HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM ĐÁP ÁN OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

CHỦ ĐỀ: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

PT.1 Bằng cách xét các giá trị tại -1 và 1, giả thiết $|ax+b| \le 1$ khi $|x| \le 1$ đem lại $|-a+b| \le 1$ và $|a+b| \le 1$.

(i) Từ bất đẳng thức tam giác, ta có $|2a| = |(a+b)-(-a+b)| \le |a+b|+|-a+b| \le 2$. Nghĩa là $|a| \le 1$.

(ii) Để chứng minh $|bx+a| \le 1$ với mọi $|x| \le 1$ ta chỉ cần kiểm tra tại $x = \pm 1$. Nói cách khác, ta cần kiểm tra rằng $|a+b| \le 1$ và $|a-b| \le 1$. Nhưng các bất đẳng thức này đã được thiết lập ở trên.

PT.2 Đặt $d = a+b+c, e = a-b+c$. Như vậy, theo giả thiết thì $|c|, |d|, |e| \le 1$.

(i) Để kiểm tra bất đẳng thức $|2ax+b| \le 4$, ta chỉ cần kiểm tra tại các giá trị $x = \pm 1$. Nói cách khác, ta cần kiểm tra rằng $|2a+b| \le 4$ và $|2a-b| \le 4$.

Từ các đẳng thức $d = a+b+c, e = a-b+c$ ta suy ra $a = \frac{1}{2}(d+e) - c, \quad b = \frac{1}{2}(d-e)$. Như vậy, $2a+b = (d+e) - 2c + \frac{1}{2}(d-e) = \frac{3}{2}d - 2c + \frac{1}{2}e$. Từ đó, theo bất đẳng thức tam giác,

$$|2a+b| \le \frac{3}{2}|d| + 2|c| + \frac{1}{2}|e| \le \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 4.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $|2a-b| \le 4$.

(ii) Ta có

$$cx^2 + bx + a = c(x^2-1) + \frac{d}{2}(1+x) + \frac{e}{2}(1-x).$$

Từ đó, dựa vào bất đẳng thức tam giác, ta có khi $|x| \le 1$,

$$
\begin{aligned}
|cx^2+bx+c| &= \left|c(x^2-1)+\frac{d}{2}(1+x)+\frac{e}{2}(1-x)\right| \\
&\le |x^2-1|+\frac{1}{2}|1+x|+\frac{1}{2}|1-x| \\
&= 1-x^2+\frac{1}{2}(1+x+1-x) = 2-x^2 \le 2.
\end{aligned}
$$

PT.3

(i) Dễ thấy: cả hai vế của đẳng thức cần chứng minh là không đổi khi ta hoán đổi vị trí của A và B, hoặc khi ta đổi dấu một trong hai số A, B. Vì thế, chỉ cần xét trường hợp $A \ge B \ge 0$; và chính trong trường hợp này,

$$|A+B|+|A-B| = A+B+A-B = 2A = 2\max\{A,B\} = 2\max\{|A|,|B|\}.$$

(ii) Xem

$$
\begin{cases}
\alpha = -a + b - c + d \\
\beta = -\dfrac{a}{8} + \dfrac{b}{4} - \dfrac{c}{2} + d \\
\gamma = \dfrac{a}{8} + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{2} + d \\
\delta = a + b + c + d
\end{cases}
$$

như một hệ phương trình với các ẩn số a, b, c, d. Giải hệ đó ta tìm được "nghiệm":

$$
\begin{cases}
a = -2\dfrac{\alpha}{3} + 4\dfrac{\beta}{3} - 4\dfrac{\gamma}{3} + 2\dfrac{\delta}{3} \\
b = 2\dfrac{\alpha}{3} - 2\dfrac{\beta}{3} - 2\dfrac{\gamma}{3} + 2\dfrac{\delta}{3} \\
c = \dfrac{\alpha}{6} - 4\dfrac{\beta}{3} + 4\dfrac{\gamma}{3} - \dfrac{\delta}{6} \\
d = -\dfrac{\alpha}{6} + 2\dfrac{\beta}{3} + 2\dfrac{\gamma}{3} - \dfrac{\delta}{6}.
\end{cases}
$$

Thay chúng vào $g(x) := 3ax^2+2bx+c$, ta có

$$g(x) \equiv -\frac{\alpha}{6}(12x^2-8x-1)+4\frac{\beta}{3}(3x^2-x-1)-4\frac{\gamma}{3}(3x^2+x-1)+\frac{\delta}{6}(12x^2+8x-1).$$

Nhưng theo giả thiết, $\max\{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|,|\delta|\} \le 1$, nên áp dụng bất đẳng thức tam giác và kết luận của bài toán PT. 3 (i), ta thấy nếu $|x| \le 1$ thì

$$
\begin{aligned}
|g(x)| &\le \frac{1}{6}(|12x^2-8x-1|+|12x^2+8x-1|)+\frac{4}{3}(|3x^2-x-1|+|3x^2+x-1|) \\
&= \frac{1}{3}\max\{|12x^2-1|,8|x|\}+\frac{8}{3}\max\{|3x^2-1|,|x|\} \le \frac{1}{3}\cdot 11+\frac{8}{3}\cdot 2 = 9.
\end{aligned}
$$

(iii) Thay các "nghiệm" a, b, c, d tìm được ở PT.3 (ii) vào $h(x) := dx^3 + cx^2 + bx + a$ ta suy ra

$$\begin{aligned} h(x) = &- 2\frac{\alpha}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1-x) + 4\frac{\beta}{3}(1-x^2)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &- 4\frac{\gamma}{3}(1-x^2)\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 2\frac{\delta}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1+x). \end{aligned}$$

Vậy, khi $|x| \le 1$, ta có đánh giá:

$$\begin{aligned} |h(x)| \ &\le \ \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1-x) + \frac{4}{3}(1-x^2)\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{4}{3}(1-x^2)\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1+x) \\ &= \ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{8}{3}(1-x^2) \\ &= \ 4 - 3x^2 \le 4. \end{aligned}$$

PT.4

(i) Ta có $a = \dfrac{1}{2}(d+e) - c, \quad b = \dfrac{1}{2}(d-e)$. Như vậy,

$$f(x) = \frac{d}{2}(x^{2n} + x) + \frac{e}{2}(x^{2n} - x) + c(1 - x^{2n}).$$

Theo giả thiết, $\max\{|c|, |d|, |e|\} \le 1$, nên dựa vào kết luận của bài toán PT. 3 (i), khi $|x| \le 1$ thì

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}(|x^{2n}+x|+|x^{2n}-x|)+|1-x^{2n}| = \max\{x^{2n}, |x|\}+1-x^{2n} = 1+|x|-x^{2n}. \quad (*)$$

Cách 1: Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho $2n$ số không âm:

$$x^{2n}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}, \frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}}_{2n-1 \text{ số}}$$

ta có

$$x^{2n} + \frac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} \ge 2n \sqrt[2n]{\frac{x^{2n}}{4^n n^{2n}}} = |x|.$$

Vì thế, $(*) \Rightarrow |f(x)| \le \dfrac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1$, đpcm.

Cách 2: Mặt khác, ta có thể khảo sát hàm số $y = g(t) = 1 + t - t^{2n}$ với $0 \le t \le 1$. Dễ thấy $g'(t) = 1 - 2nt^{2n-1} > 0$ khi $0 \le t < t_* := \dfrac{1}{\sqrt[2n-1]{2n}}$; $g'(t) < 0$ khi $t_* < t \le 1$. Vậy,

$$\begin{aligned}\max_{0\le t\le 1} g(t) &= g(t_*) = 1 + t_*(1 - t_*^{2n-1}) = 1 + t_*(2n-1)t_*^{2n-1} = 1 + (2n-1)t_*^{2n} \\ &= \frac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1.\end{aligned}$$

Từ đó, $(*)$ cho ta đpcm.

(ii) Khi $1 \le |x| \le M < \infty$, dựa vào $(*)$ và kết luận của bài toán PT. 3 (i), ta có:

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le \frac{1}{2}(|x^{2n} + x| + |x^{2n} - x|) + |1 - x^{2n}| = \max\{x^{2n}, |x|\} + x^{2n} - 1 \\ &= 2x^{2n} - 1 \le 2M^{2n} - 1.\end{aligned}$$

HẾT