vuông góc với *BC*: $x=-3$.

$Q\in(AB): x-y+5=0\Rightarrow Q(-3;2)$; $B\in(AB)\Rightarrow B(-6;-1)$.

(*NP*) đi qua *N* và vuông với (*BC*): $x=2$; (*PQ*) đi qua *Q* và song song với (*BC*): $y=2\Rightarrow P(2;2)$.

(*AP*) đi qua *P* và vuông góc với (*AB*): $x+y-4=0\Rightarrow A:\begin{cases}x+y-4=0\\x-y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$.

$C=(AP)\cap(BC)\Rightarrow C(5;-1)$. Vậy ta có $A\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right), B(-6;-1), C(5;-1)$.

Câu 16. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông *Oxy*, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-11=0$ và đường thẳng $d: 4x-3y+9=0$. Gọi *A; B* là hai điểm thuộc đường thẳng *d*, *C* là điểm thuộc đường tròn (*C*). Biết điểm $H\left(\frac{22}{5};\frac{11}{5}\right)$ là một giao điểm của *AC* với đường tròn (*C*), điểm $H\left(-\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$ là trung điểm của cạnh AB. Xác định tọa độ các điểm *A, B, C* biết diện tích tứ giác *AHIK* bằng 24 và hoành độ điểm *A* dương.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1), R=4$. Ta có $\overrightarrow{IH}=\left(\frac{12}{5};\frac{16}{5}\right)$ nên *IH* song song với *d*, $IH: 4x-3y-11=0$.

Ta có $d(I;AB)=4$ nên *d* tiếp xúc với (*C*), suy ra $d(K;IH)=d(H;AB)=4$.

$$S_{AHIK}=S_{IHK}+S_{AHK}=\frac{1}{2}.R.d(K;IH)+\frac{1}{2}.AK.d(H;AB)=24\Leftrightarrow\frac{1}{2}.4.4+\frac{1}{2}.AK.4=24\Leftrightarrow AK=8.$$

$$A(x;y);x>0\Rightarrow\begin{cases}4x-3y+9=0\\\left(x+\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{7}{5}\right)^2=64\\x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-3y+9=0\\y\in\left\{\frac{39}{5};-5\right\}\\x>0\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{18}{5};\frac{39}{5}\right).$$ Suy ra $B(-6;-5)$.

Phương trình đường AC: $7x+y-33=0\Rightarrow C\left(\frac{26}{5};-\frac{17}{5}\right)$ hoặc $C\left(\frac{22}{5};\frac{11}{5}\right)$.

Câu 17. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho điểm *A*(1; 0) và các đường tròn $(C_1): x^2+y^2=2$ và $(C_2): x^2+y^2=5$. Tìm tọa độ các điểm *B* và *C* lần lượt nằm trên (C_1) và (C_2) để tam giác *ABC* có diện tích lớn nhất, với $x_B<1$

Lời giải:

Nhận thấy khi diện tích tam giác *ABC* đạt giá trị lớn nhất thì *O* chính là trực tâm của tam giác *ABC*.
Và ta có: $OC\perp AB, OA\perp BC$. Khi đó gọi $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$ thì $x_B=x_C$ do $OA\perp BC$

Ta lại có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-1;y_B), \overrightarrow{OC}=(x_B;y_C), \overrightarrow{OB}=(x_B;y_B), \overrightarrow{AC}=(x_C-1;y_C)$

Mặt khác: $CO\perp AB\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CO}=0\Leftrightarrow x_B(x_B-1)+y_B.y_C=0\Leftrightarrow y_B.y_C=x_B-x_B^2$

$\Leftrightarrow y_B^2y_C^2=x_B^4-2x_B^3+x_B^2\,(*)$

Và $\begin{cases}x_B^2+y_B^2=2\\x_C^2+y_C^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_B^2=2-x_B^2\\y_C^2=5-x_B^2\end{cases}\quad\left(-\sqrt{2}<x_B<1\right)$

Thay vào $(*)$ ta có:

$\left(2-x_B^2\right)\left(5-x_B^2\right)=\left(x_B-x_B^2\right)^2 \Leftrightarrow 2x_B^3-8x_B^2+10=0 \Leftrightarrow \left(x_B+1\right)\left(x_B^2-5x_B+5\right)=0 \Leftrightarrow x_B=x_C=-1$

Khi đó tọa độ các điểm B và C cần tìm là: $B(-1;\pm1)$, $C(-1;\pm2)$

Câu 18. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc *Oxy* cho hình thoi *ABCD* có $\widehat{BAD}=60^0$. Trên các cạnh *AB*, *BC* lấy các điểm *M*, *N* sao cho *MB* + *NB* = *AB*. Biết $P\left(\sqrt{3};1\right)$ thuộc đường thẳng *DN* và đường phân giác trong của góc $\widehat{MDN}$ có phương trình là $d: x-\sqrt{3}y+6=0$. Tìm toạ độ đỉnh *D* của hình thoi *ABCD*.

Lời giải:

Giả thiết: $\widehat{BAC}=60^o \Rightarrow \Delta ABD$ & ΔCBD là các tam giác đều. Theo bài ta có: $AM=BN, BM=CN$

Ta có: $\begin{cases} \widehat{DAM}=\widehat{DBN}=60^o \\ AD=BD \\ AM=BN \end{cases} \Rightarrow \Delta ADM=\Delta BDN \Rightarrow \widehat{ADM}=\widehat{BDN}$

Tương tự ta có: $\Delta BMD=\Delta CND \Rightarrow \widehat{NDC}=\widehat{MDB}$

Từ trên suy ra $\widehat{MDN}=60^o$.

Gọi *Q* là điểm đối xứng của *P* qua đường phân giác: $d: x-\sqrt{3}y+6=0$. Suy ra điểm *Q* thuộc *DM*.

Suy ra tam giác *PDQ* là tam giác đều $\Rightarrow DP=PQ=2d\left(P,(d)\right)=2.\dfrac{\left|x_P-y_P\sqrt{3}+6\right|}{\sqrt{4}}=6$

Điểm $D\in(d): x-\sqrt{3}y+6=0 \Rightarrow D\left(\sqrt{3}d-6;d\right)$

Ta có: $\Rightarrow PD^2=\left(\sqrt{3}d-6-\sqrt{3}\right)^2+\left(d-\sqrt{3}\right)^2=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=3\sqrt{3}+1 \\ d=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D\left(3+\sqrt{3};3\sqrt{3}+1\right) \\ D\left(\sqrt{3}-6;1\right) \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm *D* thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $D\left(3+\sqrt{3};3\sqrt{3}+1\right)$, $D\left(\sqrt{3}-6;1\right)$

Câu 19. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình chữ nhật *ABCD*, đỉnh *B* thuộc đường thẳng $d_1: 2x-y+2=0$, đỉnh *C* thuộc đường thẳng $d_2: x-y-5=0$. Gọi *H* là hình chiếu của *B* xuống đường chéo *AC* . Biết $M\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{2}{5}\right)$; *K*(9; 2) lần lượt là trung điểm của *AH* và *CD*. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật *ABCD* biết hoành độ đỉnh *C* lớn hơn 4.

Lời giải:

Ta có: $B\in d_1 \Rightarrow B(b;2b+2)$, $C\in d_2 \Rightarrow C(c;c-5)(c>4)$

Gọi *E* là điểm đối xứng của *B* qua *C* nên $\rightarrow E(2c-b;2c-2b-12)$

Trong tam giác *ABE*, *CK* chính là đường trung bình nên *K* cũng là trung điểm của *AE*.

Trong tam giác *AHE* có *M*, *K* lần lượt là trung điểm *AH* và *AE* nên *MK* là trung bình của tam giác:

$\Rightarrow \overrightarrow{HE}=2\overrightarrow{MK}=\left(\frac{72}{5};\frac{16}{5}\right)\Rightarrow H\left(2c-b-\frac{72}{5};2c-2b-\frac{76}{5}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{CK}=(9-c;c+7),\overrightarrow{BC}=(c-b;c-2b-7),\overrightarrow{BH}=\left(2c-2b-\frac{72}{5};2c-4b-\frac{86}{5}\right),\overrightarrow{MC}=\left(c-\frac{9}{5};c-\frac{27}{5}\right)$

Lại có: BH vuông góc $AC(H\in AC)$, CK vuông góc BC:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{MC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2c^2-3bc+23b-23c+49=0\\ 4c^2-6bc+\frac{126}{5}b-46c+\frac{594}{5}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ \left[\begin{array}{l}c=4(L)\\ c=9\end{array}\right.\end{cases}$$

$\Rightarrow B(1;4),C(9;4)$, mà K là trung điểm $CD\Rightarrow D(9;0)$

Mặt khác, C là trung điểm BE, $E(17;4)$, $KA=KE\Rightarrow A(1;0)$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: $A(1;0)$, $B(1;4)$, $C(9;4)$, $D(9;0)$

Câu 20. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc *Oxy*, cho hình thoi *ABCD* ngoại tiếp đường tròn (*C*): $(x-5)^2+(y-6)^2=\frac{32}{5}$. Biết rằng các đường thẳng *AC* và *AB* lần lượt đi qua các điểm *M*(7; 8) và *N*(6; 9). Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi *ABCD*.

Lời giải:

Đường tròn $(C):\begin{cases}I(5;6)\\ R=\frac{4\sqrt{10}}{5}\end{cases}$ do đó $I(5;6)$ là tâm của hình thoi:

Ta có: AC qua $I(5;6),M(7;8)\Rightarrow\vec{u}_{AC}(2;2)\Rightarrow AC:x-y+1=0$

Đường thẳng BD qua $I(5;6)$ và vuông góc với AC nên phương trình $BD:x+y-11=0$

Gọi $\vec{n}_{AB}=(a;b)\Rightarrow AB:a(x-6)+b(y-9)=0,\left(\sqrt{a^2+b^2}\neq 0\right)$

Mặt khác $R=d(I;AB)\Rightarrow\sqrt{\frac{32}{5}}=\frac{|a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow(9a-13b)(3a+b)=0$

+) Với $9a=13b$ chọn $a=13,b=9\Rightarrow AB:13x+9y-159=0$

Khi đó tọa độ điểm $A=AB\cap AC:\begin{cases}13x+9y-159=0\\ x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{75}{11};\frac{86}{11}\right)\Rightarrow C\left(\frac{35}{11};\frac{46}{11}\right)$

Phương trình đường thẳng $CD//AB$ và qua $C\left(\frac{35}{11};\frac{46}{11}\right)\Rightarrow CD:13x+9y-79=0$

Khi đó tọa độ điểm $D=BD\cap CD:\begin{cases}13x+9y-79=0\\ x+y-11=0\end{cases}\Rightarrow C(-5;16)\Rightarrow D(15;-4)$

+) Với $3a=-b$ chọn $a=1,b=-3\Rightarrow AB:x-3y+21=0$

Khi đó tọa độ điểm $A = AB \cap AC : \begin{cases} x - 3y + 21 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(9;10) \Rightarrow C(1;2)$

Phương trình đường thẳng $CD // AB$ và qua $C(1;2) \Rightarrow CD : x - 3y + 5 = 0$

Khi đó tọa độ điểm $D = BD \cap CD : \begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(7;4) \Rightarrow D(3;8)$

Kết luận: Vậy có 2 hình thoi thõa mãn yêu cầu bài toán

Câu 21. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc *Oxy*, cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính bằng nhau và cắt nhau tại *A*(4;2) và *B*. Một đường thẳng đi qua *A* và *N*(7; 3) cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại *D* và *C*. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *BCD* biết rằng đường thẳng nối tâm O_1, O_2 có phương trình $x - y - 3 = 0$ và diện tích tam giác *BCD* bằng $\frac{24}{5}$

Lời giải:

Phương trình đường thẳng *CD* $\begin{cases} \text{qua } A(4;2) \\ \vec{u} = (3;1) \end{cases} \Rightarrow CD : x - 3y + 2 = 0$

Mặt khác *A*,*B*, đối xứng nhau qua đường thẳng *d:* $x - y - 3 = 0$

Gọi $B(a;b) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d = 0 \\ I \in d \end{cases}$ (với *I* là trung điểm *AB)*

Ta có: $\begin{cases} (a-4) + (b-2) = 0 \\ \dfrac{a+4}{2} - \dfrac{b+2}{2} - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow B(5;1)$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} CD.d(B;CD) = \frac{1}{2} CD.\frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{24}{5} \Rightarrow CD = \frac{12}{5}\sqrt{10}$$

Mặt khác nhận thấy ΔBCD cân tại *B* do $\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$ (cùng chứa cung *AB* và 2 đường tròn này bằng nhau)

Gọi *K* là hình chiếu vuông góc của *B* lên *CD* ta có: $K(3t-2;t) \Rightarrow \overrightarrow{BK}(3t-7;t-1) \Rightarrow \overrightarrow{BK}.\vec{u}_{CD} = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{11}{5} \Rightarrow K\left(\frac{23}{5};\frac{11}{5}\right)$$

Gọi $C(3u-2;u) \Rightarrow KC^2 = \left(3u - \frac{33}{5}\right)^2 + \left(u - \frac{11}{5}\right)^2 = \frac{72}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \Rightarrow C(1;1) \Rightarrow D\left(\frac{41}{5};\frac{17}{5}\right) \\ u = \frac{17}{5} \Rightarrow C\left(\frac{41}{5};\frac{17}{5}\right) \Rightarrow D(1;1) \end{array}\right.$

Kết luận: $B(5;1)$ $C(1;1), D\left(\frac{41}{5};\frac{17}{5}\right)$ hoặc $B(5;1), C\left(\frac{41}{5};\frac{17}{5}\right), D(1;1)$

Câu 22. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn $(C):\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+(y-1)^2=2$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông *ABCD* biết các đỉnh *B* và *C* thuộc đường tròn (*C*), các đỉnh *A* và *D* thuộc trục *Ox*.

Lời giải:

(C): tâm $I\left(\frac{5}{4};1\right), R=\sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng *d* là trung trực của AD, BC xác định:

Qua $I\left(\frac{5}{4};1\right)$ và vuông góc với $Ox \Rightarrow d: x=1$

Ta có: $d(I;AD)=1<R=\sqrt{2}$ do đó *AD* cắt *(C)*

Đặt độ dài cạnh của hình vuông là m ta có: $d(I;BC)=m-1<R$

Mặt khác $\left(\frac{BC}{2}\right)^2+\left[d(I;BC)\right]^2=R^2 \Rightarrow \frac{m^2}{4}+(m-1)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{-2}{5} \end{array}\right. \Rightarrow m=2$

Với $m=2$ ta có: $A(0;0), D(2;0), B(0;2), C(2;2)$ hoặc $A(2;0), D(0;0), B(2;2), C(0;2)$