HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng B

Bài B.1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác đinh bởi các điều kiện

$$u_1 = a,\ u_{n+1} = u_n + (u_n - 2016)^2 \quad \forall n \geq 1.$$

1. Tìm tất cả các giá trị thực của a để dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.
2. Tìm giới hạn của dãy số đó khi nó hội tụ.

Bài B.2. Cho α là một số thực và $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh các khẳng định sau:

1. f liên tục nếu và chỉ nếu $\alpha > 0$.
2. f khả vi nếu và chỉ nếu $\alpha > 1$.
3. f khả vi liên tục nếu và chỉ nếu $\alpha > 2$.

Bài B.3. Cho $a \geq 1$ là một số thực và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

- $(f(ax))^2 \leq a^3 x^2 f(x)$ với mọi số thực x;
- f bị chặn trên trong khoảng $(-1, 1)$.

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{a}$ với mọi số thực x.

Bài B.4. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi liên tục hai lần và thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $f''(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài B.5. Cho $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm được xác định bởi công thức

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad (\forall x > 1).$$

Hãy tìm tập tất cả các giá trị của f.

HẾT

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*