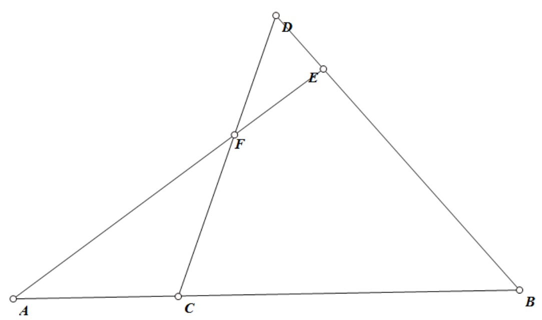
Các chuyên đề hình học dành cho các bạn THCS(Số 2)

Nguyễn Duy Khương-khoá 1518 chuyên Toán-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Đôi điều về chuyên mục: Ở chuyên mục mới mở này tôi sẽ trình bày các chuyên đề liên quan tới hình học phẳng qua các kì thi vào lớp 10, thi chọn HSG TP lớp 9. Mỗi tháng tôi sẽ viết một chuyên đề như vậy. Mong các bạn ủng hộ, đặc biệt là các bạn lớp 9 sắp chuẩn bị bước vào kì thi chuyên cam go. Do giới hạn kiến thức cho học sinh lớp 9 rất khó tránh việc các lời giải có lúc sẽ khá là dài(do phải xét nhiều trường hợp hình vẽ khác nhau) mong các bạn, thầy cô thông cảm.

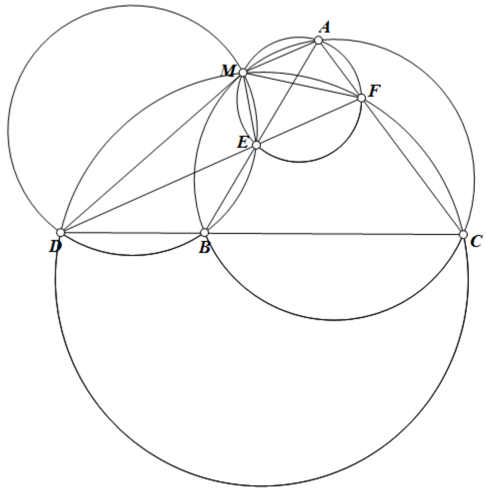
Bắt đầu từ số này tôi sẽ viết một số chuyên đề liên quan tới các định lí hình học thường xuất hiện dưới dạng đề thi hoặc áp dụng để làm các bài thi HSG lớp 9 cũng như là thi vào 10. Việc mắn vững các kiến thức này sẽ là nền tảng kiến thức hình học chuyên ở cấp 3, đồng thời là cách để chúng ta tiếp cận một bài toán một cách dễ dàng hơn. Việc trang bị những chiếc "*cần câu*" khác nhau sẽ giúp các bạn dễ lựa chọn để câu những "*con cá*" to nhỏ khác nhau.

Chuyên đề 2: Tứ giác toàn phần và điểm Miquel



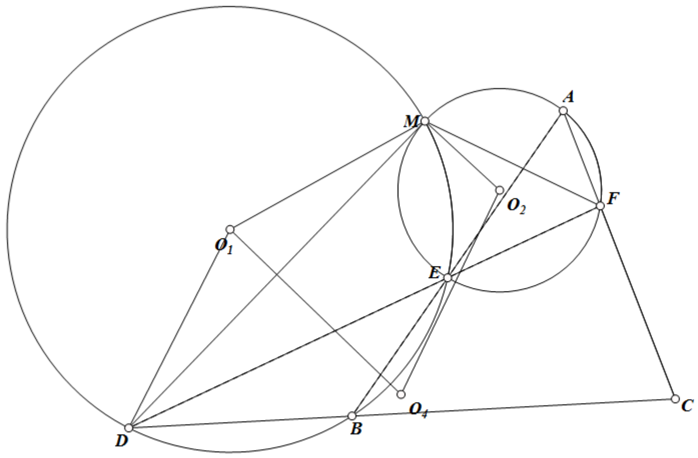
Nhận xét: Hình vẽ như trên được gọi là 1 tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Cấu hình về tứ giác toàn phần đã được nghiên cứu từ lâu đời và có khá nhiều tính chất rất thú vị. Sau đây xin đi vào chi tiết các tính chất cơ bản của cấu hình này.

Tính chất 1: Các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AEF, DEB, ABC, FDC cùng đi qua 1 điểm gọi là điểm $Miquel$ của tứ giác toàn phần.



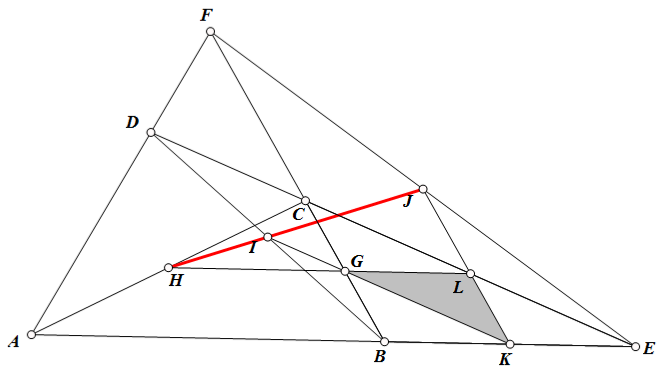
Chứng minh: Ta gọi $(DEB) \cap (AEF) = M, E$. Ta chứng minh $M \in (ABC)$. Tương tự với $M \in (ADC)$. Ta chứng minh với trường hợp như hình trên các trường hợp hình vẽ khác ta chứng minh tương tự. Do $M \in (DEB)$ do đó ta có: $\angle BMC = \angle FDC$ lại có $M \in (AEF)$ nên ta có: $\angle EMA = 180° - \angle AEF$ suy ra: $\angle BMA = 180° - \angle AEF + \angle FDC = 180° - \angle ACB$ suy ra $M \in (ABC)$(đpcm).

Tính chất 2: Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác DEB,AEF, ABC,DFC. Khi đó O_1, O_2, O_3, O_4, M đồng viên (M là điểm $Miquel$ của tứ giác toàn phần).



Chứng minh: Từ tính chất 1 thế thì $M \in (FDC)$ do đó O_1O_4 là trung trực của DM. Tương tự ta cũng có O_4O_2 là trung trực của MF. Do đó, ta có: $\angle O_4O_1M = 180^\circ - \angle MED$. Tương tự ta cũng có ngay rằng: $\angle MO_2O_4 = \angle MED$. Do đó ta thu ngay được $M \in (O_1O_2O_4)$. Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được rằng $M \in (O_1O_2O_3)$. Do đó ta thu được đpcm.

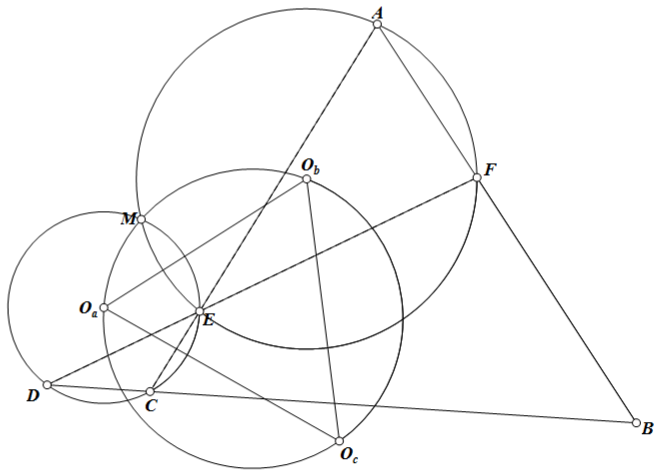
Tính chất 3(Đường thẳng Gauss): Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Gọi trung điểm AC, BD, EF lần lượt là H, I, J. Khi đó H, J, I thẳng hàng.



Chứng minh: Gọi các điểm K, G, L là trung điểm của BE, BC, CE. Thế thì ta nhận thấy: $\overline{I, G, K}$ là đường trung bình tam giác BDE. $\overline{H, G, L}$ là đường trung bình tam giác CAE. $\overline{J, L, K}$ là đường trung bình tam giác FBE. Do đó ta thu được(nhờ định lí $Thales$): $\dfrac{HG}{HL}.\dfrac{JL}{JK}.\dfrac{IK}{IG} = \dfrac{AB}{AE}.\dfrac{FC}{FB}.\dfrac{DE}{DC} = 1$(do áp dụng định lí $Menelaus$ thuận với tam giác BCE có cát tuyến ADF). Vậy áp dụng định lí $Menelaus$ đảo cho tam giác GLK ta có ngay: H, J, I thẳng hàng(đpcm).

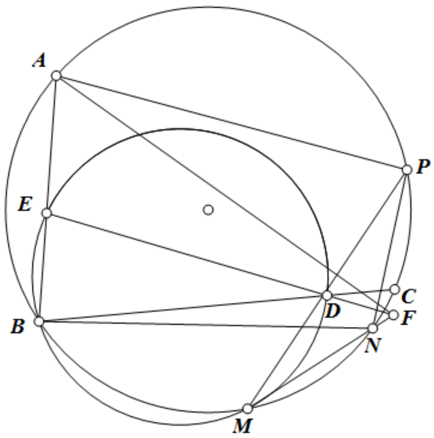
Trên đây là ba tính chất rất hay được sử dụng trong các kì thi vào 10, thi HSG lớp 9 về cấu hình này. Về cơ bản đi thi ta cần phải chứng minh lại các tính chất này mới được sử dụng. Nhưng ở đây tôi giới thiệu chúng nhằm mục đích giúp các bạn có khả năng nhận biết được cấu hình tứ giác toàn phần và có các phương hướng giải trong lúc thi. Tứ giác toàn phần còn nhiều tính chất rất hay khác xong tôi sẽ giới thiệu chúng dưới dạng bài tập ở các chuyên đề khác(các bạn hãy đón đọc các chuyên đề tiếp theo). Bây giờ để luyện tập chúng ta sẽ giải một số bài tập liên quan.

Bài toán 1: Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Gọi O_a, O_b, O_c lần lượt là các tâm ngoại tiếp các tam giác CDE, AEF, DFB. Chứng minh rằng trực tâm tam giác $O_aO_bO_c$ nằm trên EF.



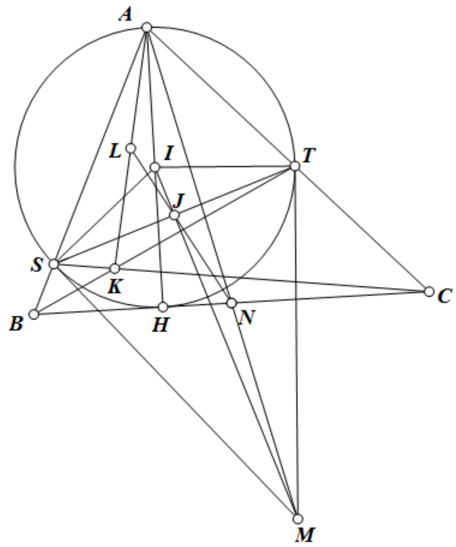
Lời giải: Gọi M là điểm $Miquel$ của tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Khi đó ta có được M nằm trên (BFD) và đồng thời nằm trên $(O_aO_bO_c)$. Do đó M đối xứng D qua O_aO_c và đồng thời M đối xứng F qua O_bO_c. Từ đó sử dụng định lí về đường thẳng $Steiner$ thì ta thu được trực tâm tam giác $O_aO_bO_c$ nằm trên DF hay EF(đpcm).

Bài toán 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng l đi qua D cắt AB và AC tại E và F. Đường tròn qua 3 điểm là B, E, D cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M. MD và MF cắt lại (O) tại P và N. Chứng minh rằng: $ABNP$ là hình thang.

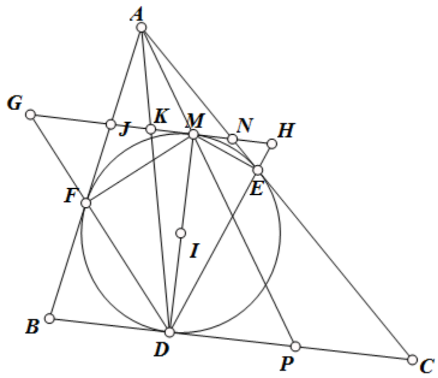


Lời giải: Sử dụng tính chất 1 rõ ràng $ACDBEF$ là tứ giác toàn phần do đó ta có được ngay rằng $M \in (CDF)$. Đến đây ta có các biến đổi góc như sau: $\angle DMN = \angle ACB = \angle ANB$ mà $\angle ANB = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ và $\angle DMN = \dfrac{\overset{\frown}{PN}}{2}$ do đó: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{PN}$ hay là $AP \| BN$ đpcm. Các trường hợp hình vẽ khác ta chứng minh tương tự.

Bài toán 3(T8/466-Hồ Quang Vinh-THTT): Cho tam giác ABC có đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính AH cắt AB, AC tại S, T. BT cắt CS tại K. Gọi tiếp tuyến tại S và T của (I) cắt nhau ở M. MA giao BC tại N. IM cắt ST tại J. Chứng minh rằng NJ đi qua trung điểm AK.



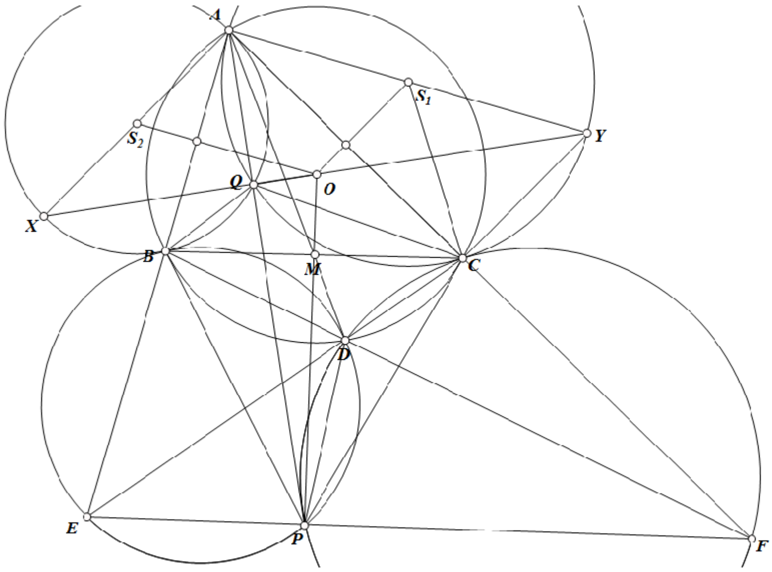
Trước khi đi vào lời giải ta cần chứng minh 1 bổ đề nhỏ như sau: "Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. DM là đường kính của (I). Tiếp tuyến (I) tại M cắt DF, DE tại G và H. Gọi AD cắt GH tại K. Khi đó K là trung điểm GH."



Chứng minh: Gọi GH cắt AB, AC tại J, N. Gọi AM cắt BC tại P. Ta dễ thấy rằng: $PC = BD$. Theo định lí Tháles ta lại có được rằng: $\dfrac{GJ}{DB} = \dfrac{FJ}{FB} = \dfrac{FJ}{BD} \Rightarrow GJ = JF = JM$. Hoàn toàn tương tự ta có: $NM = NH = NE$. Lại theo định lí Tháles ta có: $\dfrac{JK}{BD} = \dfrac{MN}{PC}(= \dfrac{AK}{AD})$ mà ta có được rằng $BD = PC$ nên ta thu ngay được rằng: $JK = MN$. Do đó $GJ + JK = JM + MN = JN$ và $KH = KM + MN + NH = JK + MN + KM = JN$ do đó $GK = KH(= JN)$ hay K là trung điểm GH.

Quay lại bài toán ban đầu, từ bài toán phụ ta dễ có được AM đi qua trung điểm BC hay N là trung điểm BC. Áp dụng định lí về đường thẳng *Gauss* cho tứ giác $ASTK$ với $TK \cap AS = B$ và $SK \cap AT = C$ thì do N là trung điểm BC và J là trung điểm ST(hiển nhiên J là trung điểm ST do M là giao 2 tiếp tuyến của (I) từ S và T) nên ta thu ngay được rằng NJ đi qua trung điểm AK(đpcm).

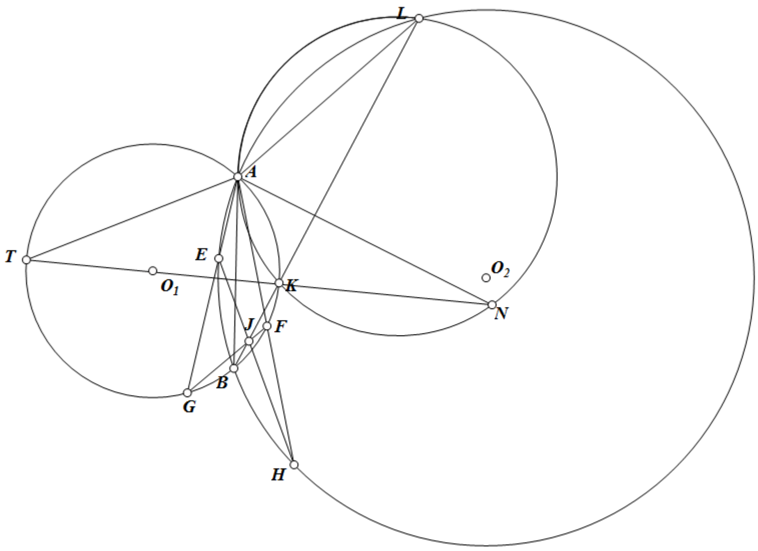
Bài toán 4(Chọn đội tuyển VMO Hà Nội 2016-2017): Cho tam giác $ABC(AB < AC)$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm BC. AM cắt (O) tại các điểm A, D. Giả sử $BD \cap AC = F, CD \cap AB = E$. $(ABF) \cap (ACE) = A, P$. Gọi (S_1) là đường tròn qua C tiếp xúc AB tại A. Gọi (S_2) là đường tròn tiếp xúc AC tại A và đi B. $A, Q = (S_1) \cap (S_2)$. Chứng minh rằng tam giác OPQ vuông.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Ta thấy ngay được rằng: P là điểm $Miquel$ của tứ giác toàn phần $\overline{ACFDBE}$ do đó dĩ nhiên P, E, F thẳng hàng. Theo định lí $Borcard$ thì ta có: $\overline{O, M, P} \perp EF$(Các bạn có thể tìm lại chứng minh chi tiết đoạn này ở **chuyên đề thứ nhất** về biến đổi góc ở **bài toán số 7**) do đó $EF \| BC$ vậy là: $\angle BCD = \angle DEP = \angle DBP$ do đó PB tiếp xúc (O). Tương tự PC tiếp xúc (O). Kẻ các đường kính AX, AY lần lượt của $(S_2), (S_1)$. Lại có: $\angle AQB = 180^\circ - \angle AXB = 180^\circ - \angle AS_2O$. Tương tự thì: $\angle AQC = 180^\circ - \angle AS_1O$ do đó $\angle AQB + \angle AQC = 360^\circ - 2\angle AS_1O = 2(180^\circ - \angle A) = 360^\circ - 2\angle A$ do đó hiển nhiên $\angle BQC = 2\angle A$ do đó P, B, Q, O, C nằm trên một đường tròn vậy nên $OQ \perp PQ$ do đó ta thu được ngay đpcm.

Nhận xét: Nếu bài toán hỏi là chứng minh A, P, Q thẳng hàng thì có vẻ sẽ hay hơn. Điều này cũng không khó để chứng minh. Chú ý việc tứ giác AS_2S_1O là hình bình hành nên S_1S_2 chia đôi AO do đó theo tính chất đường trung bình dĩ nhiên X, Y, O thẳng hàng. Ta có: $\angle AQX + \angle AQY = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên X, Y, Q, O thẳng hàng. Dĩ nhiên là $AQ \perp OQ$ do đó A, Q, P thẳng hàng.

Bài toán 5(Nguyễn Văn Linh)(Proposed for Arab Saudi TST): Cho 2 đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại 2 điểm A, B. d_1, d_2 là 2 đường thẳng qua A và đối xứng nhau qua AB. d_1 cắt $(O_1), (O_2)$ tại G, E phân biệt. d_2 cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại các điểm F, H, giả sử E nằm giữa A, G và F nằm giữa A, H. EH cắt FG tại điểm J. BJ cắt $(O_1), (O_2)$ tại các điểm K, L phân biệt và O_1K cắt O_2L tại điểm N. Chứng minh rằng (NKL) tiếp xúc AB.



Lời giải: Trước tiên ta thấy rằng: $\angle NLA = 90^\circ - \dfrac{\angle O_2AL}{2} = 90^\circ - \angle ABL = 90^\circ - \angle ABK = \angle AKO_1$. Vậy ta có: A nằm trên (KLN). Tiếp tục ta thấy B là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $AEIFGH$. Do đó B thuộc (JHF). Gọi O là tâm $(ALNK)$ thế thì: $\angle BAO = \angle BAK + \angle KAO = \angle BAF + \angle FAK + 90^\circ - \angle ALK = 90^\circ$ do đó ta thu được AB tiếp xúc với (O)(đpcm)

Nhận xét: Ở bài trên việc tìm ra tiếp điểm A chính là mấu chốt cho các biến đổi góc sau đó.

Việc sử dụng thành thạo các kiến thức liên qua tới tứ giác toàn phần rất quan trọng và sẽ giúp ích rất nhiều cho các bạn. Qua bài viết tôi muốn nhấn mạnh một số ý chính như trên. Bài viết này dành cho các bạn THCS nên khá khó khăn khi trình bày một số lời giải(bởi chúng bị phụ thuộc hình vẽ), mong các bạn thông cảm một số chỗ còn dài.