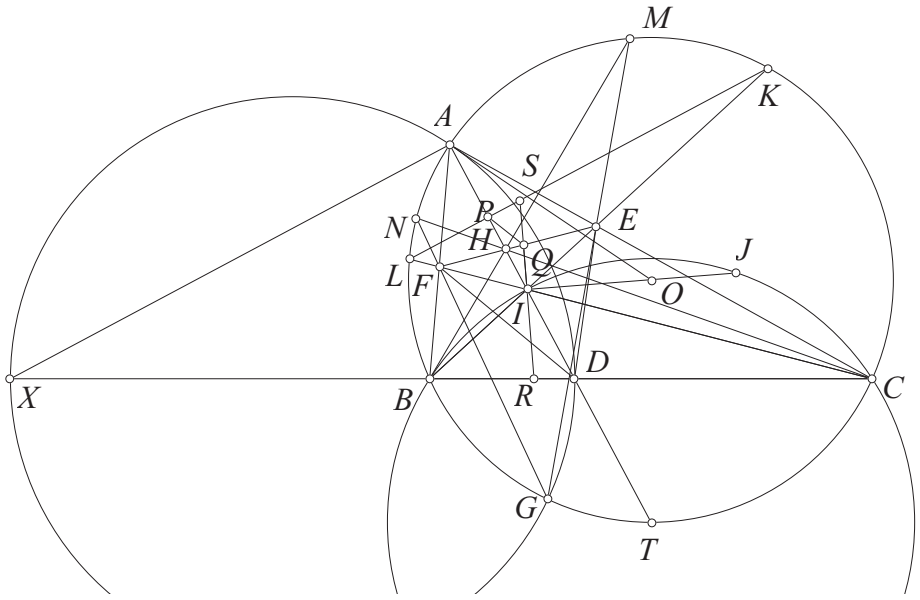
Lời giải và bình luận hai bài toán hình học chọn đội tuyển Việt Nam năm 2016

Tóm tắt nội dung

Bài viết trình bày lại lời giải của hai bài toán hình học chọn đội tuyển Việt Nam năm 2016 và đưa ra một số các mở rộng cho các bài toán đó.

Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2016 ngày thứ nhất có bài toán hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định, A chuyển động trên cung BC của (O). Các phân giác AD, BE, CF giao nhau tại I. Đường tròn qua D tiếp xúc với OA tại A cắt (O) tại G. GE, GF giao (O) lần thứ hai tại M, N. BM giao CN tại H.
a) Chứng minh rằng AH đi qua một điểm cố định.
b) BE, CF giao (O) lần lượt tại K, L. AH giao KL tại P. Q là một điểm trên EF sao cho $QP = QI$. J là điểm nằm trên (BIC) sao cho $IJ \perp IQ$. Chứng minh rằng trung điểm IJ chuyển động trên một đường tròn cố định.



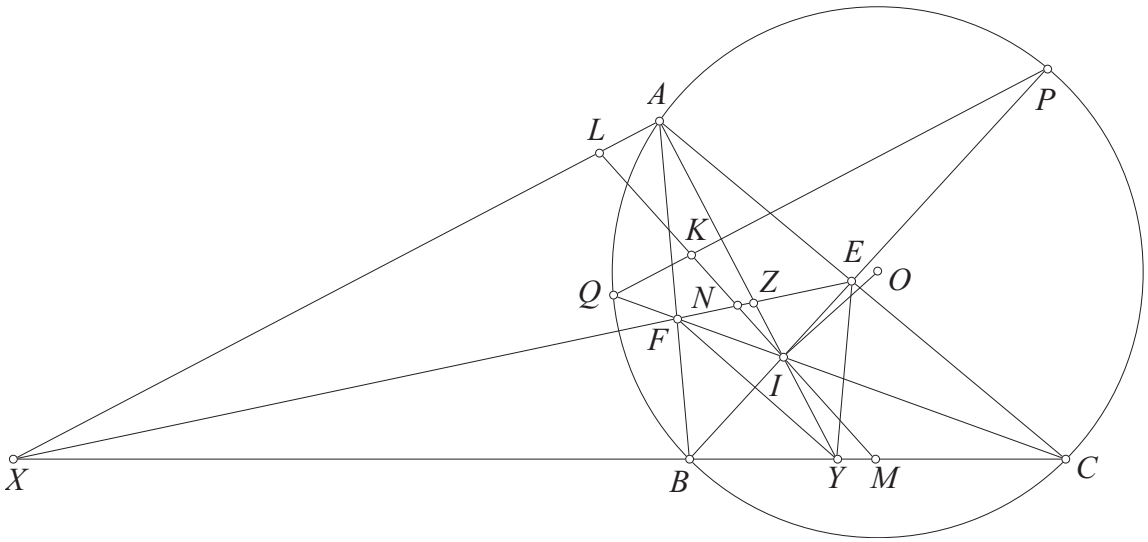
Hình 1.

Lời giải. a) Ta có chùm $B(AE, MC) = M(AE, BC) = (AG, BC) = -\frac{BA}{BG} : \frac{CA}{CG}$ và chùm $C(AF, NB) = N(AF, CB) = (AG, CB) = -\frac{CA}{CG} : \frac{BA}{BG}$. Gọi AX là phân giác ngoài góc $\angle BAC$ thì dễ thấy DX là đường kính của (ADG) nên $\angle XGD = 90°$. Lại có $(BC, DX) = -1$ nên GD là phân giác $\angle BGC$. Từ đó $\frac{GB}{GC} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Vậy $B(AE, MC) = -\frac{BA}{BG} : \frac{CA}{CG} = -\frac{CA}{CG} : \frac{BA}{BG} = C(AF, NB)$. Ta suy ra A, H, I thẳng hàng.
b) Gọi QI cắt KL, BC tại S, R. AI cắt (O) tại T khác A. Do tam giác QPS vuông tại P và $QP = QI$ nên $2IQ = IS = IR$. Ở đây $IS = IR$ theo bài toán con bướm. Vậy theo bài toán 2 dưới đây thì $IQ \perp IO$. Từ đó IJ đi qua (O) cố định. T cố định cũng là tâm (IBC) nên trung điểm IJ là hình chiếu của T lên IO. Từ đó trung điểm IJ nằm trên đường tròn đường kính OT cố định. □

Nhận xét. Trong bài toán trên hầu như hai ý không liên quan tới nhau. Điểm mấu chốt của chứng minh câu b) là tìm ra IJ đi qua điểm O cố định. Khi đó trung điểm IJ là hình chiếu của điểm cố định khác là T lên IJ luôn thuộc một đường tròn cố định. Công cụ sử dụng chính trong ý chứng minh câu b) là bài toán 2 dưới đây.

Trong lời giải phần b) bài toán trên tôi đã dùng bài toán 2 dưới đây như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với phân giác BE, CF cắt nhau tại I, tâm ngoại tiếp O. Đường thẳng qua I vuông góc OI cắt BC, EF tại M, N. Chứng minh rằng $IM = 2IN$.

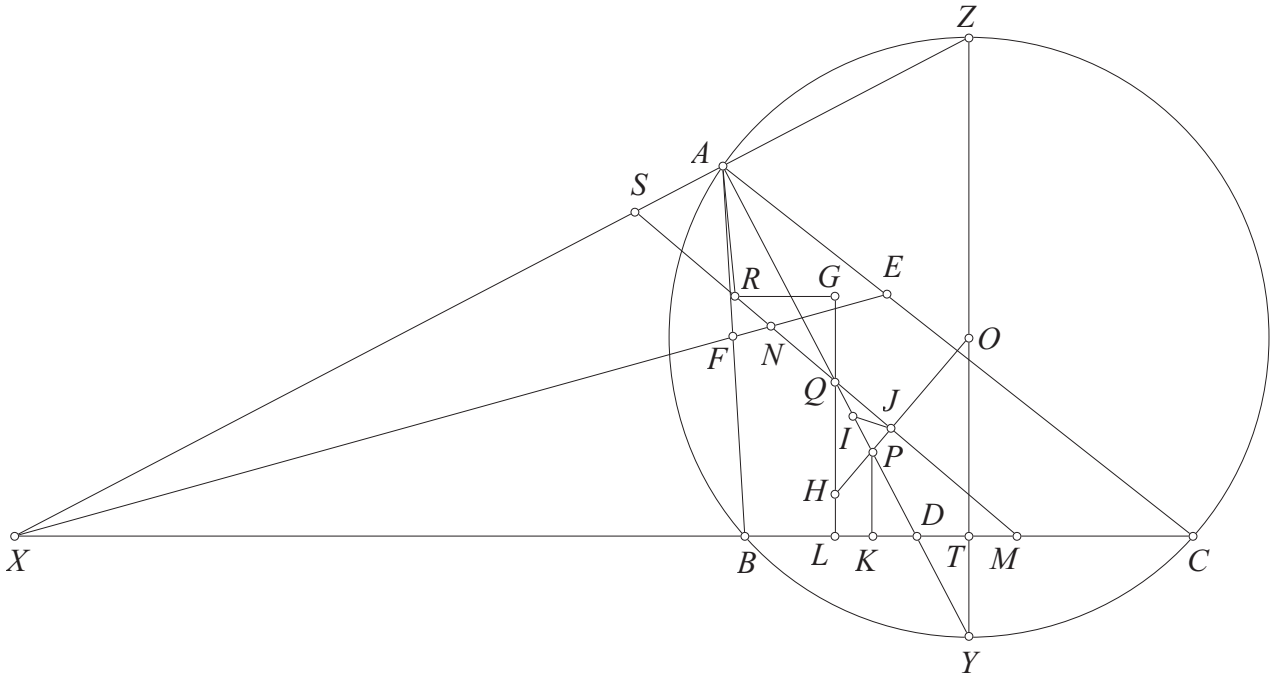


Hình 2.

Lời giải. Gọi BE, CF cắt (O) tại P, Q khác B, C. EF cắt BC tại X. AI cắt BC, EF tại Y, Z. MN cắt PQ, AS tại K, L. Theo bài toán con bướm dễ thấy $IM = IK$. Mặt khác dễ thấy PQ là trung trực AI. AX là phân giác ngoài góc A nên $IL = 2IK = 2IM$ hay $ML = 3MI$. Lại có hàng điều hòa cơ bản $(AI, YZ) = -1$ nên $X(AI, YZ) = -1$ chiếu chùm này lên đường thẳng MN thì hàng $(LI, MN) = -1$, từ đó $\frac{NL}{NI} = \frac{ML}{MI} = 3$ hay $IN = \frac{1}{4}IL = \frac{1}{2}IM$. Ta hoàn thành chứng minh. □

Bài toán 2 có nhiều mở rộng hay, trước hết tôi xin trình bày một mở rộng do mình tìm ra dựa trên bài chọn đội tuyển Đài Loan năm 2016 [2] như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và P, Q là hai điểm đẳng giác trên phân giác $\angle BAC$. QB, QC cắt CA, AB tại E, F. Đường thẳng qua Q vuông góc với OP cắt BC, EF tại M, N. K, L là hình chiếu của P, Q lên BC. Chứng minh rằng $\frac{QM}{QN} = 1 + \frac{QL}{PK}$.



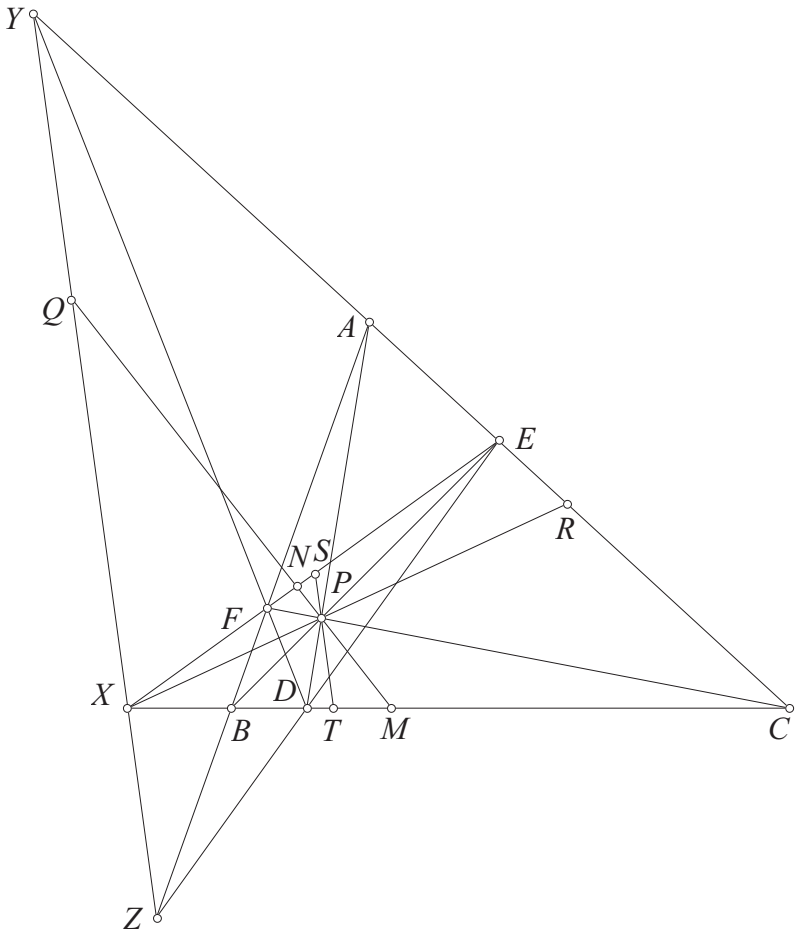
Hình 3.

Lời giải. Gọi AP cắt BC tại D và cắt (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại Y. YZ là đường kính của (O) và T là trung điểm AB. Gọi G đối xứng với K qua trung điểm I của PQ. Lấy R thuộc MN sao cho $GR \parallel BC$. EF cắt BC tại X. MN cắt AX tại S. OP cắt QR tại H. Ta có $YP.YQ = YB^2 = YT.YZ = YD.YA$, ta suy ra $\frac{YA}{YQ} = \frac{YP}{YD}$ hay $\frac{QA}{QY} = \frac{PD}{PY} = \frac{PK}{YT} = \frac{QG}{YT}$. Vậy $\frac{QA}{QG} = \frac{YQ}{YT} = \frac{YZ}{YP} = \frac{2YO}{YP} = \frac{2QH}{QP} = \frac{QH}{QI}$, từ đây $QA.QI = QH.QG = QR.QJ$. Ta suy ra hai tam giác QRA và QIJ đồng dạng. Từ đó dễ thấy R là trung điểm SQ. Ta lại có $(MN, SQ) = X(MN, SQ) = -1$ nên $\frac{NQ}{NS} = \frac{MQ}{MS}$ hay $\frac{NQ}{QS} = \frac{MQ}{MQ+MS}$, ta suy ra $\frac{QM}{QN} = \frac{MQ+MS}{QS} = \frac{2MR}{2QR} = \frac{LG}{QL} = \frac{QL+PK}{QL} = 1 + \frac{PK}{QL}$. Ta hoàn thành chứng minh. □

Nhận xét. Khi P, Q trùng nhau và trùng với tâm nội tiếp tam giác ABC ta thu được kết quả bài toán 2. Bài toán 2 còn có mở rộng thú vị khác như sau, tham khảo [3]

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O. P là một điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. DE, DF lần lượt cắt AB, AC tại Z, Y. Đường thẳng qua P vuông góc với YZ cắt EF, BC tại S, T. Chứng minh rằng $PT = 2PS$.

Sau đây tôi xin đưa ra lời giải của mình cho bài toán này



Hình 4.

Lời giải. Gọi EF cắt BC tại X thì X, Y, Z thẳng hàng, gọi XP cắt AC tại R. Ta lại dễ thấy $(AR, EC) = X(AR, EC) = X(PA, ED) = -1$ và $(AC, EY) = -1$. Vậy $(EC, YA) = 1 - (EY, CA) = 2$, ta suy ra $\frac{\overline{YE}}{\overline{YC}} = 2\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = -2\frac{\overline{RE}}{\overline{RC}}$ hay $(EC, YR) = -2$. Từ đó gọi đường thẳng bất kỳ qua P cắt BC, EF, YZ tại M, N, Q ta có $(MN, PQ) = X(MN, PQ) = (CE, RY) = (EC, YR) = -2$. Theo định lý Thales thì $\frac{\overline{PT}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{QX}}.\frac{\overline{QX}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} : \frac{\overline{NP}}{\overline{NQ}} = -2$. Ta thu được điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Các cách chứng minh các bạn có thể tham khảo thêm trong [3]. Trong chứng minh của bài toán đã bao hàm bài toán tổng quát là khi thay đường thẳng song song thành đường thẳng bất kỳ qua P.

Ta đi đến bài toán tổng quát như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O. P là một điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. DE, DF lần lượt cắt AB, AC tại Z, Y. Một đường thẳng bất kỳ qua P cắt BC, EF, YZ tại M, N, Q. Chứng minh rằng $\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = -2\frac{\overline{QM}}{\overline{QN}}$.

Tôi xin dẫn ra một hệ quả đơn giản tương tự bài toán 2 và cách chứng minh cũng có thể dùng bài toán con bướm giống như lời giải bài toán 2 mà không cần làm giống bài toán tổng quát

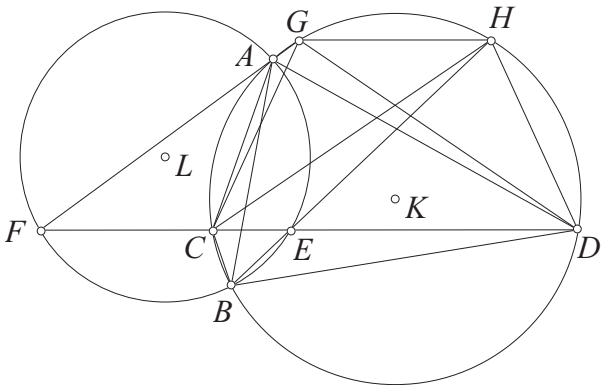
Bài toán 6. Cho tam giác ABC với đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. Đường thẳng qua H vuông góc với OH cắt BC, EF tại M, N. Chứng minh rằng $HM = 2HN$.

Trở về câu a) bài toán 1, bạn **Phạm Quang Toàn** trong [1] đã đưa ra một mở rộng thú vị như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. EF cắt BC tại G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADG cắt (O) tại Q khác A. QE, QF cắt (O) tại M, N khác Q. BM cắt CN tại R. Chứng minh rằng $\angle PAB = \angle RAC$.

Tôi xin đưa ra lời giải của mình cho bài toán mở rộng này, trước hết ta cần một bổ đề như sau

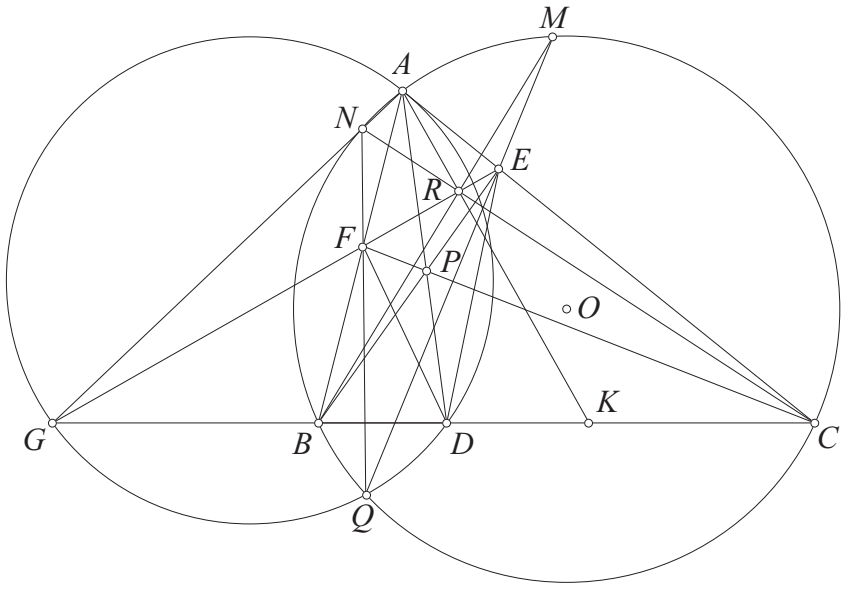
Bổ đề 7.1. Cho hai đường tròn (K) và (L) cắt nhau tại A, B. CD là một dây cung của (K) với C nằm trong (L). CD cắt (L) tại E, F với F nằm trong (K). Thì $\frac{EC}{ED}.\frac{FC}{FD} = \frac{AC}{AD}.\frac{BC}{BD}$.



Hình 5.

Chứng minh. Gọi AF, BE cắt (K) tại G, H khác A, B. Ta có $\angle CDH = \angle CBE = \angle CBA + \angle ABE = \angle AGC + \angle AFE = \angle GCD$. Từ đó $CDHG$ là hình thang cân. Theo tính chất quen thuộc của tứ giác nội tiếp ta có $\frac{EC}{ED} = \frac{CB.CH}{DB.DH}$ và $\frac{FC}{FD} = \frac{AC.GC}{AD.GD}$. Từ đó chú ý $CDHG$ là hình thang cân nên $AC = HD, CH = GD$ nên $\frac{EC}{ED}.\frac{FC}{FD} = \frac{CB.CH}{DB.DH}.\frac{AC.GC}{AD.GD} = \frac{AC}{AD}.\frac{BC}{BD}$. □

Hệ quả. Khi $(CD, EF) = -1$ thì $\frac{AC}{AD}.\frac{BC}{BD} = \frac{EC^2}{ED^2}$.

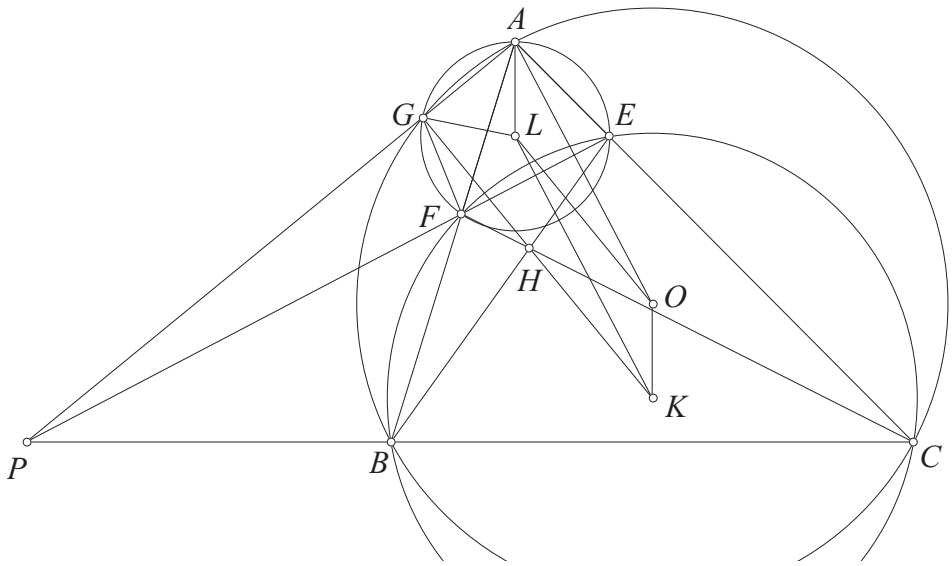


Hình 6.

Lời giải bài toán 6. Gọi AR cắt BC tại K. Ta có $(BC, KG) = A(BC, KG) = (FE, RG) = B(FE, RG) = B(AE, MC) = M(AE, BC) = (AQ, BC)$. Từ đó suy ra $\frac{KB}{KC} : \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC} : \frac{QB}{QC}$. Ta chú ý $(BC, DK) = -1$, áp dụng hệ quả bài trước cho đường tròn (ABC) và (ADG) thì $\frac{AB}{AC} \cdot \frac{QB}{QC} = \frac{DB^2}{DC^2}$. Từ đây ta suy ra $\frac{KB}{KC} \cdot \frac{DB}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}$, như vậy AK, AD đẳng giác trong $\angle BAC$. Ta hoàn tất chứng minh. □

Trước khi chuyển đến bài toán ngày thứ hai, tôi xin nhắc lại và chứng minh một tính chất quen thuộc liên quan tới điểm Miquel của tứ giác nội tiếp như sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và một đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác B, C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Gọi BE cắt CF tại H. Chứng minh rằng $\angle AGH = 90^\circ$.



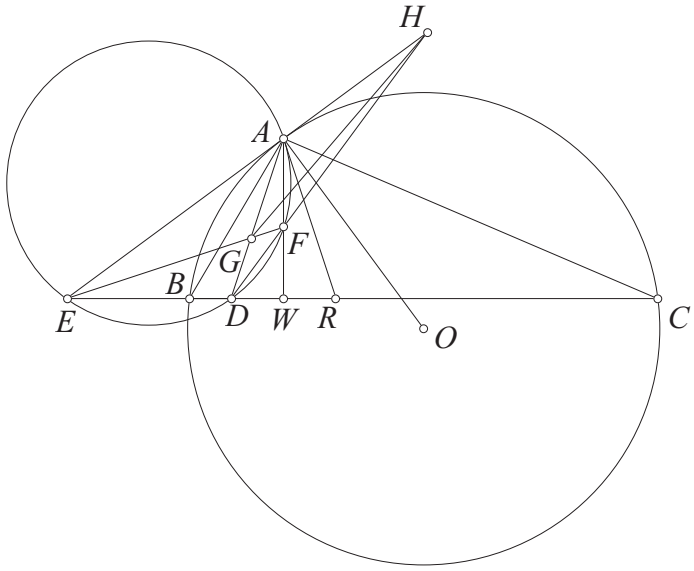
Hình 7.

Lời giải. Dễ thấy AG, EF, BC đồng quy tại P theo tính chất trục đẳng phương. Lại dễ có $AP \perp KH$ theo định lý Brokard. Gọi (L) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Dễ thấy $AL \parallel OK$ và $OA \parallel KL$. Từ đó tứ giác $ALKO$ là hình bình hành. Lại có A, G đối xứng nhau qua OL nên $GLOK$ là hình thang cân. Từ đó $GK \parallel OL \perp GA$. Vậy K, G, H thẳng hàng nên $\angle AGH = 90^\circ$. □

Nhận xét. Nội dung của bài toán chứng minh $\angle KGA = 90^\circ$ là bài toán thi IMO năm 1985 rất nổi tiếng. Ta cũng dễ thấy một hệ quả đơn giản khi tam giác ABC vuông tại A thì các đường tròn đường kính BC, EF, AH và PH có một điểm chung là điểm Miquel G.

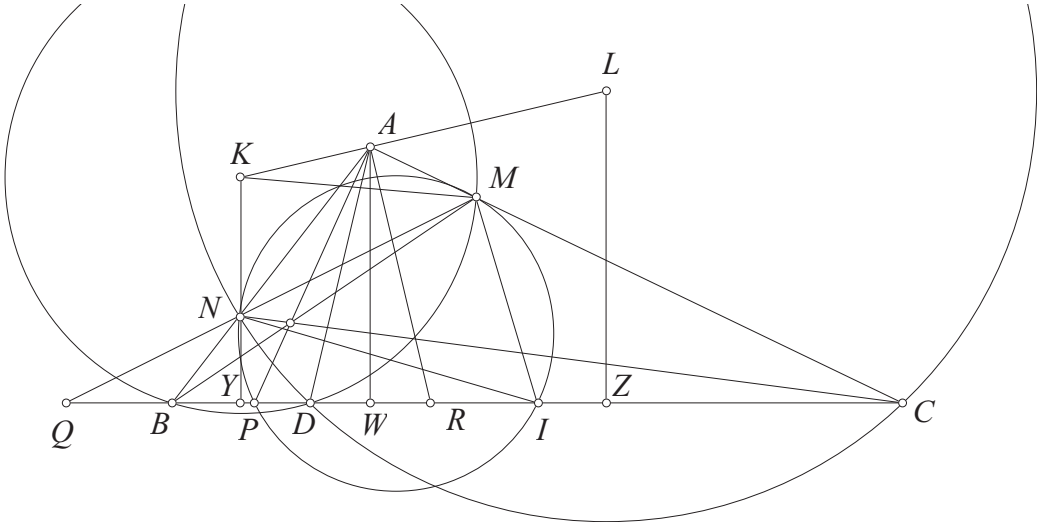
Chúng ta tiếp tục với đề thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2016 ngày thứ hai có bài toán hình học như sau

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nhọn có $\angle ACB < \angle ABC < \angle ACB + \frac{\angle BAC}{2}$. Lấy điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\angle ADC = \angle ACB + \frac{\angle BAC}{2}$. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A cắt BC tại E. Phân giác $\angle AEB$ cắt AD và cắt (ADE) tại G và F, DF giao AE tại H.
a) Chứng minh rằng các đường tròn đường kính AE, DF, GH có một điểm chung.
b) Trên phân giác ngoài $\angle BAC$ và trên tia AC lần lượt lấy các điểm K và M sao cho $KB = KD = KM$, trên phân giác ngoài $\angle BAC$ và trên tia AB lần lượt lấy các điểm L và N sao cho $LC = LD = LN$. Đường tròn đi qua M, N và trung điểm I của BC cắt BC tại P $(P \neq I)$. Chứng minh rằng BM, CN, AP đồng quy.



Hình 8.

Lời giải. a) Gọi AW, AR là đường cao và phân giác của tam giác ABC. Từ đó chú ý do tam giác AER cân nên EF vuông góc AR, ta suy ra $\angle RAW = 90^\circ - \angle ARW = \angle WEF = \angle DAF$. Từ đó A, F, W thẳng hàng. Áp dụng nhận xét bài toán trên cho tam giác WAE ta thu được điều phải chứng minh.



Hình 9.

b) Gọi AW, AR là đường cao và phân giác của tam giác ABC. Dễ thấy $\angle ARB = \angle ACB + \dfrac{\angle BAC}{2} = \angle ADC$ nên R và D đối xứng nhau qua W. Gọi Y, Z là trung điểm DB, DC thì $\frac{AK}{AL} = \frac{WY}{WZ} = \frac{2WY}{2WZ} = \frac{RB}{RC} = \frac{AB}{AC}$. Kết hợp K, L nằm trên phân giác ngoài nên $\angle KAB = \angle LAC$ do đó $\triangle KAB \sim \triangle LAC$ suy ra $\angle AKB = \angle ALC$. Mặt khác AK là phân giác ngoài của $\angle BAM$ và K thuộc trung trực BM nên tứ giác $AKBM$ nội tiếp. Tương tự $ALCN$ nội tiếp nên $\angle BMC = \angle AKB = \angle ALC = \angle BNC$ từ đấy suy ra $BCMN$ nội tiếp. Gọi MN cắt BC tại Q thì $QI.QP = QM.QN = QB.QC$ mà I là trung điểm BC nên $(BC, PQ) = -1$. Từ đây dễ thấy AP, BM, CN đồng quy. □

Nhận xét. Bài toán ở câu b) khá mới. Thực chất cả bài toán chỉ quy về chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp, sau đó ta xử lý bài toán bằng tính chất quen thuộc của hàng điều hòa.

Bài toán câu b) có một mở rộng như sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC với góc A tù và đường cao AH. Các điểm E, F thuộc BC sao cho $\angle EAB = \angle FAC$. Gọi P, Q là đối xứng của E, F qua H. Lấy K trên trung trực BP sao cho $AK \perp AF$. Lấy L trên trung trực CQ sao cho $AL \perp AE$. Lấy M, N lần lượt thuộc đoạn CA, AB sao cho $KM = KP$ và $LN = LQ$. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Tài liệu

[1] Đề chọn đội tuyển Việt Nam năm 2016 http://diendantoanhoc.net

[2] Topic Prove that A, X, O, Y are concyclic từ diễn đàn AoPS.

[3] Topic Metric relation XP=2YP từ diễn đàn AoPS.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com