CHỨNG MINH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐA THỨC BẬC BỐN BA BIẾN THỰC TRÊN MÁY TÍNH

Nguyễn Quốc Anh

Điện lực Tân Châu

4-5-2016

Tóm tắt nội dung

Sự bùng nổ của công nghệ thông tin đã ảnh hưởng đến rất nhiều những ngành khoa học khác nhau, trong đó có toán học. Những vấn đề toán học như Đại số, Giải tích, Số học, ... đều có thể giải quyết bằng các chương trình máy tính rất nhiều nhưng giải các bài toán bất đẳng thức bằng phần mềm máy tính thì chưa phổ biến. Trong bài viết này ta sẽ tìm hiểu nhanh về việc dùng máy tính để chứng minh các bất đẳng thức, cụ thể là các bất đẳng thức đa thức bậc bốn ba biến thông qua chương trình *degree4* chạy trên phần mềm Maple, để có những cái nhìn đầu tiên về việc sử dụng máy tính trong chứng minh bất đẳng thức.

1 Bài toán mở đầu

Ta sẽ bắt đầu với bài toán sau đây.

Bài toán 1. *Hãy tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:*

$$f_4(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + k(x^3y + y^3z + z^3x) - (k+1)(xy^3 + yz^3 + zx^3) \geq 0$$

với x, y, z là các số thực. △

Phân tích. Khi đứng trước những bài toán kiểu này thì rắc rối đầu tiên mà ta thường gặp phải là: **Tìm k như thế nào? hay k nằm trong khoảng giá trị nào?**
Hãy giả sử rằng ta có một "công cụ" cho phép ta kiểm tra tính đúng sai của bất đẳng thức trên với từng giá trị của k, ta có thể sử dụng phương pháp chia đôi khoảng nghiệm để tìm ra giá trị gần đúng của k.

$$\begin{aligned}
k = 1 \quad & f(x,y,z) \geq 0 \quad \textit{true} \\
k = 2 \quad & f(x,y,z) \geq 0 \quad false \\
k = 1.5 \quad & f(x,y,z) \geq 0 \quad false \\
k = 1.25 \quad & f(x,y,z) \geq 0 \quad false \\
k = 1.125 \quad & f(x,y,z) \geq 0 \quad false \\
& \dots \\
k = \frac{125000001}{125000000} \quad & f(x,y,z) \geq 0 \quad false
\end{aligned}$$

Dễ nhận thấy giá trị của k ngày càng giảm dần về 1 và sau khi kiểm tra với hơn 29 giá trị khác nhau của k ta biết được rằng:

$$\frac{125000001}{125000000} > k \geq 1$$

Ta chọn $k = 2$ với độ chính xác lên đến 10 chữ số thập phân. Bấy nhiêu là đủ cho bài toán của chúng ta. Tất cả tính toán trên được thực hiện bởi chương trình *degree4*, ta mất khoảng 2 phút trên một máy tính sử dụng bộ xử lý Intel(R) Core(TM) i3 2.53 Ghz. Quay lại bài toán bây giờ ta sẽ chứng minh:

$$f_4(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + x^3y + y^3z + z^3x - 2(xy^3 + yz^3 + zx^3) \geq 0$$

với sự trợ giúp của máy tính ta có lời giải như sau:

$$f_4(x,y,z) = \sum \frac{1}{18}\left(3\,x^2 + 3\,xy - 3\,zx - 3\,y^2\right)^2 \geq 0$$

Tuy nhiên trong mục này ta sẽ không bàn nhiều về cách máy tính tìm ra lời giải như thế nào và phương pháp chia đôi khoảng nghiệm của chỉ có hiệu quả khi biết được giá trị tốt nhất của k nằm trong khoảng nào mà thôi, và ta sẽ khảo sát về vấn đề này ở các phần sau.

2 Hai bổ đề của giáo sư Vasile Cîrtoaje

Để hiểu được cách thức hoạt động của chương trình degree4, trong phần này của bài báo ta sẽ nói về hai bổ đề dành cho bất đẳng thức đa thức bậc bốn của giáo sư Vasile Cîrtoaje trên tạp chí JAPM [1].

2.1 Bổ đề 1

Bổ đề 1.
Đặt $f_4(a,b,c)$ là một đa thức thuần nhất đối xứng bậc 4.
Bất đẳng thức $f_4(a,b,c) \geq 0$ với mọi số thực a,b,c chỉ đúng khi và chỉ khi

$$\forall a \begin{cases} f_4(a,1,1) \geq 0 \\ f_4(a,0,0) \geq 0 \end{cases} \qquad \square$$

Một vài ứng dụng

Bài toán 2. *Cho a,b,c là các số thực, chứng minh rằng:*

$$10(a^4 + b^4 + c^4) + 64(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 33\sum ab(a^2 + b^2) \qquad \triangle$$

LỜI GIẢI.
Dựa trên Bổ đề 1 đã nêu ở mục trên, ta chỉ cần chứng minh bài toán trong hai trường hợp là $b = c = 1$ và $b = c = 0$.

[1] http://www.ijpam.eu/

- Trường hợp $b = c = 1$ bài toán trở thành:

$$\begin{aligned} 10a^4 - 66a^3 + 128a^2 - 66a + 18 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2(5a^2 - 3a + 1)(a-3)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

  Hiển nhiên đúng vì: $5a^2 - 3a + 1 = 5\left(a - \dfrac{3}{10}\right)^2 + \dfrac{11}{20} > 0$

- Trường hợp còn lại $b = c = 0$ bài toán trở thành: $10a^4 \geq 0$ hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{3} = b = c$ và các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 3. *Cho a, b, c là các số thực, chứng minh rằng:*

$$81(a^4 + b^4 + c^4) + 11(a+b+c)^4 \geq 42(a+b+c)^2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad \triangle$$

Lời giải.
Sử dụng Bổ đề 1 ta chỉ cần chứng minh bài toán trong hai trường hợp là $b = c = 1$ và $b = c = 0$.

- Trường hợp $b = c = 1$ bài toán trở thành:

$$\begin{aligned} 50\,a^4 - 80\,a^3 + 12\,a^2 + 16\,a + 2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2(5a+1)^2(a-1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

  Hiển nhiên đúng.

- Trường hợp còn lại $b = c = 0$ bài toán trở thành: $50a^4 \geq 0$ hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ và $a = \dfrac{-t}{3}, b = c = \dfrac{5t}{3}$. ■

Bài toán 4. *Cho các số thực a, b, c chứng minh rằng:*

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \sum ab\left(a^2 - ab + b^2 - c^2\right) \qquad \triangle$$

Lời giải.
Sử dụng Bổ đề 1 ta chỉ cần chứng minh bài toán trong hai trường hợp là $b = c = 1$ và $b = c = 0$.

- Trường hợp $b = c = 1$ bài toán trở thành: $a^2(a-2)^2 \geq 0$

- Còn $b = c = 0$ bất đẳng thức trở thành: $a^4 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$. ■

Bài toán 5. *Cho các số thực a, b, c chứng minh rằng bất đẳng thức sau đây luôn đúng:*

$$(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4) \qquad \triangle$$

Lời giải.
Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$f_4(a,b,c)=(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4-\frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)\geq 0$$

Ta có $f_4(a,1,1)=\frac{2}{7}(5a^4+28a^3+42a^2+28a+59)$
Ta xét hai trường hợp $a\geq 0$ và $a<0$.

- Trường hợp 1: $a\geq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.
- Trường hợp 2: $a<0$ ta có:

$$5a^4+28a^3+42a^2+28a+59=(5a^2-2a)(a+3)^2+9\left(a+\frac{23}{9}\right)^2+\frac{2}{9}>0$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=0$. ■

Bài toán 6. *Cho các số thực p,q,r thỏa mãn $1+p+q=2r$.*
Chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sum a^4+p\sum a^2b^2+qabc\sum a\geq r\sum ab(a^2+b^2)$$

với mọi số thực a,b,c nếu $1+p\geq r^2$. △

Lời giải.
Đặt $f_4(a,b,c)=\sum a^4+p\sum a^2b^2+qabc\sum a-r\sum ab(a^2+b^2)$.
Sử dụng Bổ đề 1 ta chỉ cần xét bài toán trong hai trường hợp.

- Trường hợp 1: $f_4(a,1,1)=(a-1)^2\left[(1+p-r)^2+1+p-r^2\right]\geq 0$. Đúng theo giả thiết.
- Trường hợp 2: $f_4(a,0,0)=a^4\geq 0$

Bất đẳng thức được chứng minh xong, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{r-1}=b=c$ và $a=0,b=c$ cùng các hoán vị. ■

Với sự trợ giúp của Bổ đề 1, ta đã giải quyết được rất nhiều những bài toán khó, thậm chí rất khó chỉ bằng một vài tính toán đơn giản. Bổ đề trên cũng "hé mở" cho ta về cách thức chương trình *degree4* hoạt động như thế nào, về cơ bản mà nói bổ đề trên đã cung cấp cho ta một công cụ kiểm tra tính đúng sai cho các bất đẳng thức đa thức bậc bốn ba biến đối xứng thuần nhất. Tuy nhiên bổ đề này vẫn chưa đủ để giúp chúng ta kiểm tra toàn bộ các bất đẳng thức đa thức bậc bốn ba biến, điều này cần đến sự trợ giúp của Bổ đề 2 mà ta sắp làm quen sau đây.

2.2 Bổ đề 2

Bổ đề 2.
Cho các số thực a,b,c và bộ số thực p,q,r,s thỏa mãn:

$$p+q-r-1\leq s\leq 2(r+1)+p+q-p^2-pq-q^2$$

Thì bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sum a^4+r\sum a^2b^2+sabc\sum a\geq p\sum a^3b+q\sum ab^3$$ □

Một vài bài toán minh họa

Bài toán 7. *Cho các số thực a, b, c chứng minh rằng:*

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2abc(a + b + c) \geq a^3b + b^3c + c^3a \qquad \triangle$$

LỜI GIẢI.
Dựa theo Bổ đề 2 ta chỉ cần chọn ra các hệ số p, q, r, s rồi tiến hành so sánh là được, công việc này tương đối đơn giản xin dành lại cho bạn đọc. ■

NHẬN XÉT. Thú vị là với sự trợ giúp của máy tính ta có phân tích sau:

$$\begin{aligned} f_4(a, b, c) &= a^4 + b^4 + c^4 + 2abc(a + b + c) - (a^3b + b^3c + c^3a) \\ &= \sum(2a^2 - b^2 - c^2 - ab + bc)^2 + 4(ab + bc + ca)^2 \end{aligned}$$

Với sự trợ giúp từ Bổ đề 2 giờ ta đã có đủ công cụ để có thể kiểm tra tính đúng sai của tất cả các bất đẳng thức đa thức bậc bốn ba biến thuần nhất. Và xét theo khía cạnh nào đó Bổ đề 2 còn mạnh và "nhanh" hơn so với việc sử dụng Bổ đề 1.

3 Chương trình degree4

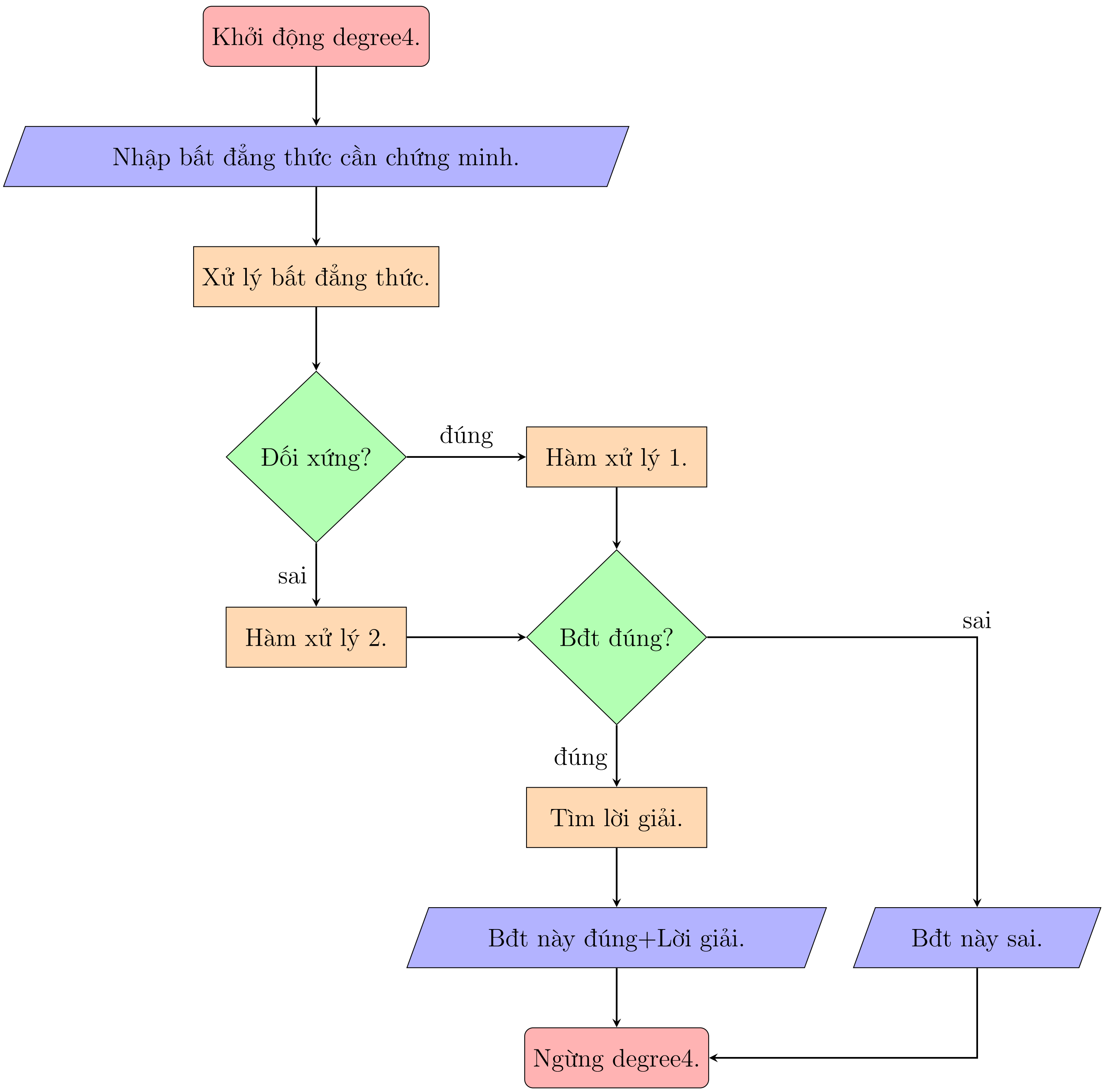
3.1 Giới thiệu về chương trình *degree4*

Chương trình *degree4* được viết chủ yếu bởi tác giả bằng ngôn ngữ Lập trình Maple[2] và một phần do bạn Tăng Hải Tuân viết.
Phiên bản đầu tiên *degree4* 1.0 của chương trình được viết vào năm 2013 khi tác giả vẫn còn đang là sinh viên năm nhất, nhưng phiên bản đầu tiên vẫn còn rất nhiều lỗi và khiếm khuyết cộng thêm việc học nên tác giả đành gác lại việc hoàn thiện chương trình đến phiên bản 2.0 và sự trợ giúp từ bạn Tăng Hải Tuân, chương trình đã vận hành "trơn tru" hơn nhưng vẫn không tránh những sai sót không đáng có. Đến phiên bản 3.0 ra đời vào khoảng cuối năm 2015 với sự góp ý "nhiệt tình" của anh Lê Phúc Lữ thì chương trình đã hoàn thiện và ra mắt bạn đọc.

3.2 *degree4* hoạt động như thế nào?

Sơ đồ khối sau đây sẽ cho bạn một cái nhìn ngắn gọn về cách thức mà degree4 hoạt động:

[2] Một phần mềm tính toán hình thức, của hãng Maplesoft (Symbolic Computation, Maplesoft)



3.3 Hướng dẫn sử dụng chương trình *degree4*

Tuy *degree4* được viết nên bởi nhiều chương trình con nhưng ta chỉ quan tâm đến một vài hàm chính quan trọng như *sgm*, *pro* và *prove4*.
Khởi động chương trình *degree4* sau khi khởi động Maple:
`> read "đường dẫn/degree4";`
Nhập bất đẳng thức:
`> f:=bất đẳng thức cần chứng minh;`
Kiểm tra bất đẳng thức và tìm lời giải:
`> prove4(f);`

3.4 Một vài ví dụ

Ví dụ 1. *Cho a, b, c là các số thực, chứng minh rằng:*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a) \qquad \triangle$$

Lời giải.
Thao tác máy tính:
`> f:=`$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$`;`

$$f := (a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a);$$

`> prove4(f);`

```
"This is a cyclic symmetric polynomial!"
"This inequality is true! Try to solving:"
"Can't give a solution."
"Can't give a solution."
"Can't give a solution."
```

$$\frac{1}{18}\left(3\,a^2-3\,ab-3\,ac-3\,b^2+6\,bc\right)^2 + \frac{1}{18}\left(-3\,ab+6\,ac+3\,b^2-3\,bc-3\,c^2\right)^2 + \frac{1}{18}\left(-3\,a^2+6\,ab-3\,ac-3\,bc+3\,c^2\right)^2$$

■

Ví dụ 2. *Cho các số thực a, b, c, chứng minh rằng:*

$$81\,a^4+81\,b^4+81\,c^4+11\,(a+b+c)^4 \geq 42\,(a+b+c)^2\left(a^2+b^2+c^2\right) \qquad \triangle$$

Lời giải.
Thao tác máy tính:
`> f:=`$81\,a^4+81\,b^4+81\,c^4+11\,(a+b+c)^4 \geq 42\,(a+b+c)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$`;`

$$f := 81\,a^4+81\,b^4+81\,c^4+11\,(a+b+c)^4 \geq 42\,(a+b+c)^2\,(a^2+b^2+c^2);$$

`> prove4(f);`

```
"This is a symmetric polynomial!"
"This inequality is true! Try to solving: "
"Can't give a solution."
"Can't give a solution."
"Can't give a solution."
```

$$\frac{1}{900}\left(150\,a^2-120\,ac-150\,b^2+120\,bc\right)^2 + \frac{1}{900}\left(-120\,ab+120\,ac+150\,b^2-150\,c^2\right)^2 + \frac{1}{900}\left(-150\,a^2+120\,ab-120\,bc+150\,c^2\right)^2$$

■

Ví dụ 3. *Cho a, b, c là các số thực, chứng minh rằng:*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 3\,ab\left(a^2-b^2+c^2\right)+3\,bc\left(a^2+b^2-c^2\right)+3\,ca\left(-a^2+b^2+c^2\right) \qquad \triangle$$

Lời giải.
Thao tác máy tính:
> `f:=`$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 3\,ab\left(a^2-b^2+c^2\right)+3\,bc\left(a^2+b^2-c^2\right)+3\,ca\left(-a^2+b^2+c^2\right)$`;`

$$f := (a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3\,ab\,(a^2-b^2+c^2)+3\,bc\,(a^2+b^2-c^2)+3\,ca\,(-a^2+b^2+c^2);$$

> `prove4(f);`

```
"This is a cyclic symmetric polynomial!"
"This inequality is true! Try to solving: "
"Can't give a solution."
"Can't give a solution."
"Can't give a solution."
```

$$\frac{1}{18}\left(3\,a^2-6\,ab+3\,ac-3\,b^2+3\,bc\right)^2 + \frac{1}{18}\left(3\,ab+3\,ac+3\,b^2-6\,bc-3\,c^2\right)^2 + \frac{1}{18}\left(-3\,a^2+3\,ab-6\,ac+3\,bc+3\,c^2\right)^2$$

$\blacksquare$

Ví dụ 4. *Cho a, b, c là các số thực chứng minh rằng:*

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad \triangle$$

Lời giải.
Thao tác máy tính: Nếu không thích ấn bất đẳng thức vào hàm f ta có thể nhập trực tiếp và dùng % để gọi bất đẳng thức vừa nhập.
Ta nhập bất đẳng thức cần chứng minh trực tiếp vào Maple:
> `f:=`$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$`;`

$$f := a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2);$$

> `prove(f);`

```
"This is a symmetric polynomial!"
"This inequality is false!"
```

$\blacksquare$

Nhận xét. Một phản chứng dễ thấy là $(a, b, c) = \left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$

Ví dụ 5. *Cho các số thực a, b, c chứng minh rằng:*

$$3(a^4+b^4+c^4)+\frac{51}{4}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+\frac{9}{2}\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right) \geq 9\left(a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3\right) \qquad \triangle$$

Lời giải.
Thao tác máy tính: sau khi nhập và chạy lệnh *prove4* ta thu được:

```
"This is a symmetric polynomial!"
"This inequality is true! Try to solving: "
"Can't give a solution."
"Can't give a solution."
"Can't give a solution."
```

$$3\left(a^2+b^2+c^2-\frac{3}{2}ab-\frac{3}{2}ca-\frac{3}{2}bc\right)^2$$

■

3.5 Cơ sở toán học

Qua các ví dụ ở trên hẳn các bạn không khỏi ngạc nhiên rằng cái gì đang chạy để đưa ra những lời giải như vậy? Tất nhiên đây là toán học và một chút phép màu đến từ Maple.

Lợi thế đến từ máy tính

Một trong những ưu điểm vượt trội của máy tính so với con người, đó là khả năng tính toán nhanh hơn hẳn. Tận dụng ưu điểm này ta có thể quy việc viết các bất đẳng thức này thành dạng tổng các bình phương bằng cách giải hệ. Tất nhiên nếu ta giải tay thì sẽ rất lâu, nhưng với sự trợ giúp của máy tính ta chỉ mất vài giây.
Ví dụ như việc phân tích:

$$f_4(a,b,c)=2(a^4+b^4+c^4)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-4(a^3b+b^3c+c^3a)-4(ab^3+bc^3+ca^3)$$

Ta giả sử $f_4(a,b,c)$ có thể phân tích thành dạng $\sum(ka+lb+oc)^4\geq 0$ trong đó k,l,o là bộ số thực cần tìm.
Việc phân tích trên có thể thực hiện được chỉ với vài dòng lệnh của Maple.

```
> f:=2*(a^4+b^4+c^4)+6(a^2*b^2+b^2*c^2+c^2*a^2)-4*(a^3*b+b^3*c+c^3*a)-4*(a*b^3+b*c^3+c*a^3);
> g:=(k*a+l*b+o*c)^4+(a*o+b*k+c*l)^4+(a*l+b*o+c*k)^4;
> Mm:=solve(subs(a=1,b=1,c=1,op(collect(f-g,[a,b,c],distributed))),k,l,o);
> subs(Mm[3],g);
```

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4$$

3.6 Một vài câu hỏi

Trong những dòng hồi đáp từ phía máy tính ngoài hai dòng đầu tương đối dễ hiểu thì những dòng hiển thị `"Can't give a solution."` mang ý nghĩa gì?
Trong quá trình viết nên chương trình tác giả đã viết thuật toán cho bốn kiểu phân tích bình phương khác nhau. Mỗi dòng `"Can't give a solution."` mang ý nghĩa rằng bất đẳng thức cần chứng minh không thể phân tích về dạng bình phương kiểu đó.
Các bạn có thể tham khảo ở phần mã nguồn chương trình ở các quy trình *solve01*, *solve02*, *solve03* và *solve04*.

Tại sao chỉ viết mã cho bốn loại phân tích bình phương? Thật ra có nhiều hơn bốn cách phân tích một bất đẳng thức đa thức bậc bốn về một dạng tổng bình phương, tuy nhiên việc viết quá nhiều mã sẽ khiến chương trình trở nên ì ạch và nặng nề. Song, các bạn có thể gửi thêm ý tưởng về các dạng phân tích bình phương cho tác giả theo địa chỉ email. Phân tích đó là duy nhất? Tất nhiên là không, hãy xét lại Ví dụ 1, ta đã có một phân tích khá thú vị là:

$$\begin{aligned} f_4(a,b,c) &= a^4+b^4+c^4+2abc(a+b+c)-(a^3b+b^3c+c^3a) \\ &= \sum(2a^2-b^2-c^2-ab+bc)^2+4(ab+bc+ca)^2 \end{aligned}$$

Nhưng thú vị hơn, đây vẫn chưa phải là phân tích duy nhất. Máy tính vẫn còn có thể đưa ra một phân tích khác dù cồng kềnh:

$$\begin{aligned} f_4(a,b,c) &= a^4+b^4+c^4+2abc(a+b+c)-(a^3b+b^3c+c^3a) \\ &= \frac{1}{2}\left(a^2-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}c^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}ca+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}c^2\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a^2+b^2+\frac{1}{2}ca-\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}c^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b^2+ca+\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}c^2\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ca+bc\right)^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ca+c^2\right)^2 \end{aligned}$$

Đoạn mã cốt lõi của toàn bộ chương trình là đoạn nào? Về phương diện người viết ra chương trình thì đoạn mã quy trình *prove4* là quan trọng nhất, đây là đoạn mã cốt lõi tạo nên cả chương trình. Như ta đã biết cả chương trình được xây dựng xung quanh hai bổ đề của giáo sư Vasile Cîrtoaje tuy nhiên để có thể phân loại bất đẳng thức theo đúng loại và sử dụng đúng bổ đề thì quan trọng hơn.

4 Khép lại và mở ra

Chương trình *degree4* đã minh họa phần nào cho các bạn hiểu thế nào là *Chứng minh một bất đẳng thức trên máy vi tính*, dù chương trình vẫn còn khá nhiều khiếm khuyết. Đơn giản mà nói ta cần một công cụ "kiểm tra" cho phép ta biết bất đẳng thức đó đúng hay sai, sau đó ta cần một công cụ "lời giải". Cả hai quy trình này đều cực kì phức tạp về mặt lý thuyết, tuy nhiên lại vô cùng dễ để chuyển từ "lý thuyết" sang thành một chương trình máy tính. Một lời giải kiểu "máy tính" thường thấy nhất là sử dụng bất đẳng thức cơ bản nhất $x^2 \geq 0$.

Tài liệu

[1] **Yang Lu**, *Recent advances in automated theorem proving on inequalities*, Journal of Computer Science and Technology, September 1999, Volume 14, Issue 5, pp 434-446.

[2] **Vasile Cirtoaje**, **Yuanzhe zhou**, *Necessary and sufficient conditions for cyclic homogeneous polynomial inequalities of degree four in real variables*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 9, Issue 1, Article 15, pp. 1-17, 2012.

[3] *Video hướng dẫn sử dụng*

[4] *Mathlinks*

[5] *Diễn đàn toán học*