

Câu 1 (1 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

Câu 2 (1 điểm).

a) Giải phương trình: $\log_2 x + \log_4 x = \log_3 x - \log_{12} x + \log_{15} x$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x + 1 + \sqrt{-3x^2 + 6x + 9}$.

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 2x}{\sin^3 2x + \cos^3 2x} dx$.

Câu 4 (1 điểm). Giải phương trình: $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$.

Câu 5 (1 điểm). Trong hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; 2; 4)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 4 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và (Q) cắt hai tia Ox, Oy tại 2 điểm B và C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Câu 6 (1 điểm). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AC = a\sqrt{3}$, $BC = 3a$, góc $ACB = 30^\circ$, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° , $(A'BC) \perp (ABC)$. Lấy điểm $H \in BC$ sao cho $BC = 3BH$ và mặt phẳng $(A'AH) \perp (ABC)$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ B đến $(A'AC)$.

Câu 7 (1 điểm).

a) Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con của A có chứa cả hai phần tử 0 và 9.

b) Giải phương trình sau trên tập hợp số phức: $\left(\frac{iz+3}{z-2i}\right)^2 - 4 = 3\frac{iz+3}{z-2i}$.

Câu 8 (1 điểm). Trong hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có phương trình đường thẳng AD là $(d): 3x - 4y - 7 = 0$. Gọi E là điểm nằm bên trong hình vuông ABCD sao cho tam giác EBC cân có góc $BEC = 150^\circ$. Viết phương trình đường thẳng AB biết điểm $E(2; -4)$.

Câu 9 (1 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+2)(2x-1-\sqrt{2(x+2y+1)}) + 4\sqrt{y-4} = \frac{(y-8)^2}{y-4\sqrt{y-4}} + 3(y-1) \\ 4xy - 4x - 16y + 2 + \sqrt{x} = \sqrt[3]{9x+28y+3} + \sqrt[4]{4y+1} \end{cases}$$

Câu 10 (1 điểm). Cho $a^2 + b^2 + 4 = 2a + 4b$. Chứng minh rằng:

$$A = \left| a^2 - b^2 + 2\sqrt{3}ab - 2(1+2\sqrt{3})a + (4-2\sqrt{3})b + 4\sqrt{3} - 3 \right| \leq 2.$$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu khi làm bài. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Câu 1. Khảo sát hàm số bậc 3 đơn giản, bạn đọc tự giải.

Câu 2.

a) Điều kiện xác định phương trình: $x > 0$

$$\log_2 x + \log_4 x = \log_3 x - \log_{12} x + \log_{15} x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_4 2 \cdot \log_2 x - \log_3 2 \cdot \log_2 x + \log_{12} 2 \cdot \log_2 x - \log_{15} 2 \cdot \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \left(1 + \frac{1}{2} - \log_3 2 + \log_{12} 2 + \log_{15} 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

b) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 3$

$$\text{Ta có: } y' = 1 + \frac{6-6x}{2\sqrt{-3x^2+6x+9}} = \frac{\sqrt{-3x^2+6x+9} + 3-3x}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+6x+9} = 3x-3 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $\max y = 6$ đạt được khi $x = 2$ và $\min y = 0$ đạt được khi $x = -1$.

Câu 3.

$$\text{Đặt } x = \frac{\pi}{4} - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ và } x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$$

$$\text{Ta có: } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{-\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-2t\right) + \cos^3\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 2t}{\cos^3 2t + \sin^3 2t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 2x}{\cos^3 2x + \sin^3 2x} dx$$

$$\text{Từ đó suy ra: } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 2x}{\sin^3 2x + \cos^3 2x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 2x}{\cos^3 2x + \sin^3 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy: } I = \frac{\pi}{8}.$$

Câu 4.

Điều kiện $\sin x \neq 0$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \Leftrightarrow \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x = 2 \sin x(1 + \cos x) \Leftrightarrow \cos x + 1 = 2 \sin x(1 + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \text{ (L)} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 5.

Vì $(Q) \parallel (P)$ nên $(Q): x + y + z + d = 0 \quad (d \neq 4)$

Giả sử $B = (Q) \cap Ox$ và $C = (Q) \cap Oy$

$$\Rightarrow B(-d; 0; 0), C(0; -d; 0) \quad (d < 0)$$

$$\text{Vì } S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = 6 \Rightarrow d = -2$$

$$\Rightarrow (Q): x + y + z - 2 = 0.$$

Câu 6.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (A'H) \perp (ABC) \\ (A'BC) \perp (ABC) \\ (A'H) \cap (A'BC) = A'H \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC)$$

Khi đó góc giữa cạnh bên $A'A$ và mặt đáy (ABC)

là góc $A'AH = 60^\circ$.

$$\text{Ta lại có: } AH = \sqrt{CH^2 + CA^2 - 2CH \cdot CA \cdot \cos 30^\circ} = a$$

$$\text{Do đó: } A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

Thể tích khối lăng trụ là:

$$V_{ABC.A'B'C'} = a\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} 3a\sqrt{3}a \cdot \sin 30^\circ \right) = \frac{9a^3}{4}$$

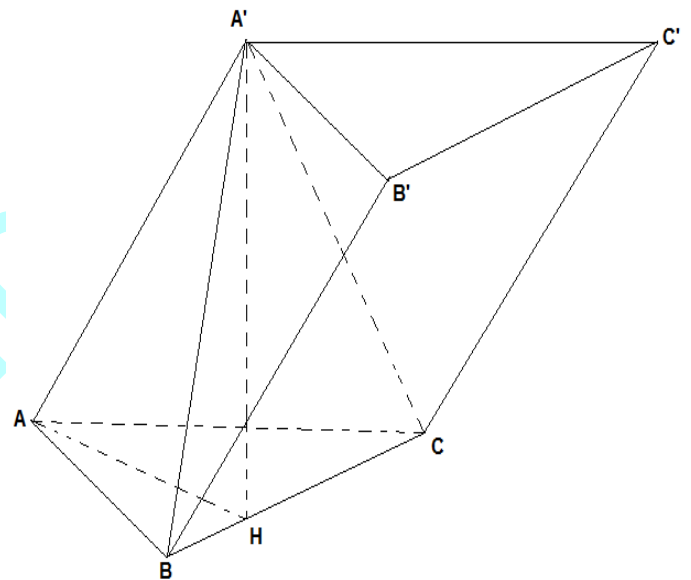
$$\text{Để thấy khối chóp } A'ABC \text{ có thể tích là } V_{A'ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3}{4}$$

$$\text{Ta có: } AC = a\sqrt{3}; A'A = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = 2a; A'C = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{7}$$

Suy ra diện tích tam giác $A'AC$ là:

$$S_{A'AC} = \sqrt{p(p - A'A)(p - A'C)(p - AC)}; \left(p = \frac{a\sqrt{3} + 2a + a\sqrt{7}}{2} \right) = a^2 \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } d(B; (A'AC)) = \frac{3V_{A'ABC}}{S_{A'AC}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a.$$



Câu 7.

- a) Số tập con của A có chứa cả hai phần tử 0 và 9 bằng số tập con của $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ vì nếu mỗi tập con của tập B nếu ta thêm vào hai phần tử 0 và 9 sẽ được tập con thỏa điều kiện bài toán.

Vậy số tập con của tập A có chứa cả hai phần tử 0 và 9 là $2^8 = 256$.

b) $\left(\frac{iz+3}{z-2i}\right)^2 - 4 = 3\frac{iz+3}{z-2i}$

Đặt $t = \frac{iz+3}{z-2i} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$

Với $t = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{17} + \frac{35}{17}i$

Với $t = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{2} + \frac{5}{2}i$

Câu 8.

Tam giác BEC cân và có góc $BEC = 150^\circ$

Suy ra tam giác BEC cân tại E .

Gọi H là hình chiếu của E lên AD

Suy ra H là trung điểm của AD và $HE = d(E; AD) = 3$

Đặt cạnh hình vuông là $AB = x$

Gọi I là trung điểm của BC , suy ra $BI = \frac{x}{2}; EI = x - 3$

Tam giác BIE vuông tại I có góc $EBI = 15^\circ$

Suy ra $\tan 15^\circ = \frac{EI}{BI} = \frac{2x-6}{x}$

Suy ra: $2 - \sqrt{3} = \frac{2x-6}{x} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng EH qua điểm E và vuông góc với AD , suy ra $EH: 4x + 3y + 4 = 0$

Đường thẳng $AB \parallel EH$ nên AB có dạng: $4x + 3y + m = 0$

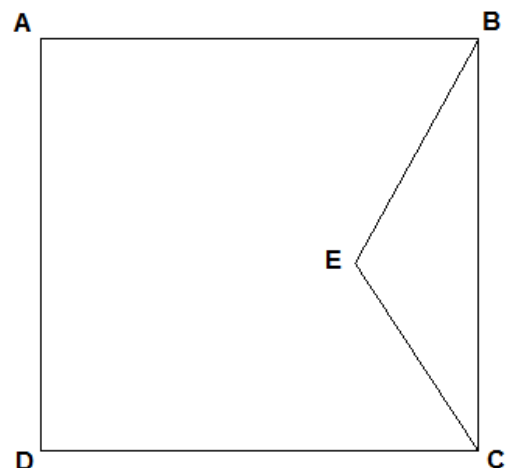
Ta có: $d(E, AB) = \frac{|m-4|}{5} = BI = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = 4 \pm 5\sqrt{3}$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $4x + 3y + 4 \pm 5\sqrt{3} = 0$

Câu 9.

Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 4; y \neq 8$

Ta có :



$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 - (x+2)\sqrt{2(x+2y+1)} + 4\sqrt{y-4} = \frac{(y-4\sqrt{y-4})(y+4\sqrt{y-4})}{y-4\sqrt{y-4}} + 3(y-1) \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 4y + 1 - (x+2)\sqrt{2(x+2y+1)} = 0 \Leftrightarrow (x+2)\left[(x+1) - \sqrt{2(x+2y+1)}\right] + x^2 - 4y - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+2)\left[(x+1) - \sqrt{2(x+2y+1)}\right] + \left[(x+1) - \sqrt{2(x+2y+1)}\right]\left[(x+1) + \sqrt{2(x+2y+1)}\right] = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left[(x+1) - \sqrt{2(x+2y+1)}\right]\left[2x+3 + \sqrt{2(x+2y+1)}\right] = 0 \Leftrightarrow (x+1) - \sqrt{2(x+2y+1)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow 4y = x^2 - 1
 \end{aligned}$$

Thay vào (2) ta được:

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = (7x^2 + 9x - 4) + \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$$

Xét $f(t) = t^3 + t$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó: } f(x+1) = f\left(\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}\right) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \Rightarrow y=6(n) \\ x=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{8} (l) \end{cases}$$

Vậy : $S = (5; 6)$

Câu 10.

Biến đổi điều kiện: $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a-1 = \sin \alpha \\ b-2 = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{Từ đó: } A = \left| \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha \right| = \left| \sqrt{3} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha \right| = 2 \left| \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \right| \leq 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b=\frac{5}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=2+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$