

LỜI GIẢI ĐỊNH LÝ FERMAX VỚI n CHẴN ($n \geq 4$)

Trước hết ta xem xét 2 định lý sau:

Định lý 1: Tổng của bình phương số lẻ với 1 chia hết cho 2, hiệu của bình phương số lẻ với 1 chia hết cho 8.

CM : Cho E là số lẻ bất kỳ. Ta có:

$$E^2 - 1 = (E+1)(E-1)$$

$((E+1)$ và $(E-1)$ là 2 số chẵn liên tiếp thì có 1 số chia hết cho 2 và 1 số chia hết cho 4. Vậy: $[(E+1)(E-1)]$ chia hết cho 8.

$(E^2 + 1)$ và $(E^2 - 1)$ là 2 số chẵn liên tiếp nên: $(E^2 - 1)$ chia hết cho 8 thì $(E^2 + 1)$ chỉ chia hết cho 2.

Định lý 2: Giảm ước tất cả ước số chung trong các nghiệm a, b và c của phương trình $a^n + b^n = c^n$, khi đó trong a, b và c có 1 nghiệm là số chẵn và 2 nghiệm là số lẻ.

CM: Nếu có 2 nghiệm số chẵn thì: Số chẵn $\pm$ số chẵn = Số chẵn; 3 số đều chẵn thì có ước số chung là 2. Số lẻ $\pm$ số lẻ = Số chẵn; Số chẵn $\pm$ số lẻ = Số lẻ.

CHỨNG MINH

Định lý Fermat: Phương trình $a^n + b^n = c^n$ không có nghiệm nguyên $\neq 0$ khi $n \geq 3$.

Điều kiện: a, b, c và n là số nguyên dương; $a < b < c$; a, b và c không có ước số chung $\Rightarrow$ Trong 3 nghiệm số a, b và c có 2 lẻ và 1 chẵn.

Đặt $n = 2m$, ta có:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (a^m)^2 + (b^m)^2 = (c^m)^2 \\ \Rightarrow & (a^m)^2 = (c^m)^2 - (b^m)^2 \\ \Rightarrow & \boxed{(a^m)^2 = (c^m - b^m)(c^m + b^m)} \quad (CT1) \end{aligned}$$

a^m ; b^m và c^m là ba cạnh của tam giác vuông, do vậy:

$$c^m - b^m < a^m \text{ và } c^m - a^m < b^m$$

Δ : So sánh $(c^m - b^m)$ với a^{m-1} và $(c^m - a^m)$ với b^{m-1}

Giả sử: $c = b + \beta$

$$\Rightarrow (c^m - b^m) = (b + \beta)^m - b^m \quad \text{và} \quad (c^m - a^m) = (b + \beta)^m - a^m$$

* Khai triển $(b + \beta)^m$ theo qui tắc nhị thức Newton, ta có :

$$\begin{aligned} (b + \beta)^m - b^m &= b^m + m\beta b^{m-1} + \dots + m\beta b^{m-1} + \beta^m - b^m \\ &= m\beta b^{m-1} + \dots + m\beta b^{m-1} + \beta^m > a^{m-1} \quad (\text{vì } b > a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ** \quad (b + \beta)^m - a^m &= b^m + m\beta b^{m-1} + \dots + m\beta b^{m-1} + \beta^m - a^m \\ &= b^m + m\beta b^{m-1} + \dots + m\beta b^{m-1} + \beta^m - a^m > b^{m-1} \quad (\text{vì } b > a) \end{aligned}$$

Vậy ta có 2 bất đẳng thức sau :

$$\boxed{a^{m-1} < (c^m - b^m) < a^m} \quad (\text{BĐT1})$$

$$\boxed{b^{m-1} < (c^m - a^m) < b^m} \quad (\text{BĐT2})$$

Từ CT1 và BĐT1 ta có thể tính b^m và c^m theo a như sau:

$$c^m - b^m = a^{m-1} \cdot T \quad (\text{pt1})$$

$$c^m + b^m = a^m \cdot Q \quad (\text{pt2})$$

- Với: $Q \cdot T = a$; $Q > 1$ và $T > 1$
- Một trong 2 số Q và T có thể là số thập phân hoặc phân số.

Giải hệ phương trình pt1 và pt2 ta tính được:

$$b^m = \frac{1}{2} (a^m \cdot Q - a^{m-1} \cdot T)$$

$$c^m = \frac{1}{2} (a^m \cdot Q + a^{m-1} \cdot T)$$

$$\Rightarrow b^m = \frac{1}{2} a^{m-1} (aQ - T) \quad (\text{CT2})$$

$$c^m = \frac{1}{2} a^{m-1} (aQ + T) \quad (\text{CT3})$$

$$\Rightarrow b^m = \frac{1}{2} T a^{m-1} (Q^2 - 1) \quad (\text{CT4})$$

$$c^m = \frac{1}{2} T a^{m-1} (Q^2 + 1) \quad (\text{CT5})$$

Xét trường hợp 1: a chẵn thì c và b phải là số lẻ. Theo công thức CT4 và CT5 thì v phải đều chẵn (hoặc ít nhất có 1 trong 2 là số chẵn

trong trường hợp $n=4$), do đó c và b **không nguyên vì theo điều kiện ban đầu là c và b đều lẻ**.

Xét trường hợp 2 : a lẻ thì c và b có 1 lẻ và 1 chẵn. Khi đó vế phải của CT5 lẻ $\Rightarrow c$ lẻ vì $(Q^2 + 1)$ chỉ chia hết cho 2; vế phải của CT4 chẵn vì $(Q^2 - 1)$ chia hết cho 8. Như vậy cả a , b và c đều thỏa mãn điều kiện chẵn lẻ của 3 nghiệm. Trong trường hợp này ta giữ nguyên giá trị của a , b và c nhưng đổi vị trí của a và b ; khi đó ta có phương trình sau :

$$\Rightarrow (a^m)^2 + (b^m)^2 = (c^m)^2$$

$$\Rightarrow (b^m)^2 = (c^m)^2 - (a^m)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(b^m)^2 = (c^m - a^m)(c^m + a^m)} \quad (CT6)$$

Dựa vào CT6 và BĐT2 ta lập hệ phương trình tính a và c theo b ; giải hệ phương trình ta có:

$$a^m = \frac{1}{2} P b^{m-1} (O^2 - 1) \quad (P.O=b) \quad (CT7)$$

$$c^m = \frac{1}{2} P b^{m-1} (O^2 + 1) \quad (CT8)$$

Nếu phương trình $a^n + b^n = c^n$ có nghiệm nguyên thì khi đổi chỗ b và a thì công thức tính a^m và c^m theo b vẫn phải đúng. Trong thực tế, b chẵn nên vế phải của cả CT7 và CT8 đều chẵn hoặc ít nhất có 1 nghiệm chẵn khi $n=4$. Trong khi đó, theo giả thiết thì a và c phải là số lẻ. Như vậy, khi a lẻ thì phương trình $a^n + b^n = c^n$ vẫn không có nghiệm nguyên.

Tóm lại: Phương trình $a^n + b^n = c^n$ không có nghiệm nguyên $\neq 0$ khi n chẵn ≥ 4 .

Định lý Fermat đưa ra điều kiện $n \geq 3$. Nếu $n < 3$ thì phương trình $a^n + b^n = c^n$ có các trường hợp sau:

Nếu $n = 0$ thì phương trình vô nghiệm ($1 + 1 \neq 1$)

Nếu $n = 1$ thì phương trình có vô số nghiệm nguyên.

Nếu $n = 2$ thì $m = 1$; Khi đó CT2 và CT3 được viết lại như sau:

$$b = \frac{1}{2} (aQ - T)$$

$$c = \frac{1}{2} (aQ + T)$$

Khi $n=2$, với mọi giá trị a lẻ ≥ 3 và a chẵn $= 4k$ (k là số tự nhiên bất kỳ $\neq 0$) ta đều có ít nhất một bộ nghiệm nguyên dương thỏa mãn phương trình $a^2 + b^2 = c^2$, mà trong đó a, b và c không có ước số chung.

Nếu lời giải này không sai thì có thể ứng dụng kết quả này để chứng minh định lý Fermat trong trường hợp n lẻ bằng toán học cổ điển hay không ?

Rất mong được góp ý, xin trân trọng cảm ơn.

(Email : pvbinh1952@gmail.com ; ĐT : 0912167015)